De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires.

Agnès Lenfant

UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

UFR de Mathématiques

Ecole doctorale " Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactiques des disciplines "

Année 2002 *N° d'ordre :*

THESE

pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée et soutenue publiquement par

Agnès LENFANT

Le 20 décembre 2002

De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires

Directeur de thèse : Michèle ARTIGUE

Jury :

Michèle ARTIGUE	Directeur de recherche
Nadine BEDNARZ	Rapporteur
Yves CHEVALLARD	Rapporteur
Brigitte GRUGEON	Examinateur
Jean-Baptiste LAGRANGE	Examinateur
Aline ROBERT	Examinateur

UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

UFR de Mathématiques

Ecole doctorale " Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactiques des disciplines "

Année 2002 ***N° d'ordre :***

THESE

pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée et soutenue publiquement par

Agnès LENFANT

Le 20 décembre 2002

De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires

Directeur de thèse : Michèle ARTIGUE

Jury :

Michèle ARTIGUE	Directeur de recherche
Nadine BEDNARZ	Rapporteur
Yves CHEVALLARD	Rapporteur
Brigitte GRUGEON	Examinateur
Jean-Baptiste LAGRANGE	Examinateur
Aline ROBERT	Examinateur

A la fin de ce travail, je voudrais remercier Madame N.Bednarz, Monsieur Y.Chevallard, Mesdames B.Grugeon et A.Robert, Monsieur J.B.Lagrange pour l'attention qu'ils ont bien voulu porter à ma recherche en acceptant d'être respectivement rapporteurs et membres du jury.

Ma reconnaissance va tout particulièrement à ma directrice de thèse, Madame Michèle Artigue, pour ses qualités humaines et ses qualités de chercheur qui m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je rends également un hommage appuyé à tous les étudiants et tous les professeurs stagiaires qui ont accepté de participer à cette recherche.

Un grand merci à Sophie, Jean, Alain, Valentina, Magali et à tous les membres de l'équipe des jeunes chercheurs de l'équipe DIDIREM pour leur soutien moral et intellectuel apporté à tout moment.

Enfin, ma gratitude va à mes parents qui ont su me donner le goût du travail et des études.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons ici est centré sur les problèmes de constitution de la professionnalité chez des professeurs stagiaires en mathématiques. Cette recherche a son origine dans les préoccupations d'une équipe de formateurs de mathématiques de l'IUFM de Reims, dont nous faisons partie, chargés de la formation professionnelle initiale de professeurs stagiaires en mathématiques (appelés aussi PLC2 dans les IUFM).

Lors des journées de formation en didactique des mathématiques, nous avions l'impression d'aller toujours trop vite, de vouloir en faire trop pour être réellement efficaces, de ne pas disposer des informations nécessaires pour faire des choix pertinents, des choix particulièrement difficiles à faire compte tenu du temps réduit alloué à cette formation (17 journées, soit 102 heures). L'insatisfaction engendrée par nos pratiques nous a amenés à nous poser différentes questions : comment armer au mieux les enseignants débutants, au cours des années passées à l'IUFM et notamment au cours de la deuxième année ? Comment préparer les évolutions futures sans doute nécessaires ? Quelles stratégies de formation privilégier, compte tenu des contraintes institutionnelles de la formation didactique à l'IUFM ?

Nous avons voulu faire un pas de côté par rapport à cette formation pour étudier et déterminer quelles entrées seraient les mieux à même d'être efficaces, compte tenu des contraintes existantes. Pour ce faire, nous avons choisi de tenter de cerner comment se construit, chez des enseignants stagiaires de mathématiques, un rapport professionnel à un domaine des mathématiques, qui nous semble crucial : l'algèbre.

Dans le premier chapitre de notre thèse, nous présentons les apports de différents travaux, issus de divers champs de recherche, à notre réflexion et nous précisons la problématique de ce travail.

Ces travaux nous ont amenée à pointer, en particulier, la complexité des questions relatives à la définition des savoirs professionnels, à l'articulation entre des savoirs théoriques et des compétences qui se manifestent dans l'action, une relative méconnaissance des processus qui gouvernent la formation de ces compétences. Pour l'algèbre qui a fait l'objet de nombreux travaux tant sur le plan épistémologique, cognitif que didactique, il est possible d'identifier des savoirs susceptibles d'outiller la professionnalité enseignante. En les prenant en compte, nous avons construit un instrument méthodologique adapté à l'objet de notre recherche, un instrument qui nous aide à opérationnaliser, dans ce domaine précis de l'algèbre élémentaire, l'étude que nous nous proposons de réaliser de l'évolution du rapport à l'algèbre d'enseignants débutants, dans la transition entre une position d'étudiant et une position d'enseignant. C'est cet outil que nous présentons dans le chapitre 2 de cette thèse.

En considérant notre problématique et nos hypothèses, nous avons choisi une méthodologie qualitative basée sur la triangulation de multiples sources de données et analyses qui nous autorise à prendre en compte la multidimensionnalité des compétences professionnelles et le développement professionnel comme un processus. Elle conjugue divers éléments, dont le plus important est le suivi individuel d'un groupe de professeurs stagiaires. Nous préciserons nos choix méthodologiques et les modalités de ce suivi dans le chapitre 3 de ce texte.

Différentes considérations, que nous présenterons également dans ce troisième chapitre, nous ont amenée à étudier dans cette thèse la constitution et l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre de quatre professeurs stagiaires enseignant en classe de seconde.

Après une présentation rapide, dans le chapitre 4, de la formation didactique en algèbre, dispensée à l'IUFM de Reims, au moment de nos expérimentations, nous proposerons, dans le chapitre 5, une analyse détaillée des pratiques de Benjamin, stagiaire en 1999-2000, et de leur évolution. Nous synthétiserons ensuite l'ensemble des analyses concernant Benjamin sous la forme d'un profil dynamique.

C'est cette notion de profil que nous exploiterons dans le chapitre 6 pour rendre compte des analyses analogues menées sur les trois autres stagiaires considérés dans cette thèse : Claire, Marie et Julien, sans rentrer de façon aussi détaillée dans les méandres de leur élaboration, pour des raisons évidentes de lisibilité. Nous chercherons à mettre tout particulièrement en évidence les régularités identifiées dans la constitution et l'évolution de ces quatre rapports professionnels à l'algèbre, mais aussi la diversité existante dans les évolutions, en essayant d'en faire percevoir des raisons possibles.

Au cours de nos expérimentations, nous sommes allée filmer cinq stagiaires lors d'une séance particulière d'algèbre, dans le but d'obtenir des informations complémentaires sur leurs pratiques en classe, sur leurs pratiques de préparation d'une séance particulière et sur les analyses qu'ils étaient susceptibles de faire de leur propre pratique. Il s'agissait aussi pour nous de renforcer le nombre des observables nous permettant de confronter le discours sur les pratiques et les pratiques effectives à l'intérieur de la classe. Nous présentons plus précisément ce dispositif dans le chapitre 3 consacré à la méthodologie de la thèse. Précisons toutefois que, dans la perspective d'obtenir des informations sur les analyses d'une séance que ces cinq stagiaires étaient capables de mener entre pairs, nous avons complété le dispositif par une dernière phase : après avoir analysé les cinq films, nous avons sélectionné dans chacune des séances des épisodes qui nous semblaient particulièrement intéressants ; nous avons ensuite réuni les cinq stagiaires, qui ont visionné ensemble ces différents extraits, et nous leur avons demandé de les analyser. Deux des stagiaires considérés dans la thèse, Benjamin et Claire, ont été concernés par ce "dispositif vidéo". Nous consacrerons le septième chapitre de cette thèse à l'analyse des deux séances filmées dans leur classe, puis nous étudierons les analyses produites par les cinq stagiaires au moment du visionnement collectif.

C'est de l'ensemble de ce travail de recherche que nous essaierons de tirer les leçons dans un dernier chapitre de conclusion, en pointant ses potentialités et ses limites, en montrant aussi les pistes de recherche qu'il ouvre selon nous.

CHAPITRE 1

PROBLEMATIQUE DE LA RECHERCHE

Notre recherche s'inscrit ainsi dans l'ensemble croissant des recherches menées sur la constitution de la professionnalité enseignante. Ces recherches ne sont pas, loin de là, le seul fait des didacticiens. C'est pourquoi, même si notre approche relève d'une problématique didactique, il nous a semblé nécessaire de nous intéresser d'abord à un certain nombre de travaux dans ce domaine, hors du champ de la didactique. Ce sont les apports de ces travaux à notre réflexion que nous présentons, de façon synthétique, dans le paragraphe suivant. Dans le second paragraphe, nous nous centrerons sur l'étude de la professionnalité dans le cadre de la didactique des mathématiques. Enfin, dans une troisième partie, nous préciserons la problématique de notre recherche.

I - L'ETUDE DE LA PROFESSIONNALITE DANS DES TRAVAUX HORS DU CHAMP DE LA DIDACTIQUE :

Les travaux hors du champ de la didactique relatifs à l'enseignant sont très nombreux et diversifiés : des ouvrages de synthèse comme celui de F.Tochon (1995) ou celui de Paquay, Altet, Charlier et Perrenoud (1996) montrent bien l'étendue de ces recherches et la diversité des cadres théoriques dans lesquels elles sont menées. Bien sûr, il ne s'agit pas pour nous ici de faire une synthèse de tous ces travaux mais de présenter ce qui, dans ces recherches, nous a permis d'affiner notre questionnement relativement à la construction de la professionnalité des PLC2 de mathématiques. Nous nous centrerons ainsi, dans un premier temps, sur la perception du métier d'enseignant qui émerge de ces travaux, puis sur la façon dont ils approchent la notion de professionnalité enseignante, en particulier à travers la notion de "compétences professionnelles" et la question de la construction de ces compétences.

I.1 - L'enseignant-professionnel :

Ces dernières années, différents éléments tels que la mise en place d'un système éducatif de masse, la modification du public scolaire, l'avancée des connaissances dans le domaine de l'apprentissage ont amené une évolution de la perception des rôles de l'enseignant. Le métier d'enseignant a subi en fait une profonde mutation au point que P.Meirieu (Meirieu, 1989) parle, par exemple, de " nouveau métier ". Cette évolution du métier s'est accompagnée de la reconnaissance d'une spécificité de la professionnalité enseignante : les professeurs d'école, de collège ou de lycée sont devenus des professionnels de l'enseignement et de l'apprentissage. P.Perrenoud (Perrenoud, 1995) montre bien cette évolution d'un métier en voie de professionnalisation :

> " D'un point de vue dynamique, on peut dire que l'enseignement est un métier **en voie de professionnalisation**, un métier qui passe de l'application stricte de méthodologies, voire de la mise en œuvre de recettes et de trucs, à la construction de démarches didactiques orientées globalement par des objectifs du cycle d'étude, adaptées à la diversité des élèves, à leur niveau, aux conditions matérielles et morales du travail, au mode de collaboration possible avec les parents, à la nature de l'équipe pédagogique et de la division du travail entre enseignants. La formation n'est plus normalisée, elle ne

prétend plus donner la réponse adéquate pour chaque situation-type, mais plutôt des ressources pour analyser une grande variété de situations et y faire face. "

Ces changements ont amené de nombreux chercheurs à s'interroger sur la notion de professionnalité enseignante et certains ont cherché à identifier les modèles qui sous-tendent la profession. Cette identification permet notamment de percevoir les différents changements qu'a connu le métier d'enseignant, comme le montrent les quatre modèles suivants élaborés par M.Altet (Paquay et al., 1996), modèles qui correspondent pour elle à des visions successives de ce métier :

" - L'enseignant MAGISTER ou MAGE : ce modèle intellectualiste de l'antiquité considérait l'enseignant comme un Maître, un Mage qui sait et qui n'a pas besoin de formation spécifique ou de recherche puisque son charisme et ses compétences rhétoriques suffisent ;

- l'enseignant TECHNICIEN : ce second modèle apparaît avec les Ecoles Normales ; on se forme au métier par apprentissage imitatif, en s'appuyant sur la pratique d'un enseignant chevronné qui transmet ses savoir-faire, ses " trucs " ; le formateur est un praticien expérimenté-modèle : les compétences techniques dominent ;

- l'enseignant INGENIEUR, TECHNOLOGUE : dans ce troisième modèle, l'enseignant s'appuie sur les apports scientifiques des sciences humaines ; il rationalise sa pratique en tentant d'y appliquer la théorie. La formation est menée par des théoriciens, spécialistes du design pédagogique ou de la didactique ;

- l'enseignant PROFESSIONNEL, PRATICIEN-REFLECHI : dans ce quatrième modèle, pour nous, à la dialectique théorie-pratique se substitue un va-et-vient entre PRATIQUE-THEORIE-PRATIQUE ; l'enseignant devient un professionnel réfléchi capable d'analyser ses propres pratiques, de résoudre des problèmes, d'inventer des stratégies. La formation s'appuie sur les apports des praticiens ET des chercheurs ; elle vise à développer chez l'enseignant une approche des situations vécues de type ACTION-SAVOIR-PROBLEME en utilisant conjointement pratique et théorie pour construire chez l'enseignant des capacités d'analyse de ses pratiques et de métacognition. "

C'est ce dernier modèle qui prédomine aujourd'hui dans de nombreuses recherches relatives à la professionnalité des enseignants et qui semble correspondre aussi aux attentes actuelles de l'institution : en effet, une circulaire[1] publiée au Bulletin Officiel de l'Education Nationale en mai 1997, relative aux missions du professeur et aux compétences attendues en fin de formation initiale, précise que le processus de formation de compétences professionnelles comporte une dimension réflexive :

"La pleine acquisition de compétences aussi complexes et diversifiées exige du temps et doit s'inscrire dans la durée, sur l'ensemble d'une carrière qui permettra l'affirmation progressive d'un style personnel dans l'exercice du métier. A cette fin, il est nécessaire que le professeur possède en fin de formation initiale l'aptitude à analyser sa pratique professionnelle et le contexte dans lequel il exerce."

Cette évolution du statut de l'enseignant s'est accompagnée d'une réflexion sur la formation professionnelle : comment préparer les jeunes enseignants à ce nouveau métier ? Comment aider les enseignants à analyser leurs propres pratiques ? A résoudre les problèmes qu'ils rencontrent ? Et plus généralement, comment les former pour qu'ils acquièrent et développent les "compétences professionnelles" attendues par l'institution ? Ce

[1] Il s'agit de la circulaire n°97.123 du 23/5/1997 concernant les missions du professeur exerçant en collège, en lycée général et technologique ou en lycée professionnel.

questionnement sur la formation conduit à un questionnement plus large sur la nature et la genèse des compétences professionnelles.

I.2 - La notion de "compétences professionnelles" :

I.2.1 - La question de la nature des "compétences professionnelles" :

Le questionnement sur la nature des compétences professionnelles dépasse l'étude de la profession d'enseignant et est au centre de recherches diverses centrées notamment sur l'étude de la transmission et l'acquisition de compétences au travail. Ces recherches s'appuient sur des définitions diverses de la notion de "compétence"[2]. Il ne s'agit pas pour nous d'en faire ici une synthèse, mais d'identifier des idées essentielles qui ressortent de différents travaux portant sur l'étude de la professionnalité des enseignants pour nous permettre de mieux cerner la nature des compétences professionnelles. L'étude d'un certain nombre de ces travaux nous a permis de dégager deux points qui nous semblent au centre des recherches sur la nature de ces compétences : la complexité des compétences professionnelles d'une part et l'existence de questions ouvertes relatives à l'étude de la nature de ces compétences d'autre part.

En ce qui concerne le premier de ces deux points, nous reprendrons d'abord une définition de la notion de compétence proposée par P.Perrenoud qui permet de percevoir le caractère complexe des compétences professionnelles (Perrenoud, 1996) :

> "C'est une capacité de mobiliser un ensemble de ressources – savoirs, savoir-faire, schèmes d'évaluation et d'actions, outils, attitudes – pour faire face efficacement à des situations complexes et inédites."

Une compétence est donc le résultat d'une combinaison pertinente entre plusieurs ressources (Le Boterf, 1999). La complexité réside tout d'abord dans la nature diverse des ressources mobilisables : elles sont composées de savoirs de nature diverse, nommés par certains chercheurs "*savoirs professionnels*". Il apparaît en outre que posséder un ensemble, un stock de tels savoirs ne suffit pas pour avoir des compétences professionnelles : il faut également des schèmes opératoires pour se servir de ces savoirs, pour les restructurer, les valider, les étendre, pour les mettre en œuvre… P.Perrenoud (Perrenoud, 1995) reprend la notion d'habitus élaborée par Bourdieu pour désigner l'ensemble des schèmes qui permettent de faire face à une grande diversité de situations quotidiennes et il précise que l'action pédagogique est constamment sous le contrôle de l'habitus.

La complexité réside ensuite dans la difficulté que l'on a actuellement à définir ou à caractériser certains composants de ces ressources et à cerner les rapports qu'ils entretiennent entre eux. Ainsi la définition et la caractérisation des "*savoirs professionnels*" semblent encore problématiques comme l'expliquent Paquay et al.(Paquay et al, 1996) :

> " La maîtrise des savoirs à enseigner est l'aspect le moins problématique, sans qu'on puisse pour autant dire de façon bien fondée :
>
> - à quel point les enseignants doivent "dominer" leur discipline [...]
>
> - en quoi consiste cette maîtrise [...]
>
> - de quel rapport au savoir s'accompagne la compétence de l'expert [...]

---

[2] Cf. le numéro 123 de la revue Education Permanente sur le développement des compétences.

Quant aux autres savoirs, leur dénomination et leur classement fait problème : savoirs pédagogiques, didactiques, relationnels, psycho-sociologiques ; savoirs stratégiques, pratiques; savoirs professionnels, savoirs d'expérience, savoirs implicites. Ces distinctions sont fragiles et renvoient à des débats encore ouverts sur le découpage des pratiques en composantes identifiables ou sur l'origine des savoirs des enseignants."

Il semble également difficile de cerner les rapports qui existent entre des savoirs que l'on pourrait qualifier de "théoriques" comme par exemple des savoirs disciplinaires, des savoirs didactisés à faire acquérir aux élèves ou des savoirs pédagogiques sur la gestion d'une classe, et des savoirs plus "pratiques" issus d'expériences professionnelles. Et il est également difficile de déterminer la fonction de ces différents savoirs dans l'action. Il semble toutefois que ce sont, en partie, des savoirs "pratiques" qui permettent de mobiliser des savoirs "théoriques" et M.Altet (Paquay et al, 1996) précise :

"Il semble que les savoirs de base utilisés dans une action se développent au cours de la transformation d'une expérience et d'une performance, en savoirs nouveaux, savoirs de la pratique qui permettront au sujet de s'adapter à la situation."

Enfin il reste encore de nombreuses questions ouvertes relatives à la mise en œuvre de ces savoirs et de ces schèmes dans l'action. Les travaux de P.Perrenoud, par exemple, font bien apparaître qu'il n'y a pas d'une part des savoirs explicites et conscients et d'autre part des schèmes échappant à la conscience. Certains savoirs sur des procédures s'automatisent, s'incorporent à des routines, élargissent l'habitus. Mais les processus qui gouvernent ces transformations sont assez mal connus et l'on ne sait pas encore identifier précisément et prévoir ce qui, dans les conduites d'un enseignant, relève des savoirs ou de l'habitus.

La question sur la nature des compétences professionnelles reste donc encore largement ouverte et, comme nous venons de le voir, de nombreuses interrogations sont aujourd'hui en suspens.

Un autre type de questions est également au cœur des recherches relatives à l'enseignant : celles qui concernent le processus de construction des compétences professionnelles.

I.2.2 - Des processus de formation obscurs :

En ce qui concerne la genèse des compétences professionnelles, une point essentiel se dégage des travaux que nous avons étudiés : de nombreux aspects des processus de formation de ces compétences restent encore obscurs. Il existe pourtant de nombreux travaux de recherche développés dans différents cadres théoriques qui se sont intéressés à ces processus et, en nous appuyant sur la synthèse de Paquay et al.(1996), nous reprenons ici des aspects sur lesquels ils mettent l'accent :

"- Les compétences se construisent à partir d'une pratique, d'une expérience, autrement dit lorsqu'on se retrouve confronté à des situations complexes réelles (ou simulées avec réalisme [...]), à des situations posant problème, à des incidents critiques. C'est au cours de ces situations difficiles que se déconstruisent et se reconstruisent les pratiques, à certaines conditions toutefois ;

- la confrontation au réel complexe est dans une certaine mesure préparée, anticipée, par la formation de scénarios, d'hypothèses, de plans d'action, susceptibles d'être "testés" ;

- la construction suppose en même temps une certaine réflexivité, une capacité de régulation à partir de l'analyse de l'expérience, une mise en perspective et une intégration des événements dans un après-coup ; ce qui implique souvent une réceptivité aux feed-back de la situation et aux feed-back souvent subtils en provenance d'autrui ;

- ce dernier temps prépare les expériences suivantes ; la construction des compétences apparaît donc être un processus de longue durée caractérisé par la récurrence de situations à la fois semblables et différentes."

Dans cette citation, nous retenons trois idées qui nous paraissent essentielles :

- l'expérience, la confrontation à des situations complexes, à des incidents critiques jouent un rôle important dans les processus de construction des compétences professionnelles. P.Perrenoud (1995) explique d'ailleurs sur ce point que la confrontation d'un enseignant à un problème nouveau l'oblige à sortir de ses routines et l'amène à transposer, à réajuster ses schèmes disponibles et à les coordonner de façon originale.

- Il apparaît également que l'expérience seule ne suffit pas et que la construction de compétences professionnelles nécessite une certaine "pratique réflexive". On peut distinguer sur ce point la réflexion dans l'action (qui consiste par exemple à se demander ce qui se passe, ce qu'on peut faire, ce qu'il faut faire, la meilleure tactique à envisager...) et la réflexion sur l'action (où l'action devient objet de réflexion pour par exemple la comparer à un modèle, pour l'expliquer, pour la critiquer...). Ainsi Paquay et al. précisent-ils (Paquay et al., 1996) :

"Devenir un enseignant-professionnel, c'est donc d'abord apprendre à réfléchir sur sa pratique, non seulement a posteriori, mais dans le mouvement même de l'action. C'est de prendre ce recul qui non seulement permet de s'adapter à des situations inédites, mais permet surtout d'apprendre à partir de l'expérience.".

- La construction des compétences professionnelles se fait sur un long terme.

L'analyse de Paquay et al. fait apparaître que, malgré la mise en évidence des aspects cités précédemment, la connaissance des processus par lesquels se forment les compétences professionnelles reste très limitée et qu'il reste, par ailleurs, des interrogations sur ces processus notamment en ce qui concerne :

- les facteurs qui influencent la formation des compétences,

- le moment de formation de ces compétences :

"Quand les compétences professionnelles se construisent-elles ? Quels sont les temps forts, les stades, les itinéraires, les cheminements typiques d'une histoire de formation ? Ces questions sont tout justes posées, éclairées par de premiers travaux.",

- le rôle de la formation initiale dans la construction des compétences professionnelles.

I.2.3 - Une réflexion sur la formation des enseignants :

Parallèlement à l'étude des processus de formation des compétences professionnelles, une réflexion sur la formation initiale des enseignants s'est développée. Cette réflexion s'appuie notamment sur des éléments mis en évidence par les recherches que nous avons citées précédemment.

Ainsi, l'évolution du modèle de professionnalité que nous avons explicitée dans le paragraphe I.1 a amené une réflexion sur la place de la théorie dans la formation initiale qui a conduit à des changements quant à cette formation. Ces changements sont notamment décrits par F.Tochon (Tochon, 1995) :

> " Le point à retenir est qu'au cours de la dernière décennie, la place de la théorie a changé par rapport à la pratique. Alors que, pendant longtemps, on estimait que le but des formations était de transmettre la théorie et que le but des enseignants était de l'appliquer, on conçoit maintenant que la théorie est un langage possible, en quête de cohérence, au service de la description et de l'explication des pratiques. "

En outre, les aspects des processus de formation des compétences professionnelles mis en évidence par différents travaux, notamment le rôle joué par l'expérience et la pratique dans cette formation, montrent clairement les limites d'une formation qui serait basée sur la transmission de savoirs existants en vue de leur application dans la pratique. Par ailleurs, la mise en évidence de l'importance de la réflexion sur la constitution de la professionnalité enseignante a amené un développement des recherches relatives d'une part à la formation à l'analyse des pratiques, d'autre part à la réflexion. Ces recherches ont fait apparaître que ce type de formation s'accompagne d'un va-et-vient nécessaire entre la théorie et la pratique. D'où l'accent mis actuellement dans cette formation sur l'articulation entre théorie et pratique décrite en 1992 par P.Perrenoud (Perrenoud, 1992) :

> " L'essentiel, c'est qu'elle [la formation initiale des enseignants] prépare à la complexité de l'action pédagogique dans un environnement qui change et en fonction de politiques de l'éducation toujours plus ambitieuses. De là l'articulation entre théorie et pratique tout au long de la formation, l'adoption d'un modèle clinique préparant à l'autonomie et à la résolution de problèmes en fonction d'objectifs généraux et d'une éthique plutôt qu'à la mise en œuvre de règles et méthodes orthodoxes, celles que les écoles normales traditionnelles ont longtemps favorisées. On parle aujourd'hui de pratique réfléchie (Gather Thurler, 1992) tout au long de la carrière. Ce devrait être le modèle dès la formation initiale, que l'on pourrait concevoir tout simplement comme le début, ouvert, d'une formation permanente. "

Les travaux centrés sur le métier d'enseignant, les compétences professionnelles et leur constitution mettent donc l'accent sur la complexité de ces questions et le caractère limité des connaissances établies dans ce domaine, la difficulté même à définir clairement les objets à l'étude et à introduire des catégorisations pertinentes. Ils montrent comment l'évolution du métier d'enseignant conduit de plus en plus à modéliser celui-ci comme un résolveur de problèmes dans un environnement marqué par l'incertitude. Ils montrent ainsi comment cette vision de l'enseignant influence en retour la façon de concevoir les compétences professionnelles et leurs modes de formation, amène à repenser les rapports entre théorie et pratique et à mettre l'accent sur l'identification, l'analyse et la résolution de problèmes portées par une analyse réflexive des pratiques.

Dans le champ de la didactique des mathématiques, l'émergence de l'enseignant au cœur des problématiques didactiques a subi une trajectoire sensiblement différente. Quelle est cette trajectoire et comment nous conduit-elle à poser aujourd'hui les problèmes relatifs à la professionnalité enseignante et à sa constitution ? C'est ce que nous envisageons de présenter synthétiquement dans le paragraphe suivant.

II - L'ANALYSE DE LA PROFESSIONNALITE DANS LE CHAMP DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES :

Si l'on considère la recherche didactique et plus particulièrement son développement en France, les premiers travaux ont essentiellement questionné le savoir mathématique et le rapport des élèves au savoir, les priorités des chercheurs étant la compréhension de la cohérence de l'élève et la construction d'ingénieries didactiques en accord avec la théorie pour instrumenter l'enseignement. Dans ces recherches, l'enseignant était considéré comme l'utilisateur potentiel des produits d'ingénieries ou comme un ingénieur au sens défini par M.Altet (cf. page 4 de ce chapitre). Ses difficultés à respecter les scénarios élaborés par les chercheurs et à reproduire les ingénieries didactiques, dont la recherche semblait avoir attesté la pertinence et l'efficacité, ont progressivement imposé l'enseignant à l'attention des didacticiens, comme le pointent C.Margolinas et M.J.Perrin (Margolinas, Perrin, 1997) :

> " Les chercheurs vont s'intéresser davantage aux raisons pour lesquelles l'enseignant résiste à la reproduction des ingénieries didactiques mises au point dans les recherches expérimentales, et tenter de théoriser les contraintes qui pèsent sur les enseignants et de modéliser le rôle de l'enseignant, en classe d'abord, plus largement ensuite. Le développement des cadres théoriques permet des avancées dans ce domaine, tandis que la nécessité de former les enseignants amène de nouvelles questions et incite à préciser les cadres théoriques. "

En effet, dès le début des années 90, la création en France des IUFM a conduit à une implication croissante des didacticiens dans la formation des maîtres et, à partir de ce moment, on peut presque parler d'une explosion des recherches sur l'enseignant et sur la formation des enseignants. Ces recherches se réfèrent à des cadres théoriques distincts, plus ou moins spécifiques de ce domaine, et abordent des questions riches et variées comme l'attestent les synthèses de C.Margolinas ou M.L.Schubauer-Léoni à la 10ème école d'été de didactique des mathématiques (1999) ou celle de M.J.Perrin[3] qui pointe, en particulier, les différentes questions abordées pour l'étude de ce qui touche à l'enseignant en classe dans les recherches françaises actuelles : la détermination des contraintes et des marges de manœuvre de l'enseignant, la recherche des caractéristiques de la position d'enseignant dans une institution didactique, l'identification des moyens utilisés par l'enseignant pour gérer son projet d'enseignement et la place laissée à l'élève dans la réalisation de ce projet, la recherche de régularités et de variabilités dans les pratiques des enseignants, la compréhension de la construction des connaissances de l'enseignant.

Certains questionnements assez proches de ceux issus des travaux hors du champ didactique sont alors apparus. Un premier type de questions concerne la modélisation du métier d'enseignant de mathématiques. Suivant les cadres théoriques en jeu, les résultats obtenus sont relativement différents comme le montrent les deux approches suivantes, qui sont celles que nous avons personnellement exploitées dans notre recherche. Dans la première, Y.Chevallard (Chevallard, 1997) élabore un modèle du rôle du professeur de mathématique dans l'institution scolaire actuelle en prenant appui sur différentes notions de la théorie anthropologique du didactique. Il considère ainsi le professeur comme une aide à l'étude dans un système didactique et, après avoir mis en évidence les évolutions de la figure professorale à travers l'histoire, il le définit comme un expert en mathématique n'ayant acquis son expertise que pour enseigner et comme un professionnel, qui accomplit différents gestes

[3] Synthèse des travaux en didactique des mathématiques en France et à l'étranger relatifs à l'enseignant réalisée par M.J. Perrin dans le cadre du programme Cognitique (programme Ecole et Sciences cognitives) et encore non publiée.

décrits en termes de praxéologies[4]. La deuxième approche s'appuie sur les travaux de J.Rogalski (Rogalski, 2000), en psychologie ergonomique, qui conduisent, quant à eux, à considérer l'enseignant comme une personne au travail dont le rôle est de transformer les relations des élèves avec un certain savoir mathématique. Cette personne est soumise alors à un certain nombre de contraintes, comme celles liées au respect d'un programme ou d'autres relatives à l'avancement du temps par exemple, et elle doit gérer un environnement dynamique (dans cet environnement, le savoir de l'élève évolue) et ouvert (l'enseignant ne peut prévoir cette évolution). Le travail de l'enseignant est alors analysé en termes de tâches et d'activités[5]. C'est, notamment, sur cette approche que se sont développées différentes recherches dirigées par A.Robert portant sur les pratiques[6] des enseignants et les contraintes de l'exercice de ce métier.

La mise en jeu de cadres théoriques différents conduit à différentes modélisations, mais nous y trouvons une vision commune de l'enseignant considéré comme un professionnel, comme le souligne A.Robert (Robert, 2001) :

> " Dans chaque cas, les chercheurs prennent en compte des variables (différentes selon les auteurs) liées au fait qu'un enseignant exerce une profession, un métier, et que, ce faisant, il est conduit à développer une stratégie personnelle liée à ce métier, avec des contraintes et des buts exprimés par rapport à lui et pas seulement par rapport aux élèves. Il doit concilier des objectifs liés aux apprentissages des élèves à des objectifs liés à sa propre activité, qui (par exemple) doit être suffisamment confortable (il ne doit pas s'écrouler au bout d'un mois), suffisamment gratifiante (il ne doit pas être "détesté" de trop d'élèves ni de trop de parents), suffisamment légitime (il ne doit pas être rejeté par ses collègues, ni mal vu par l'administration de son établissement) ; il doit gérer l'avancement du cours dans la classe, quitte à tricher ; il doit à la fois s'intéresser aux élèves individuels et gérer la classe, etc. "

Cette vision de l'enseignant de mathématiques comme un professionnel qui doit être capable de gérer différents problèmes, de les résoudre, d'élaborer ses propres stratégies est donc, en réalité, assez proche du modèle de l'enseignant professionnel qui prédomine aujourd'hui dans de nombreuses recherches sur l'enseignant hors du champ didactique.

Un second type de questionnement, assez proche de ceux décrits dans le paragraphe précédent, est relatif à l'étude des "compétences professionnelles" d'un enseignant de mathématiques qui passe, par exemple, par l'analyse des gestes professionnels dans des travaux issus de la théorie anthropologique du didactique ou par celle des pratiques enseignantes dans des travaux menés autour d'A.Robert. Ces dernières recherches ont, en particulier, contribué au repérage de la complexité de ces pratiques décrite ci-dessous par A.Robert (A.Robert, 1999) :

---

[4] Nous reviendrons plus longuement sur cette notion au cours de notre travail, mais nous précisons rapidement ici qu'une praxéologie est constituée de quatre éléments : un type de tâches T, une technique qui permet de réaliser les tâches de T, une technologie qui justifie et explique cette technique et une théorie sur laquelle se base la technologie.

[5] Selon cette approche, la tâche est le but à atteindre sous certaines conditions et l'activité est ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche.

[6] A.Robert désigne par ce terme l'ensemble des activités de l'enseignant qui aboutissent à ce qu'il met en œuvre en classe et à ses activités en classe.

"[...] Les pratiques enseignantes sont des pratiques complexes, non réductibles à des unités séparées (comme la préparation, ou le déroulement), non décomposables en mises en fonctionnement de connaissances isolées, disciplinaires, didactiques, pédagogiques, etc., car des recompositions de tous ordres s'opèrent constamment. Par exemple, si la préparation d'une séance influence grandement son déroulement, il s'ajoute toujours en classe des éléments non prévisibles, qui d'ailleurs pourront à leur tour influencer les séances suivantes."

Ces recherches, notamment celle d'E.Roditi (Roditi, 2001) sur les pratiques d'enseignants lors de l'enseignement de la multiplication des décimaux en classe de sixième, ont également permis d'approcher le fait que les pratiques professionnelles s'organisent en systèmes qui paraissent stables et cohérents. Dans sa thèse à l'intérieur de laquelle elle étudie les pratiques de professeurs des écoles lors de leur première année d'exercice, P.Masselot (Masselot, 2000) montre, en particulier, que cette cohérence semble s'établir assez vite chez certains enseignants débutants, mais que, dans certains cas, les pratiques professionnelles peuvent être déstabilisées ou modifiées par des changements d'environnement scolaire.

Par ailleurs, il semble que ces pratiques articulent diverses logiques : une logique institutionnelle et sociale qui prend en compte, par exemple, les attentes de l'institution ou des parents, une logique cognitive relative au contenu en jeu et à des connaissances sur l'apprentissage des élèves, une logique de médiations concernant les accompagnements que l'enseignant va mettre en place dans sa classe et, bien évidemment, une logique plus personnelle qui dépend de l'histoire, de l'expérience ou des conceptions de l'enseignant. Il en résulte une grande diversité dans les types de savoirs qui sont susceptibles d'outiller la professionnalité enseignante. Nous retrouvons donc à nouveau une proximité évidente avec des travaux menés hors du cadre didactique.

Parallèlement à ce questionnement sur la nature des pratiques, une réflexion sur la formation professionnelle des enseignants s'est également développée. Un premier type de questionnement, mené notamment par A.Robert, est relatif aux changements de pratiques qui s'opèrent lors du passage du statut d'étudiant à celui d'enseignant. Le changement de rapport aux mathématiques est, ainsi, clairement identifié ; l'activité mathématique des enseignants est différente de celle des étudiants dans le sens où leurs connaissances mathématiques ne doivent pas seulement être disponibles pour la résolution de problèmes, mais aussi, par exemple, pour la conception d'un texte du savoir et pour l'animation mathématique d'une séance. Le changement de statut nécessite également l'introduction d'une dimension sociale dans la mesure où la pratique d'un enseignant n'est pas destinée à lui seul, mais qu'elle est partagée avec les élèves. Enfin, il s'accompagne aussi d'un changement de rapport au temps puisque le déroulement en temps réel devient une variable essentielle.

Un deuxième type de questionnement vise, quant à lui, une certaine connaissance des processus de formation des pratiques professionnelles. Les recherches sur leur nature conduisent à considérer que ces pratiques se forment à travers l'articulation de savoirs théoriques (savoirs mathématiques, savoirs d'ordre pédagogique ou didactique) et de savoirs d'expérience, mais la constitution des pratiques reste encore obscure, comme le souligne A.Robert (Robert, 1996) :

" Ainsi, pour nous les mises en actes dans les situations particulières visées par la formation ne résultent pas seulement d'acquisition théoriques, ni seulement de stages pratiques, mais proviennent [...] d'une recomposition individuelle, intime, privée, d'éléments théoriques et pratiques. [...] Nous ne savons pas bien comment s'acquièrent des compétences pratiques, ni comment se fait la recomposition évoquée ci-dessus, ni même comment l'accélérer, la faciliter, l'améliorer. "

Aujourd'hui, les questions relatives à la constitution des savoirs professionnels d'un enseignant de mathématiques restent donc largement ouvertes, en particulier celle concernant le rôle joué par l'expérience dans la formation des compétences professionnelles. Par ailleurs, comme dans les travaux hors du champ didactique, il parait clair que la formation des enseignants de mathématiques ne peut se limiter à une formation théorique et qu'elle doit prendre appui sur l'expérience des stagiaires. Mais l'articulation des savoirs "théoriques" et de ceux plus "pratiques" reste également problématique, comme l'explique A.Robert (Robert, 1996) :

"Ainsi se pose pour nous le problème de cette articulation des apports théoriques et de ceux du terrain, avec trois sous-questions clefs : comment se font les recompositions des deux types d'apports, y a-t-il un ordre privilégié, au moins au début des formations (pratique puis théorique ou l'inverse), y a-t-il des seuils de l'un ou l'autre type d'activités qui assurent les généralisations escomptées, les appropriations individuelles réelles, les transferts à toutes les situations possibles ? "

L'analyse de ces différentes recherches en didactique des mathématiques met donc en évidence une proximité avec les travaux que nous avons présentés dans le premier paragraphe de ce chapitre, aussi bien en ce qui concerne les résultats ou les hypothèses retenus qu'en ce qui concerne l'expression de questions encore ouvertes.

Cette étude de travaux relatifs à la professionnalité enseignante dans et hors du champ didactique nous a amenée à affiner nos questions initiales, comme nous allons le préciser dans le paragraphe suivant.

III - PROBLEMATIQUE :

Ce qui ressort des travaux menés, qu'ils se situent dans le champ des sciences de l'éducation, de l'ergonomie ou de la didactique des mathématiques, c'est la complexité des questions relatives à la professionnalité enseignante, la diversité des types de savoirs qui sont susceptibles d'outiller cette professionnalité, la difficulté que l'on éprouve à cerner les rapports existants entre des savoirs que l'on pourrait qualifier de théoriques et des savoirs plus pratiques, la connaissance très limitée que l'on a des processus par lesquels se constituent les compétences professionnelles qui se manifestent dans l'action de l'enseignant ou sa réflexion sur ses pratiques, les rôles que peuvent jouer dans cette constitution l'expérience et la formation.

Ces recherches montrent ainsi les limites évidentes d'une formation qui se voudrait basée sur la transmission des savoirs existants en vue de leur application à la pratique et, en sens inverse, les limites d'une expérience ou même d'une réflexion sur les pratiques que n'outillerait aucun savoir spécifique. Elles amènent à penser que la formation, si elle se veut efficace, doit prendre appui sur l'expérience, sur les questions que cette expérience peut susciter, et s'interroger sur les façons d'outiller le plus efficacement possible la réflexion sur ces questions par des savoirs constitués.

Penser la formation initiale dans ces termes ne peut se faire sans s'interroger sur les questions que l'expérience peut susciter chez les enseignants débutants que sont les PLC2, sur celles qui demeureront largement inaccessibles. Il est aussi essentiel de comprendre quelles réponses ils sont tentés d'apporter à ces questions, quelle réflexion sur leur pratique ils sont susceptibles de développer, quels savoirs, quelles compétences ils sont susceptibles de construire à travers l'expérience. La question se pose enfin de savoir quels rapports peuvent entretenir ces savoirs avec les savoirs construits par la recherche, notamment les savoirs didactiques.

Ces questions sont aujourd'hui des questions ouvertes. Pour contribuer à leur étude, dans cette recherche, nous avons choisi de tenter de cerner comment se construit un rapport professionnel à l'algèbre chez des enseignants stagiaires de mathématiques.

Ce choix du domaine de l'algèbre a été motivé par plusieurs raisons :

- c'est un domaine où, pour un certain nombre d'élèves, débute l'échec en mathématiques, les mathématiques cessant brutalement de prendre sens, et il est donc à ce titre crucial.

- C'est un domaine qui concerne l'ensemble de nos professeurs stagiaires : il est officiellement au cœur de l'enseignement à partir de la quatrième mais, dès la sixième, l'entrée dans l'algèbre est préparée par un ensemble d'activités relevant du pré-algébrique.

- C'est un domaine qui semble a priori facile aux étudiants. Ils se sont habitués depuis longtemps à penser algébriquement, ils maîtrisent les techniques algébriques en jeu dans l'enseignement secondaire. Comprendre les difficultés des élèves nécessite pour eux une véritable reconstruction, sans nécessiter pour autant de connaissances mathématiques nouvelles. La position d'étudiant et celle d'enseignant se démarquent donc plus visiblement dans les besoins en connaissances. La situation serait toute autre si l'on choisissait la géométrie plane ou plus encore dans l'espace, les statistiques ou les probabilités.

- C'est un domaine qui a donné lieu à de très nombreuses recherches didactiques et pour lequel l'effort de capitalisation des acquis est important. On connaît assez bien aujourd'hui les difficultés qui jalonnent l'avancée dans le champ de l'algèbre élémentaire ainsi que les dysfonctionnements de l'enseignement. On dispose de différentes ressources d'ingénierie didactique, mais l'exploitation de ces ressources par un enseignant standard et plus encore par un enseignant débutant, on le sait, ne va pas de soi.

Dans notre recherche, nous nous proposons alors d'étudier les questions clés suivantes : comment se construit et évolue la vision des enjeux de cet enseignement chez des professeurs stagiaires de mathématiques ? Comment se construit et évolue leur vision des élèves, de leurs difficultés, des obstacles qu'ils doivent surmonter ? Comment élaborent-ils des stratégies d'enseignement et quelles sont leurs priorités dans cette élaboration ? Comment analysent-ils leurs pratiques, les difficultés éventuelles qu'ils rencontrent, les décalages entre leurs attentes et la réalité de la classe ?

Les réponses à ces questions ne sont sans doute pas simples, même si nous faisons l'hypothèse qu'il existe des cohérences, des régularités ou au moins des tendances dans les constructions et les évolutions. Par ailleurs, ces évolutions ne sont sans doute pas homogènes dans les différents gestes professionnels et sont, sans doute, parfois assez ténues. Un des objectifs de cette thèse est de mieux comprendre, si cela est possible, les raisons de ces évolutions en analysant le rôle joué par l'action ou par la réflexion sur l'action, en mesurant l'influence de la formation en didactique de l'algèbre dispensée à l'IUFM qui est, nous en faisons l'hypothèse, sans doute assez faible compte tenu des caractéristiques de cette formation, en étudiant enfin le rôle joué par des incidents critiques ou certains phénomènes de résonances[7] (Comiti, Grenier, 1995).

Ces évolutions ne peuvent être recherchées sans prendre en compte la diversité des gestes à travers lesquels s'exerce la professionnalité enseignante, en classe comme hors de la classe. Ceci induit donc des contraintes méthodologiques : la nécessité d'un travail dans la durée et d'un recueil de diverses données permettant d'appréhender les gestes professionnels dans leur diversité.

[7] Le phénomène "résonance d'une intervention d'élève" caractérise l'effet de perturbation d'une intervention ou d'une non-intervention d'élève sur le projet du professeur. Certaines interventions d'élèves ont une résonance forte avec le projet du professeur : elles sont immédiatement prise en charge par l'enseignant et induisent des changements par rapport au projet prévu initialement. D'autres ne sont pas prises en compte, leur résonance est alors nulle.

CHAPITRE 2

GRILLE D'ANALYSE DE LA COMPETENCE PROFESSIONNELLE EN ALGEBRE

Dans le chapitre précédent, en nous appuyant sur un certain nombre de travaux de recherche, nous avons mis en évidence la complexité des questions relatives à la définition des savoirs professionnels, à l'articulation entre des savoirs théoriques et des compétences qui se manifestent dans l'action. Nous avons aussi souligné l'accord qui semble général pour reconnaître les limites des connaissances acquises jusqu'ici sur les processus qui gouvernent la formation de ces compétences, en ce qui concerne la professionnalité enseignante. Nous avons également introduit notre intention de contribuer, dans cette thèse, à éclairer ces questions, en nous centrant sur un domaine mathématique précis : l'algèbre élémentaire, un domaine qui a fait l'objet de nombreux travaux tant sur le plan épistémologique, cognitif que didactique, et pour lequel il est donc possible d'identifier des savoirs susceptibles d'outiller la professionnalité enseignante. Dans ce chapitre, nous allons pointer un certain nombre de ces savoirs. Nous ne cherchons en aucune manière l'exhaustivité. Nous cherchons avant tout à construire un instrument méthodologique adapté à l'objet de notre recherche, un instrument qui nous aide à opérationnaliser, dans ce domaine précis de l'algèbre élémentaire, l'étude que nous nous proposons de réaliser de l'évolution du rapport à l'algèbre d'enseignants débutants, dans la transition entre une position d'étudiant et une position d'enseignant. En nous inspirant de la structure d'analyse multidimensionnelle élaborée par B.Grugeon (Grugeon, 1995) pour étudier les rapports institutionnels et les rapports personnels d'élèves à l'algèbre, nous avons construit cet instrument qui a pour nous le statut d'une grille de repérage et est constitué d'un certain nombre de points que les connaissances acquises nous font repérer comme des points a priori sensibles. Ces derniers doivent nous permettre de disposer de jalons pour analyser, dans la durée, une évolution qui ne sera pas, nous en faisons l'hypothèse, homogène suivant toutes les dimensions, ne se manifestera pas également dans les différents gestes professionnels, dans l'anticipation, dans l'action ou dans la réflexion a posteriori et qui sera souvent ténue. Il s'agira aussi d'essayer d'identifier les facteurs déclenchants ou les résonances qui favorisent ces évolutions et d'essayer d'en tirer des conséquences en termes de formation.

Nous organisons ce chapitre en trois parties principales, séparant artificiellement mais pour une meilleure opérationnalité de l'instrument d'analyse, des savoirs que nous qualifions d'épistémologiques, de cognitifs et de didactiques[8], suivant que nous privilégions une entrée par le savoir mathématique lui-même, par l'élève, ou une vision plus globale du système didactique.

---

[8] Le caractère multidimensionnel des savoirs professionnels des enseignants est apparu dans différents travaux au cours de la dernière décennie, comme dans ceux de L.S.Shulman qui élabore en 1987 une liste de sept savoirs professionnels (Shulman, 1987) : "content knowledge", "general pedagogical knowledge", "curriculum knowledge", "pedagogical content knowledge", "kowledge of learners", "knowledge of educational contexts", "knowledge of educational purposes end values".

I - DIMENSION EPISTEMOLOGIQUE :

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, il ne s'agit pas dans cette partie de dresser un panorama des connaissances existantes à propos de l'épistémologie de l'algèbre, mais d'identifier quelques points a priori sensibles et, pour chacun de ces points, un ensemble limité de savoirs susceptibles d'outiller aujourd'hui la professionnalité enseignante en algèbre. Ces identifications doivent pouvoir nous guider, en tant que chercheur, dans le repérage d'éventuelles évolutions de rapports. Comme tout instrument de ce type, elles constituent nécessairement un filtre qui va attirer notre attention sur certaines évolutions ou absences d'évolutions et en minimiser, voire en occulter d'autres. Les choix faits ne sont donc en rien neutres, ils sont constitutifs de la réalité que nous reconstruisons pour l'étudier. Nous les avons faits, en prenant notamment en compte le sous-champ de l'algèbre ici en jeu : l'algèbre élémentaire de l'enseignement secondaire et les hypothèses que nous pouvons faire sur l'épistémologie de l'algèbre des enseignants débutants, compte tenu de leur histoire avec ce domaine. C'est pour cette raison que nous nous centrons sur trois points :

- la nature du travail algébrique et les frontières de l'algèbre,
- le symbolisme algébrique,
- les rapports entre les dimensions outil et objet de l'algèbre.

I.1 - La nature du travail algébrique et les frontières de l'algèbre :

Les professeurs stagiaires qui sortent de l'université ont baigné pendant plusieurs années dans une algèbre structurale. C'est cette algèbre qui représente sans doute pour eux l'Algèbre et les pratiques associées qui permettent d'identifier un travail algébrique. Il n'est pas sûr qu'en particulier s'ils exercent au collège, ils se sentent responsables de l'initiation des élèves à un travail, à une pensée algébriques, et ceci d'autant plus que le mot "algèbre" a disparu des textes des programmes du collège. De plus, s'ils ont fait beaucoup d'algèbre, ils n'ont sans doute pas pour autant rencontré la nécessité de s'interroger sur la nature du travail algébrique, sur les frontières de cette discipline. Or cette interrogation nous semble d'autant plus s'imposer à une réflexion sur les pratiques enseignantes que ce domaine d'une part tend à une certaine déliquescence, comme le montrent par exemple, les analyses de Chevallard (1985) et Mercier (1995) que, d'autre part, de nombreuses recherches mettent en évidence l'importance dans l'apprentissage de l'algèbre de ce qui relève d'un travail qualifié pour certains de pré-algébrique, pour d'autres d'early algebra[9]. C'est ce qui nous a conduit à privilégier cette question dans la dimension épistémologique.

Cette question est bien moins simple que l'on pourrait à première vue le penser. Comme le soulignait l'épistémologue A. Bernard dans une communication sur ce thème en 2000[10], elle peut trouver différentes réponses suivant les critères utilisés pour décider si un texte mathématique relève ou non de l'algèbre. Il est bien connu qu'historiquement, l'origine

---

[9] L'identification de cette algèbre précoce comme un des thèmes spécifiques de réflexion dans l'étude en cours organisée par ICMI (la commission internationale sur l'instruction mathématique) sur le futur de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre et le nombre de textes s'y référant dans les actes du colloque organisé à Melbourne en décembre 2001 dans le cadre de cette étude (Chick et al., 2001) le montrent clairement.

[10] Communication, non publiée, au colloque d'épistémologie "Logique, mathématiques, physique" co-organisé par l'IREM Paris 7, le CNRS, l'Institut Henri Poincaré, à Paris en décembre 2000.

de l'algèbre se situe dans l'analyse des équations. Si l'on considère que l'algèbre commence avec une théorie des équations formulée à l'aide d'un symbolisme adéquat, l'origine de ce domaine des mathématiques se situerait à la fin du XVI^e siècle avec les travaux de Viète, puis ceux de Descartes. Mais si l'on affaiblit ce critère, en ne retenant que le travail sur des objets : les équations, indépendamment de la disponibilité ou non du symbolisme algébrique, l'algèbre remonte alors à l'algèbre arabe, qui d'ailleurs a donné un nom à cette discipline, ce qui constitue en soi un autre critère. Si l'on retient juste comme critère le traitement de problèmes relevant des équations ou l'existence d'un calcul de nature algébrique réduisant par transformations successives l'inconnu au connu, sans qu'il porte nécessairement sur des nombres, sans que l'objet équation existe en tant que tel, sans symbolisme spécifique, alors il y a de l'algèbre dans les mathématiques babyloniennes et dans ce que l'on appelle souvent "l'algèbre géométrique" des grecs. Mais, à l'inverse, comme le souligne ce même auteur, on peut tout aussi légitimement a priori réserver la dénomination d'algèbre au cas où l'on se trouve en présence de structures algébriques pleinement développées : groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels...

Ce qui nous semble intéressant dans cette réflexion épistémologique pour outiller la professionnalité enseignante, c'est l'interrogation qu'elle porte, sans vouloir y apporter une réponse décisive, sur les frontières de l'algèbre et, à travers cela, sur la nature du travail algébrique. A travers cette interrogation laissée ouverte se brise le mythe des frontières nettes, et peuvent se reconnaître comme prémices au travail algébrique, sinon travail algébrique à part entière, un ensemble d'activités qui, dès le début du collège, présentent certaines des caractéristiques du travail algébrique et vont progressivement l'outiller, conceptuellement et techniquement. Nous reviendrons sur ce point dans la partie relative à la dimension didactique.

I.2 - Le système symbolique de l'algèbre

Ce qui précède, montre bien, s'il en est besoin, l'importance que revêt nécessairement, dans une analyse de nature épistémologique de l'algèbre, la considération de sa dimension symbolique. De plus, comme en ce qui concerne la nature du travail algébrique, on peut faire l'hypothèse que le passé mathématique des enseignants débutants les outille assez peu pour une telle réflexion. Le système symbolique de l'algèbre élémentaire est pour eux un système symbolique complètement naturalisé (Chevallard, 1990) : son économie va de soi et les difficultés de son apprentissage se sont depuis longtemps estompées. La construction de la professionnalité enseignante dans ce domaine passe par une nécessaire dénaturalisation de ce que le vécu a naturalisé. C'est pourquoi nous avons choisi ce deuxième point sensible pour notre grille. Nous présentons ci-après des savoirs qui nous semblent susceptibles d'outiller cette dénaturalisation sur le plan épistémologique, en nous appuyant plus particulièrement sur la thèse de M. Serfati (1997) consacrée justement à la naissance de l'écriture symbolique, mais nous serons amenée à revenir sur ces questions dans la partie consacrée à la dimension cognitive.

Traditionnellement lorsqu'il s'agit d'évoquer la mise en place du système symbolique de l'algèbre, on reprend dans les travaux didactiques la classification de Nesselmann (1842) qui distingue dans le développement de l'algèbre trois niveaux distincts : l'algèbre rhétorique, l'algèbre syncopée et l'algèbre symbolique. Ces trois niveaux sont décrits de la manière suivante :

- *l'algèbre rhétorique* : à ce niveau, les calculs sont uniquement et entièrement exprimés en langage naturel avec une absence de symbolisation. De nombreux exemples de résolution algébrique appartiennent à cette période, notamment les travaux des babyloniens, de certains grecs, des arabes et des premiers algébristes italiens.

- *L'algèbre syncopée* : à ce niveau, l'énoncé est encore de nature rhétorique mais utilise des abréviations pour des concepts ou des mots qui apparaissent fréquemment, mais il n'y a pas de traitement opératoire de ces écritures. On considère classiquement que cette période commence avec Diophante qui introduisit une lettre pour désigner la quantité inconnue à déterminer.

- *L'algèbre symbolique :* à ce niveau, une langue est entièrement constituée. Elle est indépendante de l'expression orale et rend inutile tout discours rhétorique. Viète est classiquement considéré comme étant à l'origine de cette écriture.

En fait, M.Serfati montre dans sa thèse que cette classification conduit à des anachronismes et que le développement de l'écriture symbolique est bien plus complexe que ne le laisse supposer cette classification, le terme "nesselmannien" d'algèbre syncopée, notamment, "venant recouvrir indistinctement un foisonnement de situations symboliques diverses du moyen âge au début du XVII^e^ siècle, de Diophante à Stiefel, Viète, Wallis ou Leibniz". Nous ne dresserons pas ici un exposé des différentes étapes dans la constitution du système symbolique de l'algèbre qu'il met en évidence dans sa recherche, mais nous retiendrons en priorité :

- que les premières représentations symboliques apparaissent chez Diophante avec l'introduction de lettres pour désigner l'inconnue, les puissances de cette inconnue ou pour la soustraction ;

- qu'aucune réelle modification dans la structure de la représentation n'a lieu ensuite avant le XVI^e^ siècle :

> " Durant tout le moyen âge en effet, les mathématiques de la logistique continuèrent d'être écrites, soit de façon presque entièrement rhétorique, comme chez Léonard de Pise ou Luca di Borgo, soit par une ébauche d'écriture symbolique qui prolongeait aux nombres "en général" les techniques (et aussi les insuffisances) des représentations diophantiennes pour les nombres entiers. Aucun système de représentation ne fut publié à cette époque qui s'imposât à la communauté des calculateurs (ce ne fut chose faite qu'à la fin du XVII^e^ siècle), et cette situation se prolongea durant la période médiévale et une partie de la Renaissance. A la fin du XV^e^ siècle avec l'introduction de l'imprimé, les représentations de l'inconnue, de son carré, de l'addition, etc..., dans le droit-fil des techniques diophantiennes, devinrent usuelles chez les calculateurs, tout en demeurant le plus souvent singulières, valides dans l'œuvre d'un seul auteur." (p. 11);

- que la véritable rupture avec les écritures rhétoriques a lieu entre la fin du XVI^e^ siècle et le milieu du XVII^e^ siècle. L'évolution est alors rapide et les traits constitutifs du symbolisme moderne (représentation des données, de l'égalité, des opérations, représentation non hétérogène de l'inconnue et ses puissances, parenthésage...) se mettent en place en l'espace d'un demi-siècle :

> " Avec plus de précision, on distingue le moment historique de la fracture entre 1591 (l'*Isagoge* de Viète), et 1637 (la *Géométrie*[11] de Descartes). Après 1637, certes le texte se modifie et se perfectionne, mais il a

[11] L'étude de M.Serfati montre qu'il s'agit du premier texte mathématique qui soit aujourd'hui directement lisible.

définitivement acquis les traits constitutifs de sa forme actuelle, autorisant ainsi les développements et les raffinements de l'écriture mathématique contemporaine. [...] Ainsi, de Viète à Descartes, l'écriture symbolique s'est-elle définitivement constituée, revêtant les principaux aspects de sa structure actuelle. A la fin du XVII^{e} siècle, elle était devenue chose commune dans la communauté des géomètres. " (p. 4)

Il s'est donc écoulé environ treize siècles entre l'apparition de ce que l'on pourrait considérer comme les prémisses du système symbolique de l'algèbre et la mise en place d'un système relativement proche de celui utilisé de nos jours. Ce symbolisme, lorsqu'il est enfin disponible, ouvre la porte à des avancées spectaculaires, qui auraient été impensables sans lui. Sans l'écriture symbolique, la résolution de problèmes de calcul serait en effet devenue rapidement impraticable, en particulier parce que, comme le pointe M. Serfati :

> " La succession d'un nombre d'instructions dont le niveau d'imbrication dépasse trois ou quatre (nombre tout à fait réduit si on le rapporte au plus modeste des calculs du XVII^{e} siècle, cartésien par exemple) ne se laisse pas rhétoriquement décrire de façon simple. Dans l'écriture symbolique au contraire, le contenu de chaque résultat partiel se lit très simplement, à partir de la concaténation de signes obtenue en adjoignant des parenthèses à l'assemblage initial. Chaque résultat partiel se distingue ainsi simplement des autres." (p. 78)

Les enseignants débutants méconnaissent sans doute, pour beaucoup d'entre eux, la lenteur de ce développement, les étapes clefs de l'évolution et ce que ceci implique pour l'enseignement lui-même, notamment en ce qui concerne l'entrée dans le symbolisme algébrique. S'ils sont sans aucun doute convaincus de la puissance du symbolisme algébrique, on peut faire l'hypothèse qu'ils sont enclins à penser que cette puissance va facilement s'imposer car d'une part ils sous-estiment le coût cognitif de l'entrée dans le symbolisme algébrique, d'autre part ils ne sont pas conscients de la faible nécessité de recours au symbolique qu'induit la complexité rhétorique limitée des résolutions de problèmes qui marquent cette entrée. Il y a, pour ces raisons, au moment de l'entrée scolaire dans le symbolisme algébrique une dimension culturelle irréductible, renforcée par le temps réduit qui lui est officiellement consacré et un risque didactique évident que cette entrée, trop peu problématisée, trop hâtivement menée, ne dérive vers un fonctionnement sous les seules exigences du contrat didactique. Nous reviendrons sur ce point dans la partie didactique de ce chapitre.

I.3 - L'algèbre dans ses deux dimensions "outil" et "objet" :

Le troisième et dernier point sensible que nous retenons dans cette dimension épistémologique est celui lié à la dualité outil / objet de l'algèbre. Nous empruntons cette distinction à R.Douady (Douady, 1986) qui définit la dualité outil/ objet dans ces termes :

> " Ainsi, nous disons qu'un concept est *outil* lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en fait pour résoudre un problème. [...] Par *objet*, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. "

Cette distinction permet de structurer le savoir algébrique autour de deux dimensions, non indépendantes : une dimension "outil" où l'algèbre est considérée comme un outil de résolution de problèmes de natures diverses, internes ou externes aux mathématiques, et une dimension "objet" où l'algèbre est considérée comme un ensemble structuré d'objets dotés de propriétés, de modes de représentations et de modes de traitements.

Dans la scolarité obligatoire que nous considérons ici, cette dimension outil recouvre en fait les fonctionnalités suivantes : un outil de résolution de problèmes d'ordre numérique, un outil de théorisation du numérique (pour prouver des propriétés sur les nombres), un outil de résolution de problèmes géométriques (géométrie analytique, géométrie de la mesure), un outil de généralisation et de preuve, un outil indispensable à l'étude des fonctions et au développement de l'analyse, un outil de modélisation de systèmes externes aux mathématiques (situations technologiques, physiques, économiques...). Relativement à la dimension objet, l'algèbre est un domaine où apparaissent de nouveaux nombres (nombres négatifs, nombres complexes par exemple), des lettres avec des statuts différents (inconnues, indéterminées, variables, paramètres), des objets nouveaux (équations, inéquations, formules, fonctions) et enfin des structures (groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels...) qui ne sont pas explicitement abordées dans l'enseignement secondaire actuel.

Comme l'a montré R. Douady, mais aussi les nombreux travaux didactiques qui se sont appuyés sur cette distinction, il existe une permanente tension dans l'enseignement entre ces deux dimensions et les chronologies didactiques renversent le plus souvent l'ordre historique. Si le plus souvent, en effet, les objets émergent historiquement d'outils implicites puis explicites, dans l'enseignement, c'est le processus inverse qui est à l'œuvre : introduction d'objets appelés à prendre seulement ensuite le statut d'outil. L'algèbre est, de plus, un domaine où les tensions sont particulièrement vives. A un enseignement qui, dans ses débuts, donnait largement la priorité à la maîtrise des objets et techniques de base (calcul littéral, résolution d'équations...) pour constituer l'algèbre en un langage symbolique au service des mathématiques et des autres disciplines, on a, officiellement, voulu substituer un régime de fonctionnement plus équilibré, donnant plus de place et une certaine priorité chronologique à la dimension outil, via des activités de modélisation. Différentes recherches didactiques montrent que ceci est loin d'aller de soi. L'enseignement peine à donner une réelle dimension aux activités de modélisation, bute à faire émerger l'algèbre comme outil, notamment pour les raisons explicitées dans le paragraphe précédent ; quant au travail sur les objets et au travail technique, en perte de légitimité, il a de plus en plus de mal à se déployer efficacement.

De plus, la structuration de l'activité algébrique autour de ces deux dimensions et de leurs interactions dialectiques nous semble pouvoir outiller efficacement la réflexion nécessaire sur les fonctionnalités de l'algèbre, en évitant de réduire cette dernière à une arithmétique généralisée (Gascon, 1994) et en prenant notamment en compte ses fonctionnalités d'outil de généralisation et de preuve. Dans un contexte culturel où l'apprentissage de la rationalité est essentiellement enfermé dans la géométrie synthétique, ceci non plus ne va pas de soi et nous y reviendrons dans les parties cognitive et didactique.

C'est pour l'ensemble de ces raisons que nous avons choisi de privilégier ce troisième point dans notre grille d'analyse.

II - DIMENSION COGNITIVE :

Dans cette composante, notre perspective est similaire, mais le point d'entrée privilégié est cette fois l'élève et les savoirs visés sont ceux relatifs à l'apprentissage de l'algèbre par les élèves. Etant donné le nombre de travaux qui ont été consacrés à ces questions (cf. par exemple (Bednarz, Kieran & Lee, 1996), (Kieran, 1992) pour des synthèses) et étant donné la diversité des approches coexistantes, il est difficile de synthétiser les savoirs construits par la recherche dans ce domaine. Encore une fois, nous ne chercherons pas une quelconque exhaustivité, mais nous identifierons quelques points sensibles qui nous semblent aujourd'hui être des points de consensus dans cette diversité et peuvent se révéler de bons indicateurs de l'évolution des rapports que nous souhaitons étudier.

C'est pourquoi nous avons choisi les trois dimensions suivantes :

- la rupture arithmétique / algèbre,

- le symbolisme algébrique,

- le rôle de l'algèbre dans la construction de la rationalité mathématique.

II.1 - La rupture arithmétique / algèbre :

L'enseignement, on le sait, n'est pas spontanément sensible aux discontinuités, ruptures et reconstructions qui accompagnent nécessairement les apprentissages (Artigue, 1998). On peut donc faire raisonnablement l'hypothèse que les enseignants débutants ne sont pas d'emblée sensibles à ces reconstructions et à la nécessité pour eux de les prendre en charge dans leur enseignement, qu'ils ne les intègrent pas non plus spontanément dans les systèmes explicatifs qu'ils se constituent pour rendre compte du fonctionnement des élèves. Or l'importance des discontinuités liées à la transition arithmétique / algèbre, les erreurs et difficultés résistantes qu'elles induisent chez beaucoup d'élèves, ont fait l'objet d'une attention toute particulière dans les travaux de recherche sur l'apprentissage de l'algèbre. Les savoirs construits dans ce domaine sont particulièrement cohérents et consistants et semblent pouvoir outiller efficacement la professionnalité enseignante. C'est pour cette raison que la rupture arithmétique / algèbre est le premier point sensible que nous avons sélectionné. Nous en rappelons ci-après les principales caractéristiques.

A l'école primaire et au début du collège, les élèves travaillent dans le numérique, puis l'algèbre est introduite et son apprentissage se construit visiblement en s'appuyant sur les connaissances numériques anciennes des élèves. Mais l'entrée dans le monde de l'algèbre est synonyme d'échec pour certains élèves qui, pourtant, n'avaient pas rencontré jusqu'alors de difficultés particulières. Ce constat a amené de nombreux chercheurs à s'interroger sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Ces recherches ont mis en évidence que la pensée algébrique se construit certes sur le support de la pensée arithmétique mais aussi en rupture avec elle. Il existe entre les deux domaines, à la fois des discontinuités évidentes mais aussi de fausses continuités qui peuvent être particulièrement pernicieuses pour l'apprentissage. Les continuités apparentes se manifestent notamment au niveau symbolique. Arithmétique et algèbre partagent en effet un certain nombre de symboles, mais ne leur donnent pas nécessairement le même statut. Nous synthétisons les savoirs dans ce domaine dans la partie II.1.1. Les discontinuités, quant à elles, sont notamment liées à des différences dans les modes d'appréhension des objets et des démarches de résolution de problèmes. Nous y consacrons la partie II.1.2.

II.1.1 - De "fausses continuités" :

Nous retenons ici deux indicateurs privilégiés pour ces fausses continuités : le statut de l'égalité et le statut des lettres.

II.1.1.1 - L'égalité :

Le signe d'égalité vit avec des statuts différents en arithmétique et en algèbre. Dans la résolution arithmétique de problèmes, familière aux élèves quand débute l'enseignement de l'algèbre, il vit comme un signe indiquant la nécessité d'effectuer une certaine opération et d'en indiquer le résultat, comme 12 + 16 = 28 (12 plus 16 donnent 28), alors qu'en algèbre une grande partie des tâches repose sur la substitution d'expressions par des expressions équivalentes. C'est le cas, par exemple, dans la résolution des équations et dans la recherche d'identités. Le signe d'égalité vit alors davantage comme un signe d'équivalence. Bien sûr, l'égalité comme signe d'équivalence existe également à l'école primaire et au début du collège dans certaines activités numériques, notamment dans l'écriture de décompositions telles que $23 = 2 \times 10 + 3$, mais ces activités n'ont qu'un caractère marginal. Le passage à l'algèbre nécessite un basculement radical.

De nombreuses recherches ont porté sur l'étude de la signification de ce signe d'égalité pour les élèves. Ainsi, dès 1976, Behr, Erlawger et Nichols ont montré que la plupart des élèves de l'école primaire voient le signe d'égalité comme un signe d'effectuation d'opérations et que, lorsqu'ils sont confrontés à une décomposition telle que $9 = 4 + 5$, certains refusent de l'accepter, pensent que cette égalité est inversée et réécrivent $4 + 5 = 9$. Ils ont également mis en évidence les difficultés d'élèves à se représenter le signe d'égalité comme un signe d'équivalence dans des écritures numériques telles que $3 + 7 = 6 +4$.

Cette vision limitée du signe d'égalité persiste chez des élèves au début de l'enseignement de l'algèbre, comme le montrent Vergnaud (1987), Cortès (1992), Kieran (1991). Ceci peut constituer un véritable obstacle pour l'acquisition des nouvelles démarches algébriques. Ainsi les élèves qui se limitent à considérer le signe "=" comme un signe d'effectuation d'opérations peuvent éprouver des difficultés à donner du sens à des équations de la forme : $ax + b = cx + d$, et plus globalement au calcul algébrique.

II.1.1.2 - Les lettres :

Les lettres ont également un statut différent en arithmétique et en algèbre. En arithmétique, les lettres sont utilisées comme abréviations (12 m pour 12 motos) ou pour désigner les unités de mesure (12 m pour 12 mètres). L'entrée dans l'algèbre s'accompagne d'un changement de statut de la lettre. Les lettres sont appelées à représenter alors des nombres (12m signifie alors 12 fois le nombre m) et sont engagées comme telles dans les calculs. Ce changement de statut n'a rien d'évident pour les élèves : nombreux sont les élèves au collège qui interprètent les lettres comme des objets (par exemple l'expression 6a est interprétée comme six "a" ce qui est différent de 6 fois a). Notons que cette vision des lettres peut être renforcée par certains dispositifs pédagogiques tels que celui fréquemment utilisé pour faire comprendre que $2x + 3x = 5x$, où l'on suggère de penser à x comme à des pommes ou à d'autres objets.

Diverses recherches se sont centrées sur l'étude des conceptions de la lettre chez les élèves en algèbre et la classification hiérarchisée de Küchemmann (1981) distingue dans l'évolution des conceptions les six stades suivants :

- lettre non considérée : la lettre est ignorée,
- objet concret : la lettre est considérée comme une étiquette,
- lettre évaluée : à la lettre est assignée une valeur numérique,
- inconnue spécifique : la lettre désigne un nombre inconnu à rechercher,
- nombre généralisé : la lettre peut prendre plusieurs valeurs,

- variable : la lettre est utilisée dans un contexte fonctionnel.

Cette typologie a été particulièrement utilisée. Sans reprendre cette vision hiérarchisée, laquelle nous semble un peu trop simple pour rendre compte de la complexité des rapports à la lettre et des évolutions possibles qui mettent nécessairement en jeu les choix de l'enseignement, il nous semble important de distinguer d'une part les conceptions où la lettre n'a pas statut de nombre, suffisantes pour le travail arithmétique, d'autre part les conceptions où la lettre a statut de nombre (nombre généralisé, inconnue, variable) et est engagée à ce titre dans des calculs. Un premier pas dans cette évolution peut apparaître lié à la capacité à substituer des nombres à des lettres dans une formule pour effectuer ensuite un calcul numérique. Il nous semble enfin important de reconnaître que certains calculs simples du premier degré peuvent tout à fait cohabiter avec un statut objet de la lettre.

Le changement de statut de la lettre entre l'algèbre et l'arithmétique est loin d'être évident pour les élèves. La résistance de conceptions "objet" peut notamment constituer un obstacle important à l'entrée dans le symbolisme algébrique. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

II.1.2 - Des discontinuités :

Nous retenons ici deux points particuliers : l'appréhension des objets et les modes de résolution de problèmes.

II.1.2.1 - L'appréhension des objets :

Les modes d'appréhension des objets en arithmétique et en algèbre sont différents. Dans le travail en arithmétique élémentaire, en cohérence avec le statut de l'égalité précédemment évoqué, les chaînes de nombres et d'opérations ne sont pas considérées comme des objets mais comme des procédures visant à produire un résultat. En algèbre, les symboles écrits (par exemple a + b) peuvent aussi bien représenter une procédure (additionner a et b) qu'un résultat (somme de a et b) qui sera utilisé tel quel ou, par exemple, substitué à une autre lettre dans un calcul. Cette dualité, identifiée par les chercheurs en termes de dualité processus / objet (Sfard, 1991) ou via la notion de "procept" condensant sur l'expression algébrique ses deux interprétations possibles : processus et concept (Gray & Tall, 1991) permet d'expliquer des difficultés résistantes des élèves repérées très tôt par divers chercheurs. C'est le cas par exemple lorsque des élèves refusent d'accepter qu'une expression ayant statut de résultat conserve un signe opératoire et transforment par exemple x + 3 en 3x (difficulté dénommée *dilemme process-product* par Davis (1975), *acceptance of lack of closure* par Collis (1974)). C'est aussi le cas lorsqu'il s'agit d'expliquer les différences spectaculaires de réussite dans la résolution d'équations du type ax +b = c et d'équations du type ax +b = cx + d, mises en évidence dès 1984 par Filloy et Rojano qui introduisent, pour en rendre compte, le terme de *didactic cut*. Pour le premier type d'équations, une appréhension de type processus des expressions et une conception arithmétique de l'égalité suffisent à la réussite. Pour le second type, ce n'est plus le cas, c'est l'égalité de deux objets algébriques qu'il faut savoir gérer. Pour le premier type, les élèves peuvent utiliser des raisonnements de type arithmétique alors que pour le deuxième type un raisonnement de type algébrique est nécessaire. Ceci nous conduit en fait au deuxième point considéré : celui des démarches de résolution de problèmes.

II.1.2.2 - Les démarches de résolution de problèmes :

La rupture arithmétique / algèbre c'est aussi la rupture au niveau des démarches de résolution entre synthèse et analyse, au sens donné à ces termes par Pappus ; c'est l'entrée dans la démarche analytique au sens de Descartes. Les démarches de résolution de problèmes en arithmétique et en algèbre sont en effet fondamentalement différentes[12]. En arithmétique, on part de ce que l'on connaît et l'on avance vers ce que l'on cherche, en progressant dans le connu. Cette démarche relève de la synthèse. En revanche, en algèbre, des lettres étant choisies pour désigner les nombres cherchés, des relations sont établies entre le connu et l'inconnu, mis sur le même plan. Un traitement formel de ces relations mène ensuite au résultat cherché. Cette démarche relève de l'analyse et suppose un changement profond des modes de pensée.

En outre, lors d'une résolution arithmétique, les stratégies utilisées sont souvent attachées au contexte de la situation décrite par l'énoncé du problème. Ceci n'est plus le cas lors d'une résolution algébrique : la légitimité du traitement formel des relations produites s'appuie sur des règles de calcul algébrique qui n'ont plus forcément de sens par rapport au contexte initial du problème et les calculs sont alors contrôlés par le sens interne des écritures algébriques. Il faut donc accepter en algèbre un contrôle formel et non un contrôle par le sens du problème. C'est cette possibilité de s'affranchir du sens externe qui constitue une force essentielle de l'algèbre.

Nous faisons l'hypothèse que ces savoirs didactiques n'ont rien de spontané, mais que quiconque enseigne l'algèbre est confronté aux difficultés et erreurs qui ont été identifiées, questionné dans ses pratiques par leur résistance, génératrice d'incidents critiques (cf. chapitre 1). Il prend des décisions d'action, se forge des systèmes explicatifs, est appelé à les remanier. L'évolution du rapport à ces questions sous l'effet de la formation et de la pratique nous semble donc particulièrement intéressante à étudier dans la perspective qui est la nôtre.

II.2 - Le symbolisme algébrique :

Nous avons, dans la partie épistémologique, insisté sur l'importance que nous accordions au rapport au symbolisme algébrique, comme indicateur de la transition étudiée. Nous revenons sur ces questions, sous un angle cognitif cette fois, en nous interrogeant sur les savoirs construits, susceptibles d'outiller l'enseignant, en ce qui concerne les apprentissages des élèves dans ce domaine. Nous retiendrons plus particulièrement trois aspects non indépendants, qui contribuent à éclairer les difficultés rencontrées par les élèves aujourd'hui dans l'accès et la maîtrise du symbolisme algébrique, et donc à mieux apprécier les enjeux de l'enseignement et les responsabilités de l'enseignant dans son travail d'aide à l'étude (Chevallard, 1997) : la question du sens des écritures algébriques, les difficultés des élèves dans la formation et la manipulation des écritures algébriques, l'articulation entre le registre des écritures algébriques et les autres registres sémiotiques intervenant dans le travail en algèbre, au sens de (Duval, 1993).

[12] Nous nous référons ici plus particulièrement à un travail algébrique qui se traduit par l'établissement et la résolution d'équations. Les discontinuités sont moins fortes si l'on envisage une entrée dans l'algèbre par la généralisation de "patterns" numériques et géométriques comme c'est généralement le cas dans les enseignements précoces de l'algèbre (cf. la partie didactique).

Lorsqu'il s'agit d'expliquer les difficultés des élèves avec le symbolisme algébrique, le discours usuel tend à renvoyer un diagnostic de perte de sens, tant dans la formation, la manipulation que l'interprétation des écritures algébriques. Les savoirs issus des recherches dans ce domaine permettent sans aucun doute aujourd'hui de dépasser ce diagnostic radical et sommaire et d'outiller en conséquence l'action didactique. Mais, encore une fois, ils n'ont rien de spontané et, pour l'enseignant débutant, repérer une cohérence derrière des écrits apparemment insensés, des dérapages formels, n'a rien d'immédiat. En ce sens, l'évolution de l'appréhension de ces problèmes régulièrement rencontrés nous semble un indicateur particulièrement intéressant.

II.2.1 - Le sens des écritures algébriques :

De nombreux chercheurs se sont penchés sur la construction du sens des écritures algébriques. Nous avons déjà évoqué dans un paragraphe précédent les modélisations qui mettent l'accent sur une progression du sens, permettant de passer de conceptions de type processus à des conceptions qui organisent de façon flexible la dualité processus / objet. Nous insisterons plutôt ici sur des travaux qui, tels ceux de J.P. Drouhard (1992), de Nicaud (1994), et de Duval (1988 a), permettent de travailler la question du passage, nécessaire à la pensée algébrique, d'un sens assuré par le contexte des situations internes ou externes aux mathématiques (dont le symbolisme algébrique rend compte) à un sens plus interne.

Pour approcher la question du sens des écritures algébriques, ces auteurs reprennent la distinction que Frege a posée entre Sinn (sens) et Bedeutung (référence) et distinguent les notions de sens et de dénotation. Ainsi, "1+1" et "6:3" ont le même dénoté (le nombre 2), mais ces deux expressions numériques n'ont pas le même sens, ne nous apprennent pas la même chose sur le nombre qu'elles dénotent : la première nous le fait voir comme somme de deux nombres identiques, la seconde comme quotient de deux entiers. Les transformations d'écritures, à dénotation constante, jouent un rôle fondamental dans le travail algébrique, en permettant de mettre en évidence des propriétés des objets concernés utiles à l'avancée du travail qui n'étaient en rien immédiatement visibles. R.Duval l'explique clairement dans (Duval, 1998a) :

> " La distinction entre sens et référence est étroitement liée au principe de substitution essentiel dans toute démarche de calcul ou de déduction : deux expressions ayant même référence peuvent être remplacées l'une par l'autre, dans une phrase ou dans une formule, sans que la valeur de vérité change."

Et, en ce qui concerne la notion de sens, J.P.Drouhard (Drouhard, 1995) ajoute :

> " Le sens d'une écriture nous permet de savoir comment elle est faite, comment on peut la calculer ("mode de donation de l'objet") ; il nous permet également d'avoir des informations sur ce qu'on peut en faire (telle forme est factorisable, telle autre est développable, dans le cadre de la résolution d'une équation telle forme est préférable, etc.). "

Le calcul algébrique est un calcul qui joue donc de façon subtile sur sens et dénotation : la légitimité des substitutions repose sur la conservation de la dénotation, les choix de transformations sont pilotés par le sens dès que le calcul échappe à la routine. Mais les critères que se forgent les élèves pour mener les transformations nécessaires au calcul ne sont pas nécessairement ceux-là. En particulier, comme le souligne J.P.Drouhard, certains élèves en difficulté manipulent les expressions algébriques sans tenir compte de leur dénotation ; la question de la validation des transformations se pose juste pour eux en terme de conformité à des règles ou à des procédures, non en termes de valeur de vérité de l'écriture obtenue.

J.P.Drouhard pointe, dans le même temps, la tension à laquelle est soumise le travail algébrique. Au delà des premiers apprentissages, on ne peut s'y imposer un retour permanent au contrôle par la dénotation (Drouhard, 1992) :

" Les élèves doivent certes pouvoir donner, à chaque fois qu'ils le désirent, une dénotation, un sens, une interprétation[13] aux écritures qu'ils manipulent. Mais ce recours à la signification doit demeurer optionnel. L'algébriste compétent cesse à certains moments d'interpréter ces calculs, et c'est cette "suspension de la sémantique" qui fait précisément la force de l'algèbre. [...] Il faut donc que l'élève, certaines fois, puisse ne pas interpréter les écritures, et donc les considérer d'un point de vue purement syntaxique. "

Un tel point de vue syntaxique n'est bien sûr pas vide de sémantique, mais il renvoie à une sémantique interne : celle du sens des expressions étroitement lié à leurs caractéristiques syntaxiques. D'où la nécessité, soulignée par J.P.Drouhard, d'accorder une attention particulière à la compréhension de cette syntaxe, en distinguant règles mathématiques et conventions d'écritures et en prenant tout particulièrement en compte les implicites liés à l'écriture des expressions algébriques : implicite du signe x, de la constante multiplicative 1, règles et conventions de parenthésage, rôle du point multiplicatif, du trait de fraction...

II.2.2 - Les difficultés de formation et de traitement des écritures dans le registre des écritures algébriques :

Nous considérons ici les écritures algébriques comme des représentations sémiotiques au sens de R.Duval, c'est à dire (Duval, 1993) : " des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement ". Elles forment donc un registre de représentations qui permet trois activités cognitives : la formation d'une représentation identifiable, le traitement d'une représentation dans le registre où elle a été formée, la conversion d'une représentation en une autre représentation d'un autre registre. Nous allons tout d'abord nous intéresser aux savoirs construits à propos des difficultés liées aux deux premières activités cognitives : la formation et le traitement des représentations.

II.2.2.1 - Les difficultés de formation des écritures algébriques :

Différentes recherches se sont centrées sur l'étude et l'analyse de ces difficultés. On retrouve ici, largement documentées dans la littérature, des difficultés analogues à celles que nous avons déjà évoquées dans la partie consacrée à la rupture arithmétique / algèbre, comme celle consistant à assembler les expressions algébriques par concaténation, en gommant les signes opératoires. L.Booth (Booth, 1985) dénomme "assemblage additif" cette pratique et en donne des exemples variés. Les modes d'assemblage peuvent être divers, ainsi $n + 3$ pourra être selon les cas remplacé par $3n$ ou n^3.

Une autre grande catégorie de difficultés dans la formation des écritures algébriques est celle des difficultés liées au parenthésage. Dans sa thèse, B. Grugeon (Grugeon, 1995) en donne des exemples frappants, en analysant les réponses à un test diagnostic passé par des

[13] Une expression est interprétée dans un cadre donné par tout objet qui correspond à sa dénotation dans ce cadre. Ainsi, dans le cadre des fonctions de I, R dans I, R, l'expression x^2-1 a pour interprétation la fonction qui à x associe x^2-1.

élèves, ayant déjà un certain passé en algèbre puisque ce sont des élèves qui, venant de BEP, entrent dans une classe de première d'adaptation. Ceci la conduit à introduire, pour rendre compte globalement des pratiques de formation incorrectes des élèves, les trois catégories suivantes :

" - **Ecriture algébrique dans un système "sans parenthèses" :** ce type d'écriture indique une méconnaissance du rôle des parenthèses. Plusieurs règles sont concernées selon les classes d'exercices :

- *Dans les tâches de "reconnaissance" :*

- lecture de gauche à droite : les écritures sont "lues" de gauche à droite sans tenir compte des priorités opératoires

- sans ( ) : les écritures algébriques parenthésées ou non parenthésées sont interprétées de façon analogue[14] (par exemple, -9^2 et $(-9)^2$ ont même valeur),...

- *Dans les tâches de production :*

- sans ( ) : les écritures algébriques sont produites dans un système sans parenthèses (par exemple, les écritures algébriques $3 + x \times x + y$ et $(3 + x) \times (x + y)$ sont identiques),

- calcul de gauche à droite : les expressions sont calculées de gauche à droite (par exemple, $P = u + \frac{n}{2}.u$ avec $u = 150$ et $n = 6$ revient à faire le calcul $(150 + 3).150$).

- **Ecriture algébrique associée au premier degré :** plusieurs règles de formation conduisent à réécrire des expressions algébriques et à les modifier en expressions du premier degré.

- désassemblage : $ab \longrightarrow a + b$
- carré duplication : $a^2 \longrightarrow a + a$
- ^{n} glissement : $a^n \longrightarrow na$ pour n entier au moins égal à 2
- parfois, la confusion entre + et $\times$.

- **Ecriture algébrique en assemblage :** les deux règles de formation "assemblage final" ($a + b \longrightarrow ab$) et "regroupement assemblage" $a^n + a^p \longrightarrow a^{n+p}$ jouent un rôle analogue : obtenir une seule expression qui ne conserve pas de signe opératoire. "

II.2.2.2 - Les difficultés de manipulation des écritures algébriques :

Dans cette partie nous nous appuyons de nouveau sur le travail de B.Grugeon qui propose, en s'appuyant, outre le test diagnostic déjà cité, sur divers travaux dont ceux de J.P. Drouhard (1992), une classification de règles incorrectes de manipulation d'écritures algébriques. Elle distingue trois catégories principales : manipulation formelle opératoire incorrecte, manipulation formelle pseudo-opératoire, manipulation formelle opératoire qui sont caractérisées ainsi :

" - **Manipulation formelle opératoire incorrecte :** La manipulation formelle est incorrecte mais il semble que les rôles respectifs des signes opératoires + et $\times$, de l'exposant 2 sont correctement identifiés dans les réécritures.

Dans ce cas nous distinguons trois types de manipulation formelle, le troisième n'excluant pas les deux premiers :

[14] Note de l'auteur : "les interprétations peuvent être différentes selon le contexte, selon les élèves, priorité au carré ou au signe –".

- Les réécritures sont réalisées dans un système non parenthésé mais gardent la mémoire de calcul, des priorités opératoires et conduisent à un calcul correct. Nous qualifions la manipulation formelle d'opératoire incorrecte avec mémoire.

- Les réécritures sont réalisées dans un système non parenthésé mais ne gardent pas la mémoire de calcul, des priorités opératoires et conduisent à un calcul incorrect. Nous qualifions la manipulation formelle d'opératoire incorrecte sans mémoire.

- Le rôle des parenthèses semble correctement identifié, mais de nombreuses règles de transformations incorrectes sont utilisées (règles de fausse linéarité[15], règle de transposition multiplicative[16],...).

- **Manipulation formelle pseudo-opératoire :** le rôle de chacun des opérateurs exposant 1, × et + n'est pas stable et, régulièrement, l'opérateur exposant 2 peut être associé à la duplication ou au glissement du nombre en position d'exposant vers un nombre en position de coefficient. Les écritures algébriques sont fréquemment associées à des écritures du 1^er^ degré. Des règles de transformations, s'appuyant sur de telles règles de formation, peuvent être utilisées. C'est le cas des règles suivantes : règle de transposition additive[17], règle différence vers 1^er^ degré[18], règle carré glissement vers 1^er^ degré[19], réduction additive,...

- **Manipulation formelle non opératoire :** le calcul algébrique ne tient compte ni des blocs de calcul, ni des opérations. Par exemple, les termes sont regroupés indépendamment des opérations en jeu. "

II.2.3 - L'articulation entre divers registres sémiotiques :

Le travail algébrique nécessite la conversion de représentations symboliques du registre des écritures algébriques vers d'autres registres sémiotiques, notamment celui des écritures numériques, celui du langage naturel et celui des représentations graphiques. Dans cette partie, nous nous centrons sur cette activité cognitive qui joue un rôle important dans l'apprentissage des savoirs en algèbre. En effet, comme le souligne R.Duval (Duval, 1993), la coordination entre différents registres est importante pour le fonctionnement de la pensée humaine :

- les changements de registres permettent des traitements de représentations sémiotiques de façon plus économique et plus puissante,
- d'un registre à l'autre, ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu qui sont représentés,
- la conceptualisation implique une coordination de différents registres.

Mais la coordination de différents registres n'est pas naturelle et R.Duval (Duval, 1993) explique :

"On peut observer à tous les niveaux un **cloisonnement des registres de représentation** chez la très grande majorité des élèves. Ceux-ci ne reconnaissent pas le même objet à travers les représentations qui en sont données dans des systèmes sémiotiques différents : l'écriture algébrique d'une relation et sa

---

[15] Par exemple, l'expression $\sqrt{a^2 + b^2}$ est transformée en $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$.

[16] Par exemple, l'équation ax = b a pour solution x = b/(-a).

[17] Par exemple, l'équation ax = b est résolue en transposant a dans le deuxième membre et en changeant de signe, c'est à dire x = b – a.

[18] Par exemple, résoudre l'équation (3 – 2x)(x – 2) = 0 devient résoudre l'équation du premier degré (3-2x)-(x-2) = 0.

[19] Par exemple, l'équation $-2x^2 - 6 + 7x = 0$, devient l'équation $-4x + 7x = 6$.

représentation graphique [...], l'énoncé d'une formule en français et l'écriture de cette formule sous forme littérale, la description d'une situation et sa mise en équation..."

La conversion est donc une activité cognitive qui ne va pas de soi : ce n'est pas parce qu'un élève sait former des représentations dans différents registres et les traiter qu'il saura les convertir d'un registre vers un autre.

Le problème de la conversion est particulièrement sensible lors de la mise en équation d'un problème : pour beaucoup d'élèves, le passage d'un énoncé en langage naturel à une équation s'avère souvent impossible à effectuer correctement. R.Duval (Duval, 1998) explique cette difficulté par des phénomènes de non-congruence sémantique :

" Lorsqu'il y a congruence[20] entre la représentation d'arrivée, la conversion est triviale et pourrait presque être considérée, intuitivement, comme un simple codage. Mais lorsqu'il n'y a pas congruence non seulement la conversion devient coûteuse en temps de traitement mais elle peut créer un problème devant lequel le sujet se sent désarmé. Alors la possibilité d'une conversion ne vient plus à l'esprit."

Illustrons cette idée par l'exemple suivant (Duval, 1998 a) :

" Un homme a 23 ans de plus que son fils, 31 ans de moins que son père. La somme des âges des trois personnes est 119 ans. Calculez les âges.

En désignant par x l'âge du père et par y l'âge du fils, nous pouvons écrire la première équation de deux façons différentes :
$x - 23 = y$ c. à d. l'âge du père moins 23 est égal à l'âge du fils.
$x = y + 23$ c. à d. l'âge du père est égal à l'âge du fils plus 23.

On remarque tout de suite que la paraphrase des deux équations n'est pas congruente à la phrase de l'énoncé : "un père a 23 ans de plus que son fils". En revanche il y a une équation qui est sémantiquement congruente à cette phrase, mais qui ne lui est pas référentiellement équivalente : $x + 23 = y$. En raison de cette congruence, cette équation risque de s'imposer comme la transcription évidente de la phrase."

R.Duval (Duval, 2002) signale que l'importance de cette variable est scotomisée par les enseignants parce qu'ils ont déjà la résolution en tête quand ils lisent l'énoncé.

Par ailleurs, de nombreux phénomènes de non-congruence ont également été repérés (Duval, 1998 b) lors de l'articulation entre le registre des écritures algébriques et le registre des représentations graphiques.

R.Duval (Duval, 2002) note également que la conversion en une équation d'un énoncé exprimé dans le langage naturel nécessite la redésignation de deux types d'objets (les

---

[20] Note de l'auteur : "Les trois critères de congruence sont :

- la possibilité d'une correspondance "sémantique" des éléments signifiants : à chaque unité signifiante simple de l'une des représentations, on peut associer une unité signifiante élémentaire.

- l'univocité "sémantique" terminale : à chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, il ne correspond qu'une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée.

- l'organisation des unités signifiantes : les organisations respectives des unités signifiantes des deux représentations comparées conduit à y appréhender les unités en correspondance sémantique selon le même ordre dans les deux représentations. Ce critère de correspondance dans l'ordre d'arrangement des unités qui composent chacune des deux représentations n'est pertinent que lorsque celles-ci présentent le même nombre de dimension.

Ces trois critères permettent de déterminer le caractère congruent ou non congruent de la conversion à effectuer entre deux représentations qui sont sémiotiquement différentes et qui représentent au moins partiellement le même contenu. Ils permettent également de déterminer un degré de non-congruence. (Duval, 1993)" quantités inconnues et les relations entre les quantités connues et inconnues) auxquels l'énoncé se réfère. Cette tâche de redésignation peut être particulièrement problématique. Ainsi, pour une redésignation fonctionnelle des objets désignés linguistiquement, il faut choisir une inconnue. Or le "choix de l'inconnue" est une opération nouvelle par rapport aux pratiques de désignation dans les langues naturelles : l'introduction d'une lettre ne se fait pas pour désigner un objet, mais pour en désigner au moins deux différents. De même, la mise en équation, c'est à dire la redésignation de la relation entre les quantités connues et inconnues, peut être particulièrement difficile dans la mesure où son expression varie énormément d'un énoncé à un autre : il ne s'agit absolument pas d'une simple traduction.

Nous faisons l'hypothèse que les erreurs de leurs élèves rendront sans aucun doute les enseignants débutants rapidement conscients que l'accès et la gestion du symbolisme algébrique ne vont pas de soi, mais que ce n'est pas réellement à ce niveau que va se situer l'analyse des compétences professionnelles et de leur évolution. Celle-ci portera sur la capacité à dépasser les discours convenus sur ces difficultés pour identifier leurs raisons possibles, comprendre le fonctionnement des élèves et les cohérences susceptibles de le sous-tendre, développer enfin des stratégies d'enseignement permettant de travailler de façon efficace le rapport au symbolisme algébrique.

II.3 - Algèbre et construction de la rationalité mathématique :

Nous avons vu, dans le paragraphe consacré à la dimension épistémologique, que l'algèbre a en mathématiques une fonction essentielle d'outil de généralisation et de preuve. Elle a donc un rôle à jouer dans la construction de la rationalité mathématique. C'est un rôle que la culture scolaire tend à sous-estimer, notamment en France et auquel des enseignants débutants ne seront donc sans doute pas spontanément sensibles. Nous reviendrons sur ce point dans la partie didactique, nous centrant ici sur des savoirs construits relativement à la rationalité algébrique des élèves.

Ils ne sont pas bien sûr indépendants des savoirs construits plus globalement sur la rationalité mathématique des élèves. C'est ce que montre B. Grugeon dans sa thèse, après avoir étudié divers travaux portant sur la rationalité mathématique (notamment ceux de Balacheff (1988), Legrand (1990), Duval (1993)) et avoir analysé les données expérimentales issues de sa propre recherche. Ceci la conduit à distinguer trois rapports principaux à la rationalité algébrique qu'elle illustre en particulier à travers les réponses d'élèves au problème dit du prestidigitateur. Dans ce problème, les élèves sont placés face à la situation suivante : un prestidigitateur fait un tour assurant qu'il est sûr de gagner. Le tour consiste, un nombre quelconque étant choisi par l'élève, à faire successivement un certain nombre d'opérations arithmétiques, le prestidigitateur assurant que le résultat final sera toujours 7. On le voit, dans cette situation, l'algèbre est un outil de preuve, permettant de démontrer la constance d'une certaine fonction numérique. Les réponses des élèves mettent en évidence différents rapports à cette rationalité algébrique.

A un extrême, on trouve ce qui est qualifié par B. Grugeon de rationalité pré-scientifique. L'algèbre n'est pas perçue comme outil de généralisation et de preuve. Les justifications restent du côté de la rationalité quotidienne, du numérique. Elles s'appuient plus sur des contraintes de pertinence que de validité. Dans la situation du prestidigitateur, ceci se traduit par des réponses qui peuvent faire appel au contexte de la situation (si c'est un tour de prestidigitateur, c'est sûrement vrai), ou la vérification sur quelques exemples numériques. On retrouve donc ici le niveau des preuves pragmatiques de Balacheff, avec toute leur diversité.

A l'autre extrême, on trouve ce que B. Grugeon appelle la rationalité algébrique scientifique. L'algèbre est reconnu comme outil de généralisation et de preuve, dans un calcul algébrique scientifiquement géré. Dans la situation du prestidigitateur, ceci se traduit par une modélisation algébrique du problème, posé a priori dans un cadre purement numérique, et sa résolution via un calcul algébrique maîtrisé.

Entre ces deux pôles, B. Grugeon situe un univers plus flou qu'elle qualifie de rationalité algébrique scolaire. L'algèbre peut intervenir comme outil au service de la rationalité mathématique mais c'est plus une intervention liée au contrat didactique, aux habitus scolaires, qu'à une réelle prise de conscience de son rôle. Le peu d'autonomie qui est donné à l'élève de manière générale vis à vis de la modélisation algébrique, les difficultés que nous avons signalées dans la partie épistémologique, ne peuvent que renforcer ce phénomène. Dans la situation du prestidigitateur, on voit ainsi plusieurs élèves introduire une lettre x pour désigner le nombre donné puis chercher l'équation qu'il doit satisfaire et se retrouver profondément perturbés quand ils aboutissent après un calcul exact à une identité, ou conclure x=a, si à la suite d'un calcul erroné, ils trouvent une valeur particulière pour x. On en voit aussi introduire x, puis l'oublier et passer à des exemples numériques. Dans d'autres types de tâches, les justifications faisant appel à des règles d'ordre légal nous semblent aussi attester de l'emprise de cette rationalité scolaire, que le discours enseignant tend d'ailleurs à renforcer par moments en parlant de droit et d'interdiction là où il est en fait question de vrai, de faux, de possible, d'impossible.

De nombreuses recherches montrent la force de cette rationalité scolaire dans le domaine de l'algèbre et en quoi elle peut constituer un obstacle durable à la construction d'une réelle rationalité scientifique. C'est pour cet ensemble de raisons que la question de la rationalité nous semble un indicateur pertinent.

III - DIMENSION DIDACTIQUE :

Nous axons cette dernière dimension sur des savoirs associés à une vision plus globale du système didactique. Pour structurer notre analyse, nous les qualifions de "didactiques" en ne perdant pas de vue, bien sûr, que les savoirs cités précédemment sont aussi de l'ordre du didactique. Par ailleurs, comme le montre la classification des différents savoirs du professeur élaborée par L.S.Shulman (cf. page 15 de ce chapitre), l'enseignement d'un domaine particulier des mathématiques met en jeu à la fois des savoirs didactiques spécifiques à ce domaine et d'autres plus généraux, plus transversaux. En fait, dans cette troisième dimension, nous centrons notre regard uniquement sur des savoirs didactiques spécifiques à l'enseignement de l'algèbre : ceci ne signifie pas, bien entendu, que nous nous ne prendrons pas en compte des savoirs didactiques plus généraux dans notre analyse ; nous reviendrons sur ce point dans les prochains chapitres.

Enfin, comme pour les deux dimensions précédentes, nous ne cherchons pas à décrire de manière exhaustive l'ensemble des savoirs didactiques susceptibles d'être construits relativement à l'enseignement de l'algèbre, mais nous avons sélectionné trois catégories de savoirs qui nous semblent plus particulièrement susceptibles d'outiller la professionnalité enseignante. Ils concernent respectivement :

- les enjeux de l'enseignement de l'algèbre et leur progression au fil de l'enseignement,

- les ressources didactiques disponibles,

- l'utilisation de technologies informatiques pour l'enseignement de l'algèbre.

III.1 - Les enjeux de l'enseignement de l'algèbre :

Connaître les enjeux de l'enseignement d'un domaine et la façon dont ils évoluent au fil de la scolarité, comprendre la rationalité sous-jacente aux choix curriculaires actuels en la situant éventuellement par rapport à d'autres existantes, et être sensible à la fois aux trajectoires d'apprentissage que ces choix permettent mais aussi aux problèmes qu'ils peuvent poser, nous semblent une composante essentielle des savoirs didactiques que nous envisageons dans cette partie. Cette connaissance ne peut résulter pour les enseignants débutants de leur seule expérience scolaire et universitaire, et elle est un enjeu explicite de la formation des PLC2 dans le domaine de l'algèbre comme dans les autres domaines mathématiques enseignés dans le secondaire.

Les divers travaux menés sur l'enseignement de l'algèbre montrent clairement que l'entrée dans le monde de l'algèbre peut se faire et se fait effectivement suivant différentes approches, pointées notamment par N.Bednarz, C.Kieran, L.Lee (Bednarz, Kieran & Lee, 1996) :

> "The introduction of school algebra can take many different directions : the rules for transforming and solving equations (to which current teaching often reduces algebra), the solving of specific problems or classes of problems (which has played an important role historically in the development of algebra and his teaching), the generalization of laws governing numbers (a very strong focus in certain curricula), the more recent introduction of the concepts of variable and function (which appeared much later historically and which occupy a position of growing importance of some programs), and the study of algebraic structures (which marked the school curriculum in the 1960s under the influence of modern mathematics)."

L'étude menée par R.Sutherland (Sutherland, 2000)[21] visant à comparer l'enseignement de l'algèbre dans douze pays répartis sur quatre continents[22] met en évidence que trois approches sont actuellement privilégiées pour cette entrée : une première approche par des problèmes de généralisation à partir de situations numériques et géométriques, en particulier avec la recherche de "patterns", une deuxième par la modélisation de situations en termes fonctionnels et, enfin, une troisième par le monde des équations qui est celle privilégiée, entre autres, par la France. En effet, actuellement dans notre pays, l'organisation de l'enseignement de l'algèbre suit, dans l'ensemble, l'ordre historique du développement de l'algèbre : un début par une arithmétique généralisée dans le cadre du monde des équations, puis une extension au cadre fonctionnel avec pour les lettres le passage d'un statut d'inconnue à un statut de variable et enfin l'étude des structures au niveau de l'enseignement supérieur. Ce choix d'organisation mathématique influence bien sûr la façon dont est conçue la progression dans la connaissance algébrique au fil du curriculum et les enjeux spécifiques qu'a l'enseignement de l'algèbre aux différents niveaux. Il tend à mettre en lumière certaines fonctionnalités de l'algèbre et en rend

[21] Cette étude a été présentée lors de la conférence "The future of the teaching and learning of algebra" organisée à Melbourne en 2001 dans le cadre de l'étude sur l'algèbre de la CIEM.

[22] L'Afrique n'était pas représentée.

d'autres plus difficilement perceptibles. Il tend à renforcer aussi la rupture arithmétique / algèbre, comme nous l'avons déjà souligné. Dans un enseignement qui, comme celui d'aujourd'hui, se veut un enseignement pour tous, ceci donne une importance particulière à la préparation à l'entrée dans ce nouveau domaine des mathématiques, par un travail que l'on peut qualifier de pré-algébrique (même s'il n'est pas étiqueté comme tel dans les programmes et textes d'accompagnement) dès le début du collège.

Compte tenu des caractéristiques du curriculum français que nous venons brièvement d'évoquer, nous avons choisi de centrer notre attention dans cette grille d'analyse sur trois enjeux : les enjeux du travail pré-algébrique effectué plus particulièrement au début du collège, ceux relatifs à l'entrée dans le monde des équations et inéquations à travers la résolution de problèmes, concernant davantage les deux dernières classes du collège, enfin ceux relatifs au développement de l'algèbre comme outil au service du travail algébrique dans d'autres domaines et notamment celui des fonctions, plus particulièrement au niveau du lycée. Nous faisons l'hypothèse que les enseignants débutants ne les ont pas clairement identifiés et leur évolution dans ce domaine constitue pour nous un critère tout à fait intéressant de l'évolution de leurs compétences professionnelles.

III.1.1 - Le travail pré-algébrique :

Le passage du numérique à l'algébrique s'accompagne d'une rupture mise en évidence et étudiée dans différents travaux de recherche, dont nous avons repris les principaux résultats à l'intérieur du paragraphe II de ce chapitre. Il est alors possible d'envisager un travail pré-algébrique qui préparerait les élèves à ce passage. Dans la mesure où, comme nous l'avons vu précédemment, l'apprentissage de l'algèbre se construit en s'appuyant sur les connaissances numériques anciennes des élèves mais aussi en rupture avec la pensée arithmétique, un tel travail de préparation va passer par la recherche d'une certaine évolution du rapport des élèves aux expressions numériques et aux symboles communs à ces deux domaines des mathématiques. Certains travaux didactiques, dont ceux déjà anciens de Y.Chevallard (Chevallard, 1989), pointent qu'une telle préparation peut être menée notamment à travers un travail sur les formules[23]. Le rapport sur le calcul élaboré par la CREM[24] (Kahane, 2002) souligne aussi les apports possibles d'un tel travail :

> " Le travail sur les formules, qu'il s'agisse d'exploiter des formules données, ou d'en élaborer, permet une première entrée dans le calcul littéral, sans mettre en jeu nécessairement tous les renversements de pensée, de mode de contrôle que nous avons évoqués plus haut. Mais, néanmoins, il ne se situe pas complètement dans la continuité des pratiques antérieures. La lettre cesse d'avoir pour seul statut celui d'étiquette, de marque d'unité dans un calcul sur les grandeurs, elle devient un représentant d'un nombre quelconque, engagée dans les calculs au même titre que le nombre qu'elle représente. [...] Ce travail peut être engagé relativement tôt comme le montrent diverses recherches, et a intérêt à ne pas être limité à un travail de lecture et d'exploitation de formules, même si ce dernier est essentiel. "

Notons qu'un tel travail pré-algébrique est compatible avec les attentes de l'institution énoncées dans les programmes actuels de l'enseignement secondaire. En effet, dès le début du collège, les élèves doivent être initiés aux écritures littérales à travers un travail sur des

[23] On notera que l'on trouve ici une perspective développée, souvent indépendamment, dans de nombreux travaux récents sur l'algèbre précoce.

[24] CREM : Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques

formules, comme le montre l'extrait suivant du programme de sixième actuellement en vigueur :

COMPETENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Appliquer une formule littérale dans une situation familière à l'élève	On entraînera l'élève à schématiser un calcul en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacées par des valeurs numériques

A l'intérieur des programmes de quatrième, les auteurs pointent aussi l'intérêt d'un travail sur les formules pour aider les élèves à donner du sens aux activités entreprises dans le cadre du calcul littéral. Mais, on le voit bien à la lecture des programmes, si un espace institutionnel est ouvert, cet espace reste réduit et les enjeux du travail à mener sont très peu explicités. Il y a peu de chances que de tels enjeux soient repérés spontanément par un jeune enseignant baignant depuis son enfance dans une culture comme la nôtre, laquelle a des difficultés à reconnaître comme mathématique un travail sur les formules.

Soulignons que le travail sur le parenthésage mené dès le début du collège peut être lui aussi reconnu comme constitutif d'une propédeutique de l'algèbre. C'est en effet avec lui que les élèves rencontrent la nécessité de rompre avec une lecture des expressions allant seulement de la droite vers la gauche et rentrent dans une lecture basée sur l'identification de blocs et de leur connections.

Par ailleurs, certaines des difficultés liées à la rupture arithmétique / algèbre que nous avons pointées dans la dimension cognitive sont prises en compte dans les programmes de collège, notamment celles liées à l'utilisation de symboles communs au numérique et à l'algèbre comme les lettres ("L'introduction progressive des lettres et des nombres relatifs s'intégrant aux expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte."[25]) ou le signe d'égalité ("La classe de 5° correspond à une étape importante dans l'acquisition du sens, avec la présentation d'égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner."[26]).

La lecture des programmes de collège en vigueur sous l'éclairage de connaissances figurant dans la dimension cognitive permet donc, elle aussi, de repérer une certaine sensibilisation des auteurs à cette question essentielle : la négociation du passage, à travers un travail de type pré-algébrique, de l'arithmétique à l'algèbre. Mais, là encore, les formulations employées restent assez floues et un professeur débutant risque de ne pas y percevoir un enjeu essentiel de l'introduction de l'algèbre.

III.1.2 - La résolution de problèmes à l'aide d'équations :

Un deuxième enjeu de l'enseignement de l'algèbre dans le secondaire est l'introduction des équations comme outil de résolution de problèmes. Notons, ici, que la résolution de problèmes est un objectif fondamental du collège et que les auteurs des programmes insistent sur son importance dans la construction du savoir algébrique, particulièrement en ce qui concerne le sens des écritures littérales.

---

[25] Extrait du programme de la classe de quatrième.

[26] Extrait du programme de la classe de cinquième.

Comme pour le travail pré-algébrique, la connaissance des résultats de recherche présentés dans le paragraphe consacré à la dimension cognitive permet de préciser certains points à prendre en compte lors de l'introduction des équations comme outil de résolution de problèmes. La rupture entre les démarches de résolution arithmétique et algébrique et le changement de mode de pensée qui accompagne le passage de l'une à l'autre est, de fait, un point particulièrement sensible à considérer lors de l'élaboration de stratégies d'enseignement. En effet, si l'on se limite à proposer aux élèves de résoudre à l'aide d'équations des problèmes qu'ils sauraient résoudre de manière arithmétique, il ne sera pas facile de les convaincre que le détour algébrique est réellement un moyen plus efficace que les techniques arithmétiques qui leur sont familières. Il est donc important de confronter les élèves à des problèmes qui révèlent les limites des procédures dont ils disposent. Relativement à ce point, G.Vergnaud (Vergnaud, 1987) a montré que l'algèbre devient un outil réellement pertinent dans la résolution de problèmes qui conduisent à des équations de la forme $ax + b = cx + d$; ceux qui sont modélisés par des équations de la forme $ax + b = c$ ne nécessitent pas, en fait, un traitement algébrique, comme nous l'avons déjà souligné.

Nous faisons l'hypothèse que les PLC2, pour lesquels la démarche algébrique est complètement naturalisée, ne seront pas sensibles d'emblée à ces enjeux et que ceci influera évidemment sur leurs stratégies d'enseignement. Ceci devrait en particulier se traduire d'une part par une problématisation faible de la démarche algébrique, d'autre part par une centration de l'attention et du travail des élèves plutôt sur la dimension objet de la résolution des équations et inéquations que sur sa dimension outil. Nous serons donc particulièrement sensible aux remises en question éventuelles ou évolutions observées par rapport à de telles stratégies.

III.1.3 - L'algèbre comme outil au service du travail sur les fonctions :

Le travail mathématique en classe de seconde se caractérise, entre autres, par une entrée dans la pensée fonctionnelle qui s'accompagne de l'entrée dans une nouvelle dimension de l'algèbre : celle d'outil au service des fonctions. Le dernier enjeu que nous voulons aborder ici concerne donc la préparation de l'utilisation de l'algèbre pour l'étude des fonctions. Cette préparation nécessite, en particulier, de faire évoluer le rapport des collégiens à certaines questions algébriques, celui-ci n'étant pas toujours adéquat aux tâches mathématiques qui vont leur être proposées lors du travail fonctionnel, comme le souligne Y.Chevallard (Chevallard, 1989):

> "La manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage organisé au collège, en effet, n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi les "règles" de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser, etc.). Cette particularité apparaîtra mieux, par contraste, dans des exemples d'emploi fonctionnel du calcul algébrique - lequel surgira massivement au lycée, rendant évident le manque d'idonéité du rapport au calcul algébrique officiellement inculqué au collège."

L'étude des tâches mathématiques en jeu lors de l'étude des fonctions met en évidence le besoin d'une certaine intelligence du calcul algébrique, bien illustré par M.Artigue (Artigue, 2002) dans ce qui suit :

> " Ainsi la forme développée : $x^4 - 9x^3 - 5x^2 - 45x - 50$ sera tout à fait utile si l'on souhaite étudier le comportement de ce polynôme lorsque x tend vers l'infini, la forme factorisée $(x + 1)(x - 10)(x^2 + 5)$, elle,

sera adaptée si l'on souhaite étudier le signe de cette expression (pour étudier, par exemple, les variations d'une fonction dont elle est la dérivée), ou si l'on souhaite trouver les racines de ce polynôme. "

La préparation à l'utilisation de l'algèbre pour étudier les fonctions passera, donc, par un travail sur le sens des écritures littérales et des manipulations effectuées lors d'un calcul sur ces expressions, sur la reconnaissance de formes (formes factorisées, développées, identités remarquables) portant chacune des informations sur l'objet qu'elle dénote, sur l'articulation entre différents registres (au collège, l'articulation entre le registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques est peu travaillée, alors qu'elle est incontournable dans le travail sur les fonctions). Par ailleurs, l'intelligence du calcul littéral ne peut se développer à travers des exercices complètement balisés : un autre aspect de cet enjeu est donc d'amener progressivement les élèves à être plus autonomes dans ce type de calcul.

Le travail sur les fonctions met également en jeu l'algèbre comme outil au service de la preuve de propriétés (étude des variations, de la parité ou de la périodicité d'une fonction), même s'il est vrai que les programmes actuellement en vigueur limitent cette dimension en classe de seconde. Etant donné la culture de l'enseignement, nous pouvons faire l'hypothèse que, pour beaucoup d'élèves de seconde, ceci risque d'être une première rencontre avec cette fonctionnalité de l'algèbre. La préparation de l'utilisation de l'algèbre pour étudier les fonctions peut donc également s'effectuer à travers un travail sur des tâches mathématiques mettant en jeu cette fonctionnalité.

Là encore, nous faisons l'hypothèse que les PLC2 enseignant au lycée ne seront pas nécessairement d'emblée sensibles à l'évolution des rapports aux objets algébriques que nécessite cette entrée dans l'algèbre des fonctions. Les façons dont ils concevront et géreront dans leur enseignement le travail algébrique sur les objets anciens, dont ils prendront en charge les évolutions nécessaires à un engagement du travail algébrique dans le monde fonctionnel, dont ils réagiront aux difficultés que rencontreront les élèves face à cette évolution nécessaire, constitueront donc des critères pour apprécier l'état et le développement de leurs compétences professionnelles suivant cette dimension des enjeux.

III.2 - Les ressources didactiques :

Le second pôle que nous envisageons dans cette dimension didactique est celui des ressources. On peut a priori distinguer trois principaux types de documents qui peuvent constituer des ressources pour l'élaboration de stratégies didactiques en algèbre. Le premier type regroupe des publications directement issues de recherches didactiques, telles que celles de G.Vergnaud (1987), de Y.Chevallard (1989, 1990), Bednarz, Kieran et Lee (1996), Grugeon (1995) etc., qui prennent en compte la complexité des problèmes soulevés par l'apprentissage de l'algèbre et proposent des stratégies d'apprentissage. Mais il faut reconnaître que ces productions de recherche sont relativement difficiles à lire et à exploiter par des enseignants sans formation didactique ou sans accompagnement spécifique. Le travail sur le mémoire professionnel est, pour un certain nombre de professeurs stagiaires, l'occasion de rencontrer ce type de publications mais leur utilisation reste, même alors, marginale. Ce n'est donc pas sur ce type de ressources que nous nous baserons dans cette partie de la grille.

Le deuxième type concerne des travaux qui prennent en compte les résultats de la recherche en didactique ou sont directement issus de telles recherches, mais dans lesquels un effort de transposition est effectué pour aboutir à des productions plus facilement lisibles et exploitables par des enseignants et formateurs. Ces travaux sont notamment diffusés, en

France, dans des revues telles que Petit x ou Repères IREM, dans le bulletin de l'APMEP, dans des publications des IREM ou de l'INRP.

Enfin, les manuels scolaires constituent le troisième type de ressources didactiques. En 1997, un rapport de la Direction de l'Evaluation et de la Prospective[27], cité par E.Roditi (Roditi, 2001), pointe qu'il s'agit des sources documentaires les plus répandues sur lesquelles s'appuient les professeurs de mathématiques. Dans une recherche relative à la constitution de la professionnalité enseignante, il paraît incontournable d'étudier le rôle joué par les manuels sur l'élaboration de certains gestes professionnels, d'autant plus que dans sa thèse C.Ben Salah (Ben Salah, 2001) montre des utilisations très différentes du manuel scolaire par des jeunes enseignants.

La façon dont les enseignants stagiaires utilisent le manuel officiel de leur classe et éventuellement d'autres manuels[28], les évolutions dans cette utilisation, constitueront donc pour nous des éléments importants dans cette dimension d'exploitation des ressources existantes. Nous faisons cependant l'hypothèse que les manuels scolaires et livres du maître associés, tels qu'ils existent actuellement, ne constituent pas des ressources suffisantes pour permettre aux enseignants d'élaborer et gérer des stratégies d'enseignement de l'algèbre adaptées aux enjeux de cet enseignement et aux difficultés qu'il présente. Il nous paraît donc nécessaire de repérer les ressources hors manuels qu'ils utiliseront éventuellement et la façon dont ils les utiliseront, d'autant plus que, dans la formation dispensée à l'IUFM, de telles ressources sont systématiquement introduites et utilisées par les formateurs, les professeurs stagiaires étant incités à les utiliser.

Nous centrerons donc cette partie sur les travaux du second type. Bien entendu, il ne s'agit pas pour nous de lister et d'analyser tous les documents existants de ce type. Notre premier objectif est de pointer quelques travaux qui proposent des stratégies d'enseignement prenant en compte les enjeux présentés dans la partie III.1. Le deuxième objectif de cette partie est de présenter certaines sources didactiques qui portent sur l'évaluation de compétences algébriques des élèves et qui peuvent constituer elles aussi un outil précieux pour des enseignants.

III.2.1 - Des ressources pour l'élaboration de stratégies didactiques :

Il existe de nombreuses ressources didactiques présentant des exemples de stratégies d'enseignement élaborées à partir de certains résultats issus directement de recherches. Comme nous venons de le préciser, le but de cette partie n'est pas de fournir une liste exhaustive de ces documents mais de montrer leur existence et d'en proposer quelques exemples paradigmatiques. Dans le choix de ces exemples, nous privilégierons les documents utilisés par les formateurs PLC2 à l'IUFM de Reims[29], faisant l'hypothèse que ces textes

---

[27] Direction de l'Evaluation et de la Perspective (1997), *Pratique pédagogiques de l'enseignement des mathématiques en sixième et progrès des élèves*, Paris : Ministère de l'Education nationale de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

[28] Il est fort probable que les enseignants stagiaires considérés ne se référeront pas uniquement au manuel officiel de leur classe. La préparation de l'épreuve sur dossier du CAPES les a habitués à utiliser simultanément plusieurs manuels, à comparer les activités et exercices qu'ils proposent. Elle les a aussi conduits à repérer que, suivant les thèmes considérés, tel manuel est plus "intéressant" que tel autre.

[29] Le lecteur pourra consulter en annexe 1 une bibliographie relative à ces documents.

devraient, de ce fait, constituer un sous-corpus de la littérature existante plus facilement accessible aux professeurs stagiaires. Rappelons que nous nous centrerons également sur les trois enjeux précédemment identifiés, en cohérence avec ce qui précède.

III.2.1.1 - Des propositions pour un travail pré-algébrique :

Nous organiserons cette partie autour de deux publications utilisées effectivement en formation : la première concerne un ensemble structuré de tâches pour les débuts du collège, préparant l'accès au calcul littéral, proposé par J.C.Duperret et J.C.Fénice et publié par la revue Repères IREM (Duperret, Fénice, 1999) ; la seconde est un ouvrage élaboré par une équipe de l'INRP (Combier, Guillaume, Pressiat, 1996) relatif à la proposition d'outils d'ingénierie didactique expérimentés dans les classes visant l'amélioration de l'enseignement de l'algèbre au début du collège.

Dans le premier texte cité, les deux auteurs proposent donc un ensemble structuré d'exercices avec un triple objectif : préparer les élèves de cinquième à l'accession au calcul littéral, poursuivre le travail sur ce type de calcul en quatrième et introduire les équations comme outils de résolution de problèmes. Cet article, écrit par des formateurs de l'IUFM de Reims, présente, nous semble-t-il, l'intérêt de montrer comment, dès le début du collège, peut se développer une propédeutique de l'algèbre, d'en pointer différentes étapes clefs et de les organiser en une progression cohérente, enfin d'illustrer chacune d'elles par des exemples simples d'exercices. Bon nombre de ces exercices correspondent à des types de tâches existant certes déjà dans les exercices proposés à l'intérieur des manuels, mais de façon relativement marginale, sans que le rôle qu'elles peuvent jouer dans un travail pré-algébrique soit clairement explicité comme c'est le cas dans ce texte.

L'analyse de la démarche suivie par J.C.Duperret et J.C.Fénice montre une réelle prise en compte des ruptures qui surviennent lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre (cf. la partie II.1 de ce chapitre). En effet, considérant que l'apprentissage de l'algèbre se construit en s'appuyant sur les connaissances numériques anciennes des élèves, ils proposent, en classe de cinquième, une première étape dont l'objectif est d'asseoir la pratique de l'écriture et du calcul des expressions numériques, notamment à travers un travail centré sur la connaissance des priorités opératoires (utilisation des parenthèses, priorité de la multiplication...) et des conventions d'écriture et de lecture. Lors d'une deuxième étape, ils prennent en compte le fait que l'apprentissage de l'algèbre se construit aussi en rupture avec la pensée arithmétique, notamment parce qu'on utilise dans ces deux domaines des symboles communs qui n'ont pas le même statut. Ils proposent alors différents exercices destinés à faire accepter aux élèves de nouveaux statuts de la lettre dans une expression et à faire prendre conscience que le signe "=" n'est pas seulement employé pour annoncer un résultat. Le travail d'introduction de la lettre se poursuit, en classe de cinquième, à travers un travail sur des formules (traduction de programmes de calcul, formules en géométrie) et à travers l'introduction des équations comme outils de résolution de problèmes, en prenant clairement en considération la rupture au niveau des démarches de résolution de problèmes qui apparaît lors de la transition arithmétique / algèbre. Dans les activités proposées pour la classe de quatrième, J.C.Duperret et J.C.Fénice reprennent la démarche adoptée pour la classe de cinquième en insistant davantage sur la traduction d'un énoncé, le sens de l'égalité, dans des situations plus complexes, parallèlement à la recherche d'une meilleure maîtrise du calcul littéral, particulièrement à travers la résolution de problèmes mettant en jeu une fonctionnalité de l'algèbre qui semble actuellement peu présente dans la culture d'enseignement : celle d'outil au service de la preuve de propriétés numériques ou géométriques.

Notons, enfin, que l'intérêt de ce texte réside également dans le fait qu'au-delà des ressources qu'il fournit pour donner sens au travail algébrique et organiser sa progression, il développe dans une première partie une réflexion épistémologique et didactique plus générale sur l'algèbre, mettant bien en évidence le caractère peu naturel de la démarche algébrique pour les élèves et le travail de problématisation et négociation qui en résulte pour l'enseignant s'il veut que l'algèbre prenne sens pour ses élèves.

Dans le second ouvrage cité (Combier, Guillaume, Pressiat, 1996), nous nous intéressons plus particulièrement dans ce paragraphe à une première partie consacrée à la présentations d'ingénieries didactiques visant l'introduction en classe de sixième et de cinquième d'un travail sur la notion de formule. Dans cet ouvrage plusieurs situations concrètes sont ainsi présentées[30], à partir desquelles les élèves sont amenés à construire une méthode de calcul, à la valider, à la formuler en français. Les difficultés rencontrées pour formuler (manque de précision, éléments implicites, lourdeurs...) justifient alors le recours au langage algébrique. Ce travail peut donc conduire les élèves à percevoir l'intérêt d'introduire des formules mathématiques, à leur donner du sens et, de plus, à prendre conscience des règles d'écriture du langage algébrique ; en ce sens, cette ressource didactique apparaît tout à fait pertinente pour choisir des situations permettant d'expliciter les raisons d'être de tels objets mathématiques.

Par ailleurs, deux autres aspects de cet ouvrage nous amènent à le considérer comme une ressource didactique riche relative à l'enseignement de l'algèbre au collège, en particulier pour un enseignant débutant. Le premier aspect est que, comme dans le texte de J.C.Duperret et J.C.Fénice, le lecteur y trouve une réflexion épistémologique et didactique, facilement accessible, sur laquelle s'appuient les différents choix didactiques opérés par les auteurs. Le second aspect est que les auteurs y proposent d'une part une analyse a priori des situations dans laquelle ils justifient très clairement leurs différents choix, d'autre part une analyse a posteriori dans laquelle ils étudient les différentes phases du déroulement de séances réelles mais aussi diverses productions d'élèves recueillies au cours d'expérimentations. Ce type de texte peut, à notre avis, constituer un outil précieux pour des enseignants débutants qui ressentent bien souvent des réticences face à des situations de cette nature dans lesquelles le travail des élèves est moins balisé que pour certaines situations proposées dans les manuels scolaires.

Soulignons aussi, pour conclure, que, dans ces deux documents, on voit explicitement apparaître comme un enjeu du passage au littéral la généralisation (à travers un travail sur les formules) et la preuve (de propriétés numériques, géométriques) et que l'on retrouve cette dimension dans d'autres documents ressources de la formation, notamment dans l'article "*Calcul numérique et calcul algébrique au collège (quelles difficultés ?)*" écrit par une équipe de l'IREM de Strasbourg, figurant le bulletin Inter-IREM "*Des chiffres et des lettres au collège*" (1992), qui présente un travail progressif autour des formules associées à des situations géométriques ou à des programmes de calcul à partir de la classe de cinquième.

---

[30] Cf. le chapitre 4 de notre thèse pour un exemple d'une situation extraite de cet ouvrage.

III.2.1.2 - Des propositions pour l'accès à l'algèbre via le monde des équations :

Pour cet enjeu de l'enseignement de l'algèbre au collège, nous distinguons deux types de ressources didactiques : celles qui sont susceptibles d'aider les enseignants à négocier cette entrée dans l'algèbre et celles qui sont susceptibles d'aider les enseignants à travailler le sens de la résolution d'une équation et les gestes de cette résolution. Pour exemplifier le premier type, nous nous appuierons de nouveau sur l'ouvrage élaboré par une équipe de l'INRP présenté dans le paragraphe précédent. L'article écrit par J.C.Duperret et J.C.Fénice est, quant à lui, un exemple de publication relevant du second type.

Une deuxième partie de l'ouvrage de G.Combier, J.C.Guillaume et A.Pressiat est donc consacrée à des ingénieries didactiques visant l'introduction des équations comme outil de résolution de problèmes, avec l'objectif majeur de "négocier" le passage d'une résolution arithmétique d'un problème à une résolution algébrique ; les auteurs expliquent ci-dessous la démarche mise en œuvre pour atteindre cet objectif (Combier, Guillaume, Pressiat, 1996) :

> " Pour amener les élèves à accepter une autre approche qu'arithmétique de la résolution de problèmes, il est nécessaire de les confronter à des difficultés qui révèlent les limites des procédures dont ils disposent. Pour cela, nous proposons aux élèves des problèmes, situés dans un même contexte, dont les énoncés ne présentent pas de difficultés de compréhension et qui permettent de réinvestir des procédures du type essais et corrections successifs. Le choix des nombres, tous simples dans l'énoncé comme dans la solution, constitue la variable didactique sur laquelle nous jouons au cours du processus d'enseignement. Progressivement, il est de plus en plus difficile, voire impossible, pour certains élèves d'accéder aux solutions des problèmes par une démarche arithmétique. La résolution algébrique trouve alors sa justification. "

Dans un premier temps, les auteurs proposent une première situation[31] où cette démarche est mise en œuvre. Comme les ingénieries évoquées dans le paragraphe précédent, ils présentent les principes d'organisation des séances consacrées à l'étude de cette situation, l'analyse du déroulement effectif lors d'expérimentations avec des exemples de productions d'élèves. Puis, dans une deuxième partie, les auteurs exposent, de la même manière, une deuxième situation dont les buts sont présentés ci-dessous :

> " Mettre les élèves en situation favorisant l'élaboration de démarches de mise en équations, en leurs présentant des énoncés variés qui les conduiront à :
>
> - critiquer, valider des équations écrites par d'autres ;
> - constater que l'on peut avoir le choix entre plusieurs inconnues ;
> - reconnaître qu'à un même énoncé peuvent correspondre plusieurs équations ;
> - constater que l'on peut écrire plusieurs équations en utilisant plusieurs inconnues à condition d'établir des relations entre elles. "

Les auteurs proposent enfin une analyse des énoncés de dix problèmes sur lesquels un enseignant peut faire travailler ses élèves au cours de cette situation.

31 Au cours de cette situation, le texte des problèmes reste le même, seules les données numériques évoluent. Voici le texte du premier problème :

Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice. Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand lui multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

En conclusion, ce texte propose d'une part des situations tout à fait pertinentes au regard des différentes recherches didactiques que nous avons évoquées dans le paragraphe consacré à la dimension cognitive et, d'autre part, différents outils d'analyse (analyse de productions d'élèves, d'énoncés de problèmes...) à la disposition des enseignants. Par ailleurs, comme pour la partie consacrée au travail sur les formules, les analyses proposées dans la partie centrée sur la mise en équation sont très claires et tout à fait lisibles par un enseignant débutant.

Le deuxième type de documents proposant des stratégies d'enseignement pour l'accès à l'algèbre via le monde des équations est relatif à des situations visant à travailler le sens de la résolution d'une équation et les gestes de cette résolution. Nous avons choisi de nous intéresser ici, de nouveau, à l'article de J.C.Duperret et J.C.Fénice, mais il existe bien sûr d'autres ressources exploitables par les enseignants comme, par exemple, une brochure élaborée par une équipe de l'IREM de Rennes[32]. A la fin de leur article, J.C.Duperret et J.C.Fénice présentent une dernier ensemble structuré d'exercices à proposer en classe de quatrième, rédigés dans la perspective d'un travail autour de la notion d'équation. En prenant en compte différentes recherches portant sur l'analyse des difficultés des élèves lors de la résolution d'équations, les auteurs proposent une démarche d'enseignement qui a notamment pour but de revenir sur les notions d'équation et de solution d'une équation, et de donner du sens aux manipulations effectuées lors de la résolution d'équations du type $ax + b = cx + d$. Il existe dans les manuels scolaires de nombreux exercices visant l'apprentissage des règles de résolution des équations, mais le choix d'exercices portant sur le sens de ces manipulations et sur les notions d'équation et de solution à une équation nous y semble plus réduit. En ce sens, les travaux comme l'article de J.C.Duperret et J.C.Fénice nous semblent des sources riches pour l'élaboration de stratégies d'enseignement portant sur l'objet équation.

III.2.1.3 - Des propositions pour préparer l'utilisation de l'algèbre comme outil au service des fonctions :

La sélection de quelques ressources paradigmatiques est ici plus délicate car, contrairement à ce qui s'est passé jusqu'ici, il nous semble qu'il existe peu de documents de second niveau centrés exactement sur les questions que nous avons évoquées en décrivant ce troisième enjeu. Certaines des activités proposées, par exemple dans des brochures IREM relatives aux modules en seconde (un premier recensement de ces brochures a été fourni dans la brochure inter-IREM Modules en seconde, publiée en 1993), relèvent de ce que nous considérons comme le travail nécessaire sur les objets anciens, visant un pilotage maîtrisé du calcul algébrique et une autonomie suffisante de ce calcul. D'autres activités à propos des fonctions permettent de travailler la flexibilité requise entre registres sémiotiques, notamment l'articulation du registre symbolique algébrique et du registre graphique, mais elles ne s'inscrivent que rarement dans une progression explicite. A titre d'exception, nous pouvons citer ici certains travaux de S.Gasquet centrés sur des activités où sont croisés, de façon complémentaire, les cadres algébrique et graphique ; de tels travaux sont ainsi présentés dans les brochures "Homéopathie mathématique" (Gasquet, 1992) ou dans l'ouvrage "Fenêtres sur courbes" (Gasquet & Chuzeville, 1994), lequel déborde très vite le seul cadre de la seconde et des programmes actuels.

---

[32] IREM de Rennes (1990). *Vers les équations.*

Dans la formation des PLC2 (cf. chapitre 4), le travail sur ce thème a été mené à partir de l'analyse d'une fiche d'activités de module en début de seconde, ainsi qu'à partir de l'étude d'une situation : "le quadrilatère qui tourne" extraite de la brochure inter-IREM Maths en Seconde : Enoncés et Scénarios (1993). Cette dernière situation permet notamment de poser la question de la preuve algébrique de l'existence et l'unicité d'un minimum pour la fonction considérée (question non posée dans la brochure inter-IREM où l'on en reste à une validation graphique) et de l'aide au calcul que peut fournir dans ce cas un logiciel de calcul formel convenablement piloté.

III.2.2 - Des ressources relatives à l'évaluation des compétences algébriques des élèves :

Le type de documents abordés dans cette partie concerne un ensemble de ressources didactiques qui portent sur l'évaluation de compétences algébriques des élèves et qui peuvent constituer un outil pour les enseignants. Nous considérerons une première publication concernant un travail de recherche conduit à l'INRP (Colomb, 1995) qui vise à tester les hypothèses de recherche relatives à plusieurs aspects de l'enseignement de l'algèbre (résolution de problèmes, calcul numérique, calcul littéral, résolution d'équations) et qui se donne comme but de les confirmer ou de les infirmer. En consultant cet ouvrage, les enseignants ont alors à leur disposition des résultats qui permettent d'évaluer les compétences algébriques d'élèves de classe de cinquième, quatrième et troisième sur différents types de tâches algébriques.

Le deuxième ensemble de publications que nous voulons aborder dans cette partie est relatif à des travaux sur l'évaluation des compétences d'élèves dans différents domaines de l'enseignement des mathématiques. Nous pouvons citer ici deux exemples de tels travaux : les résultats des évaluations nationales menées depuis plusieurs années par la Direction de la Programmation et du Développement aux niveaux charnières (CE2, sixième et seconde) et des publications relatives à des évaluations des programmes de mathématiques réalisées à grande échelle par l'APMEP (par exemple, (APMEP, 1990, 1991)). Pour le premier exemple, certains items des évaluations menées en début de la classe de seconde conduisent à un repérage des capacités des élèves sur certaines tâches algébriques. Dans le deuxième exemple, l'association APMEP a relevé les capacités des élèves dans le domaine de l'algèbre pour les quatre classes du collège puis les classes de lycée jusqu'à la première. Ces tests permettent d'étudier les évolutions des élèves en s'appuyant sur les comparaisons d'items repris d'une évaluation à l'autre.

Les résultats présentés dans ces différentes publications peuvent être utilisés par un enseignant pour la préparation de ses séquences d'enseignement ou pour préparer ses propres évaluations. Ce type de document nous semble, en particulier, tout à fait utile à un enseignant débutant a priori non conscient des différentes difficultés que peuvent rencontrer les élèves en algèbre.

III.3 - L'utilisation de technologies informatiques :

Nous avons choisi d'inclure comme troisième pôle de cette dimension didactique de la grille le pôle technologique. Il nous semble en effet un élément aujourd'hui nécessaire à prendre en compte quand on s'interroge sur les compétences professionnelles d'enseignants de mathématiques et sur leur évolution. Ce pôle occupe cependant dans la grille une position particulière. En effet, les étudiants préparant le CAPES, au moment où a débuté cette recherche, utilisaient très peu, voire pas du tout, les technologies informatiques dans leur propre travail mathématique. Ils avaient même très souvent perdu à l'université la familiarité qu'ils pouvaient avoir acquise au lycée avec les calculatrices. La formation reçue en deuxième année d'IUFM ne permettait pas de modifier suffisamment ce rapport à la technologie pour qu'ils se risquent à utiliser des logiciels dans leur enseignement. Donc nous savions que cette dimension de l'analyse se manifesterait dans la presque totalité des cas par un vide au niveau des observables recueillis.

Pourtant, depuis un certain temps, l'institution exprime, notamment à travers les programmes du collège et du lycée, des attentes envers l'utilisation de technologies informatiques pour l'enseignement des mathématiques. Pour ce qui est de l'algèbre, deux types d'outils sont particulièrement à prendre en compte : les CAS et les tableurs. Ces derniers sont par ailleurs officiellement présents dans le curriculum mathématique dès le collège, puisqu'il est demandé aux professeurs de mathématiques enseignant en classe de quatrième d'initier les élèves à leur utilisation. De plus, les logiciels de géométrie dynamique, dont l'utilisation est elle aussi souhaitée dans les programmes, peuvent servir à soutenir l'articulation géométrie / algèbre dans le travail fonctionnel, comme dans la situation du quadrilatère qui tourne évoquée ci-dessus.

Il existe aujourd'hui, dans les recherches en didactique des mathématiques, une réelle réflexion quant aux potentialités offertes par l'utilisation de ces deux types d'outils pour l'enseignement de l'algèbre ainsi qu'aux problèmes que pose leur intégration à l'enseignement. Il existe aussi un grand nombre de ressources issues de la recherche ou de l'innovation pédagogique, particulièrement forte dans ce domaine : brochures IREM, APMEP mais aussi de nombreuses propositions d'activités sur les divers sites institutionnels ainsi que sur des sites personnels. Nous ne prendrons pas ces dernières en compte ici car les données et analyses qui seraient nécessaires pour en faire des ressources, au sens où nous l'entendons dans cette partie, sont pour l'instant généralement absentes. Nous reviendrons en revanche sur les recherches, car elles mettent en évidence des points qui ne peuvent être directement inférés des analyses précédemment menées dans ce chapitre et ne sont pas toujours identifiables dans les ressources destinées aux enseignants.

III.3.1 - Les tableurs :

Pour sa thèse en cours, M.Haspekian a été amenée à synthétiser les résultats issus des travaux de recherche de T.Rojano et R.Sutherland, B.Capponi, F.Arzarello relatifs aux tableurs. C'est sur ce travail de synthèse non encore publié que nous nous appuyons ici pour pointer les différentes potentialités ouvertes par l'utilisation de cet outil informatique pour l'enseignement de l'algèbre. M.Haspekian y montre en particulier que, dans tous ces travaux, le thème de la transition arithmétique / algèbre se dégage comme une potentialité forte de l'utilisation du tableur en classe. Elle repère également que ces chercheurs travaillent en fait avec des points de vue différents[33], ce qui les conduit à dégager des potentialités distinctes mais présentant cependant des éléments communs. Ainsi, les travaux de F.Arzarello mettent, selon elle, en évidence que le tableur peut être considéré comme "un médiateur social et un outil

[33] Dans son travail, M.Haspekian distingue deux points de vue : le premier, qu'elle nomme "tableur : outil qui embarque les mathématiques", caractérise les travaux de Rojano et Sutherland davantage centrés sur les processus de résolution des élèves et ceux de Capponi davantage axés sur un pôle "instrument" ; le second, "tableur : outil qui embarque du social et du culturel", est réservé aux travaux d'Arzarello axés sur un pôle "sémiotique et socio-culturel".

puissant pour créer des espace-temps didactiques de production et de communication porteurs de sens pour la construction et l'interprétation de formules". L'analyse des travaux de T.Rojano et R.Sutherland l'amène, quant à elle, à conclure :

> " Le tableur permet d'approcher la généralité à travers un niveau à la fois numérique et symbolique. Les élèves peuvent passer d'un mode de représentation à un autre et, peu à peu, se tourner vers la symbolisation sans avoir à laisser de côté subitement le numérique comme c'est le cas traditionnellement. [...] Le tableur permet de progresser vers une méthode [de résolution de problèmes] plus algébrique à partir des méthodes intuitives arithmétiques des élèves en développant des stratégies de résolution qui partent de l'inconnu. "

Des travaux de B.Capponi, elle retient que le tableur peut jouer un rôle dans l'apprentissage de l'algèbre, mais que l'outil n'est pas d'emblée algébrique et qu'il y a donc des précautions à prendre lors de l'élaboration de situations d'enseignement l'utilisant :

> " B.Capponi montre que le tableur aurait sa place dans une situation intermédiaire arithmétique / algèbre de par ses fonctionnalités, les savoirs qu'il met en jeu ainsi que les difficultés rencontrées par les élèves qui l'utilisent. Le tableur a une situation intermédiaire à chaque fois : post-arithmétique ou pré-algébrique. Mais l'existence de ce double niveau fait aussi que l'élève peut rester du côté arithmétique ; ce sont alors les situations proposées qui vont lui permettre de passer vers l'algébrique. ",

Enfin, analysant de façon très fine les caractéristiques de la transposition informatique des connaissances mathématiques dans le cas du tableur, elle met en évidence la diversité des objets que le tableur associe à une même notion mathématique, par exemple la notion de variable, et les difficultés qui peuvent en résulter dans l'enseignement.

De cette synthèse de M.Haspekian, nous retenons donc que le tableur est un outil informatique qui peut avoir un rôle à jouer lors de l'entrée des élèves dans le monde de l'algèbre à travers des travaux de type pré-algébriques (notamment un travail autour des formules et une première initiation à la notion de variable) et des travaux introduisant l'équation comme outil de résolution de problèmes. Il permettrait de construire des trajectoires d'enseignement où la transition arithmétique / algèbre aurait lieu de façon moins brutale que ce n'est le cas habituellement. Mais la complexité de la transposition informatique sous-jacente, la difficulté que l'on peut avoir à repérer le niveau de conceptualisation auquel travaille l'élève, en font un outil dont la gestion scolaire n'a rien d'évident.

Il existe actuellement, dans la littérature à la disposition d'enseignants, un certain nombre de publications qui proposent des situations effectives à mettre en œuvre dans la classe. En nous appuyant de nouveau sur le travail de M.Haspekian et sur une synthèse proposée en 1996 par B.Capponi (Capponi, 1996), nous en donnons ici quelques exemples types :

- *trouver une formule :*

Exemple 1 : Un premier exemple qui met en jeu une telle tâche est décrit par B.Capponi : deux élèves travaillent sur le même ordinateur. L'un d'eux tape un nombre dans une cellule et écrit une formule dans une autre cellule, comme dans l'exemple suivant :

	A	B	C
1	6		
2		= A1 + 2	

En changeant uniquement le contenu de A1, l'autre élève doit trouver la formule. Cet élève ne voit bien sûr que les valeurs calculées.

Exemple 2 : M.Haspekian a extrait le deuxième exemple d'une recherche de F.Arzarello : il s'agit d'amener des élèves à trouver une formule qui permet de générer des nombres impairs, qui seront placés dans la colonne B, à partir de la liste des premiers nombres entiers rangés dans la colonne A :

	A	B
1	n	
2	0	
3	1	
4	2	
5	…	

- *rechercher les solutions d'équations :*

Exemple : (extrait de (Capponi, 1996))

On donne deux expressions algébriques B = 3x + 5 et C = 5x – 20. On cherche pour quelle(s) valeur(s) de x on a l'égalité B = C. On peut alors appeler x la colonne A et calculer dans les colonnes B et C les valeurs obtenues pour différentes valeurs de x, choisies au coup par coup en fonction des résultats antérieurs, comme dans le tableau ci-dessous, ou en procédant par incrémentation de pas choisi à partir d'une valeur initiale et en faisant varier en cas de besoin ce pas :

	A	B	C
1	x	B	C
2	0	1	– 20
3	1	4	– 15
4	2	7	– 10
5	3	10	– 5
6	4	13	0
7	10	31	30
8	11	34	35

- *résoudre un problème :*

Exemple : dans cet exemple, extrait par M.Haspekian d'une recherche de T.Rojano et R.Sutherland, l'objectif est d'amener les élèves à passer de méthodes non algébriques de résolution de problème à la méthode algébrique. Pour ce faire, on propose aux élèves un problème pour lequel la méthode arithmétique est mise en défaut, par exemple le problème des chocolats suivant : " 3 groupes d'enfants se partagent 100 chocolats. Le deuxième groupe reçoit 4 fois le nombre de chocolats du premier. Le troisième groupe reçoit 10 chocolats de plus que le deuxième groupe. Combien de chocolats chacun des 3 groupes reçoit-il ? "

Les élèves peuvent alors produire une feuille de calculs comme la suivante :

	A	B	C	D
1	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Total
2		= 4*A2	= B2 + 10	= A2 + B2 + C2

Ils testent alors des valeurs en A2 ; les formules réactualisent alors les résultats des formules B2, C2 et D2. Cette procédure, qualifiée de méthode "tableur", s'approche de la méthode "essai / erreur" en papier / crayon, mais le tableur apporte des spécificités qui la rapprochent de la méthode algébrique comme le précise M.Haspekian :

> " La méthode essai / erreur [...] est ici permise et, qui plus est, automatisée par les fonctionnalités du tableur (cellules liées, résultats actualisés). C'est au cours de cette automatisation que se dégagent :
>
> - une formule impliquant une variable même si celle-ci est "matérialisée" par une valeur numérique [...],
> - la notion de variable par l'action de changer les valeurs numériques dans la cellule attribuée à l'une des données (inconnue) du problème [...],
> - enfin, les formules intervenant dans la résolution se rapprochent des équations auxquelles aurait mené la méthode algébrique.
>
> En conclusion, la méthode "tableur" n'est pas algébrique, c'est toujours la méthode "essai /erreur" intermédiaire, mais l'organisation de la feuille de calculs "favorise" la transition vers l'algèbre. "

III.3.2 - Les CAS :

Si les travaux sur les tableurs mettent l'accent sur la possibilité qu'ils offrent vis à vis de la transition arithmétique / algèbre et au-delà sur l'entrée dans le monde fonctionnel à partir d'un travail sur variables et formules qui en sont des objets essentiels, les recherches sur les CAS (Computer Algebra Systems) mettent plus en avant deux aspects : le travail sur le sens et la syntaxe des expressions symboliques, l'articulation des registres symbolique et graphique.

Concernant le premier point, il est en particulier souligné que le travail syntaxique échappe beaucoup plus facilement dans un tel environnement à la pression du contrat didactique car il apparaît comme une des conditions d'une communication effective avec le logiciel, et que par ailleurs les différences entre le fonctionnement du symbolisme dans un CAS et en papier crayon, induites de façon incontournable par l'existence d'une transposition informatique des savoirs mathématiques et de leurs modes d'expression, permettent d'engager un travail sur les distinctions entre règles mathématiques et conventions, particulièrement nécessaire en algèbre devant la tendance forte de la réduction au "légal" (Artigue et al., 1995).

Des exemples d'exploitation en ce sens se trouvent par exemple dans (Artigue et al., 1995) et dans (Rousselet,1996) pour le collège, dans (Guin et Delgoulet, 1997) pour la classe de seconde.

L'un des enjeux de l'enseignement de l'algèbre au début du lycée est aussi, comme nous l'avons déjà souligné, d'amener les élèves à développer l'intelligence du calcul algébrique qui va être nécessaire lors du travail sur les fonctions. En posant un regard rétrospectif sur différentes ingénieries didactiques développées dans l'environnement des calculatrices symboliques, M.Artigue (Artigue, 2002) souligne les potentialités des CAS relativement à cet enjeu :

" La limitation des compétences de calcul des élèves amène en effet, dans les environnements usuels d'enseignement, à limiter fortement la complexité et la diversité des expressions manipulées, à enfermer le calcul dans un petit nombre de routines. L'intelligence du calcul a de ce fait peu d'occasions de s'exercer et de se développer. Le travail avec une calculatrice symbolique modifie profondément l'économie du système. Il devient peu coûteux de travailler avec des expressions plus complexes si les transformations sont effectuées à la machine. En revanche, il faut choisir les transformations à effectuer en fonction du but à atteindre. "

De son côté, l'utilisation de CAS est vue comme un moyen de favoriser l'articulation du graphique et du symbolique, en particulier dans le travail avec les fonctions. Dans l'environnement usuel de travail de l'élève au lycée, environnement papier / crayon enrichi d'une calculatrice graphique, le calcul symbolique reste l'affaire du travail papier / crayon, tandis que le calcul approché et le travail graphique sont de plus en plus instrumentés. L'utilisation des CAS annule cette séparation des espaces de travail et ceci conduit à faire l'hypothèse que cet usage va favoriser l'articulation du symbolique et du graphique.

Il s'agit là de potentialités. Comme dans le cas du tableur, les travaux de recherche menés montrent de plus en plus que l'actualisation de ces potentialités dans les classes n'a rien d'évident. En particulier, dans un ouvrage à paraître, coordonné par D. Guin et L. Trouche (Guin & Trouche, 2002), les différents auteurs soulignent la complexité des processus d'instrumentation de ces technologies, les connaissances mathématiques et techniques qui sous-tendent cette instrumentation, et le fait qu'il est difficile d'espérer une intégration efficace si ces besoins en connaissance sont sous-estimés par l'institution, si les enseignants ne sont ni sensibilisés à leur existence, ni préparés à les gérer.

Comme pour les tableurs, il existe dans la littérature des exemples d'exploitation des CAS pour l'enseignement de l'algèbre[34]. Nous proposons ici un exemple d'ingénierie développée et expérimentée par l'équipe ERES en seconde (Guin et Delgoulet, 1997). Cette ingénierie est constituée de trois séances de travaux dirigés. La première n'est consacrée qu'à des calculs numériques : l'objectif est d'aborder avec les élèves les rapports entre calcul exact et calcul approché. Les deux autres séances mettent en jeu des manipulations d'écritures littérales : l'objectif de la deuxième séance est en particulier de montrer aux élèves que la TI-92 permet d'effectuer rapidement des calculs longs et complexes et de factoriser des

[34] On pourra par exemple se référer aux deux brochures produites à l'initiative de la Direction des Technologies éducatives et des technologies de l'information et de la communication du MEN : Faire des Mathématiques avec un système de calcul formel, tomes 1 et 2, 1998 CRDP de Champagne-Ardenne.

expressions algébriques qui ne sont pas de la forme de celles qu'ils savent factoriser. Au cours de cette séance, les élèves doivent alors remplir les tableaux suivants :

	$(2x-5)^2 - (3x-4)^2$	$(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4})^2 + (2x-3)(x-1)$	x^2-5x+6	x^2+3	x^2-5x-9
Factorisations					
Développements					

	$(2x-3)^3$	$(5x-3)^2(x-1)-4(x-1)$	$(2x+2\sqrt{2}-3)$ $(2x-2\sqrt{2}-3)$	$(x\sqrt{2}-\sqrt{3})(x\sqrt{3}-\sqrt{2})$
Développements				
Factorisations				

Notons que les expressions figurant dans ce tableau ont, notamment, été choisies de manière à sensibiliser les élèves aux différences entre calcul machine et calcul crayon / papier et, à les faire travailler, via ces différences, sur le sens même des notions de factorisation et développement. La troisième séance est, quant à elle, consacrée au travail sur l'équivalence d'expressions et aux possibilités de passer, via la calculatrice symbolique, d'une expression à une autre expression équivalente. Les élèves ont alors à répondre, par exemple, aux questions : les expressions A et B sont égales ; comment peut-on avec la TI-92 passer de A à B ou de B à A ? Est-ce toujours possible ? Bien sûr, encore une fois, les expressions sont précisément choisies pour qu'une réflexion sur la notion d'équivalence devienne nécessaire.

A	B
$6+\frac{35}{4(x-3)}-\frac{7}{4(x+1)}$	$\frac{6x^2-5x-4}{(x-3)(x+1)}$
$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-2}+\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	$2+3\sqrt{3}-\sqrt{6}$
$\frac{2x^2-3x-2}{(x-4)(3x-1)}$	$\frac{(x-2)(2x+1)}{3x^2-13x+4}$

L'analyse rétrospective de ces séances proposée par M. Artigue (Artigue, 2002) met bien en évidence les potentialités de telles tâches pour travailler le sens des expressions algébriques, mais elle met aussi en évidence leur sensibilité à certaines variables, par exemple le choix des expressions, et la nécessité, pour que ces situations soient efficaces, de pouvoir inscrire le travail de l'élève avec la calculatrice dans un système d'anticipations qui permette de repérer l'étrangeté de certains phénomènes et de négocier un travail mathématique visant à en comprendre les raisons.

Qu'il s'agisse de tableurs ou de CAS, les ressources disponibles existent donc pour soutenir l'enseignement de l'algèbre. Mais on voit bien aussi à la lecture des travaux de recherche qu'une exploitation efficace de ces instruments dans ce contexte nécessite sans aucun doute des compétences que les enseignants débutants n'ont pas encore construites.

Dans ce chapitre, nous avons donc pointé un certain nombre de savoirs relatifs à l'algèbre élémentaire susceptibles d'outiller la professionnalité enseignante, que nous avons classés selon trois dimensions non indépendantes (épistémologique, cognitive et didactique). Nous rappelons que cet ensemble de savoirs constitue une grille qui a pour nous le statut d'un instrument d'analyse de l'évolution du rapport à l'algèbre d'enseignants débutants ou non, et que nous ne le considérons en aucun cas comme un ensemble de savoirs à acquérir en formation initiale.

Dans le chapitre suivant, nous présentons différents choix méthodologiques que nous avons été amenée à faire au cours de notre recherche et nous y précisons, en particulier, comment nous avons utilisé cette grille pour étudier les différentes questions que nous avons exposées dans le premier chapitre.

CHAPITRE 3

METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

La question que nous abordons dans notre recherche est donc celle de la construction d'un rapport professionnel à l'algèbre chez des enseignants stagiaires de mathématiques. Pour cette étude, nous nous sommes proposé, dans le premier chapitre de cette thèse, de considérer les questions clés suivantes : comment se construit et évolue la vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre chez des PLC2 ? Comment se construit et évolue leur vision des élèves, de leurs difficultés, des obstacles qu'ils doivent surmonter ? Comment élaborent-ils des stratégies d'enseignement et quelles sont leurs priorités dans cette élaboration ? Comment analysent-ils leurs pratiques, les difficultés éventuelles qu'ils rencontrent, les décalages entre leurs attentes et la réalité de la classe ? L'objet de ce troisième chapitre est de présenter les choix méthodologiques généraux que nous avons effectués pour étudier ces questions. Les méthodologies particulières seront présentées dans les différents chapitres présentant les résultats de nos analyses.

Dans une première partie, nous présenterons les conditions du recueil de données ; puis, dans un deuxième paragraphe, nous préciserons les données retenues pour notre thèse. Enfin, nous expliciterons nos choix quant à leur analyse.

I - LE RECUEIL DE DONNEES :

La partie expérimentale de notre thèse s'est déroulée sur trois années scolaires. Lors de la première année, 1997-1998, nous avons recueilli trois types de données : un questionnaire écrit rempli en fin d'année par la promotion complète des PLC2 suivant la formation didactique en mathématiques dispensée au centre IUFM de Reims, des interviews menées auprès de huit professeurs stagiaires volontaires en fin d'année scolaire, des photocopies de cours proposés en algèbre par ces huit PLC2. L'analyse de ces données a fait alors apparaître une première contrainte méthodologique temporelle : un recueil de données uniquement en fin d'année permettait certes d'identifier certains aspects du rapport professionnel à l'algèbre de PLC2 à la fin d'une première année d'enseignement, mais il était extrêmement difficile, voire impossible, avec un tel recueil de repérer les évolutions certaines qui accompagnent le passage du statut d'étudiant à celui de professeur de mathématiques. La nécessité d'un travail dans la durée s'est alors imposée. Par ailleurs, il est apparu que les données alors récupérées ne permettaient pas d'appréhender les gestes professionnels dans toute leur diversité. Nous avons alors choisi d'enrichir ce recueil en diversifiant les données.

Ces deux contraintes nous ont donc conduite à modifier notre partie expérimentale. Au cours des deux années suivantes, nous avons alors organisé le suivi, pendant une année complète, d'un groupe de professeurs stagiaires (six en 1998-1999 et cinq en 1999-2000), sélectionnés parmi des volontaires. Ces onze PLC2 ont effectué leur stage en responsabilité sur cinq niveaux d'enseignement différents, de la classe de sixième à celle de première S. Parallèlement à ces suivis individuels, nous avons continué à faire remplir des questionnaires écrits aux autres PLC2 de mathématiques du centre de Reims, mais aussi en fin d'année aux étudiants préparant le CAPES, inscrits en première année d'IUFM. Nous avons également rencontré certains de ces étudiants par le biais d'entretiens individuels. Mais c'est le suivi individuel des étudiants qui est devenu le dispositif méthodologique essentiel de notre recherche.

Nous allons maintenant en préciser les modalités, puis nous présenterons un dispositif complémentaire, le dispositif "vidéo", que nous avons mis en place au cours de la dernière année de la partie expérimentale de notre thèse.

I.1 - Le suivi individuel de stagiaires :

En prenant en compte la contrainte temporelle explicitée ci-dessus, nous avons fait le choix de rencontrer ces professeurs régulièrement dans l'année par le biais d'entretiens individuels, que nous appelons "entretiens de suivi". Pour chaque stagiaire, trois entrevues ont été programmées au début, au milieu et à la fin de l'année scolaire. Chaque entretien a été enregistré, puis retranscrit.

Par ailleurs, afin d'obtenir plus d'informations sur les gestes professionnels des stagiaires au cours de l'année, leurs difficultés, leurs questions, etc., nous avons mis en place un autre dispositif de recueil de données : nous leur avons demandé de remplir tout au long de l'année un cahier de bord dans lequel ils devaient noter, pour chaque séance consacrée à un thème algébrique, une description assez détaillée de la séance, des éléments d'analyse a priori (leurs objectifs, des éléments relatifs au déroulement prévu...), des éléments d'analyse a posteriori (impressions générales, repérage de difficultés d'élèves, modifications éventuelles du scénario...), les difficultés qu'ils avaient rencontrées ou les questions qu'ils s'étaient posées relativement à la séance. Nous avons complété ce cahier par le recueil systématique de leurs notes personnelles pour les préparations de cours, des différents documents distribués à la classe, par la récupération des photocopies des cahiers de cours et d'exercices de certains élèves, des textes des contrôles et des photocopies de copies d'élèves.

Ce dispositif nous permettait alors d'avoir à notre disposition tout un ensemble de données riches et variées qui prenaient en compte une grande diversité des gestes professionnels hors de la classe (préparation d'une progression, d'un cours, choix des exercices, élaboration d'un contrôle), ainsi que des éléments de réflexion a posteriori sur ces choix et leurs effets didactiques. En revanche, l'ensemble des informations sur les gestes en classe était beaucoup plus réduit et était limité à ce que les stagiaires notaient dans leur cahier de bord ou ce qu'ils rapportaient lors des entretiens. Nous avons donc choisi d'introduire une nouvelle dimension dans ce recueil de données, au cours de l'année 1999-2000, par le biais de l'observation en classe.

I.2 - Le dispositif "vidéo" :

Il est évident que le choix que nous avons fait de suivre plusieurs stagiaires sur un long terme ne nous permettait pas d'observer toutes les séances consacrées à l'algèbre. Nous avons donc décidé de mettre en place un nouveau dispositif, une fois pour chacun des cinq stagiaires suivis au cours de l'année 1999-2000, dans le but d'obtenir des informations complémentaires sur leurs pratiques en classe, sur leurs pratiques de préparation d'une séance particulière et sur les analyses qu'ils faisaient de leur propre pratique. Il s'agissait aussi pour nous de renforcer le nombre des observables nous permettant de confronter le discours sur les pratiques et les pratiques effectives à l'intérieur de la classe. Ce dispositif est le suivant : au cours de l'année, nous avons demandé à chaque stagiaire de construire une séance d'algèbre que nous avons filmée. Parallèlement à ce film, nous avons d'abord organisé deux entretiens : le premier, quelques jours avant la séance, pour que le stagiaire nous présente sa séance, et le deuxième, juste après la séance, pour obtenir sa réaction à chaud. Puis nous avons de nouveau rencontré chacun des cinq stagiaires à la fin de leur année scolaire, soit environ trois mois après la séance filmée, et nous avons visionné ensemble le film. Le but de ce dernier entretien était d'accéder à l'analyse qu'ils faisaient de ce qu'ils avaient vécu. Enfin l'analyse des premiers entretiens que nous avons menés dans le cadre de notre recherche nous avait amenée à constater qu'il existait des différences entre les analyses que les stagiaires étaient capables de produire individuellement et celles qu'ils produisaient en groupe lors des journées de formation didactique à l'IUFM. Certaines choses semblaient accessibles, mais uniquement encore dans un fonctionnement social collectif. Dans le but d'obtenir des informations sur les analyses d'une séance que les cinq stagiaires étaient capables de mener entre pairs, nous avons donc complété le dispositif par une dernière phase : après avoir analysé les cinq films, nous avons sélectionné pour chacune des séances des épisodes qui nous semblaient particulièrement intéressants ; puis nous avons réuni les cinq stagiaires, qui ont visionné ensemble ces différents extraits, et nous leur avons demandé de les analyser.

II - LA SELECTION DES DONNEES EXPERIMENTALES :

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe précédent, les analyses des questionnaires et des entretiens menés lors de la première année de la partie expérimentale de notre recherche avaient montré la nécessité de posséder des données diverses et de poursuivre un travail sur un long terme pour tenter d'apporter des réponses aux questions clés que nous avons rappelées au début de ce chapitre. Mais l'ensemble des données recueillies à l'issue du travail expérimental, s'il se prêtait bien aux triangulations nécessaires à la recherche de cohérences, à l'identification d'évolutions non homogènes suivant les gestes professionnels, suivant que l'on se situait au niveau des pratiques effectives ou du discours sur les pratiques, était devenu monstrueux. Compte tenu des contraintes inhérentes à un travail de thèse, il nous a fallu effectuer des choix douloureux à propos des données que nous exploiterions précisément dans la thèse. Nous avons finalement choisi de nous centrer sur les suivis et d'exploiter plus particulièrement les données récupérées dans le cadre de ces suivis (entretiens individuels, cahiers de bord, cahiers d'élèves, contrôles..., dispositif vidéo) pour analyser la constitution du rapport professionnel à l'algèbre chez les professeurs stagiaires.

Même ainsi réduit, le corpus restait imposant et, dans un second temps, nous avons décidé d'opérer aussi une sélection dans la liste des professeurs stagiaires qui avaient fait l'objet d'un suivi. Etant donné la diversité des niveaux où les onze PLC2 suivis individuellement enseignaient, deux possibilités s'ouvraient à nous : un premier choix possible était d'étudier la constitution d'un rapport professionnel à l'algèbre d'un professeur stagiaire pour chacun des niveaux d'enseignement représentés dans notre corpus ; une deuxième possibilité était de privilégier un niveau d'enseignement et d'étudier, alors, la constitution du rapport professionnel de plusieurs PLC2 enseignant à ce niveau. Les deux choix étaient certes justifiables mais il nous a semblé préférable, dans un premier temps, de limiter les variations en optant pour la deuxième possibilité et en privilégiant la classe de seconde. L'enseignement de l'algèbre dans cette classe nous semble, en effet, tout à fait approprié à notre recherche puisque les professeurs y sont amenés à organiser à la fois le travail sur des objets algébriques déjà étudiés au collège, l'introduction de nouvelles tâches algébriques et l'entrée dans une nouvelle dimension de l'algèbre, celle d'outil au service de l'étude des fonctions.

Parmi les PLC2 suivis individuellement, six ont effectué leur stage en responsabilité dans une classe de seconde. Pour notre étude, nous avons retenu quatre d'entre eux que nous prénommerons désormais Marie, Claire, Julien et Benjamin. Ces stagiaires ont été choisis en prenant en compte les deux aspects suivants :

- entre les deux années scolaires 1998/1999 et 1999/2000, l'équipe des formateurs PLC2 en didactique des mathématiques a été modifiée, ce qui a induit quelques changements dans les pratiques de formation. Même si nous avons déjà fait l'hypothèse que l'influence de la formation est sans doute assez faible, il nous a semblé nécessaire de prendre en compte cet aspect. Marie et Julien ont ainsi suivi leur formation en 1998/1999, Claire et Benjamin l'année suivante ;
- les conditions de travail des professeurs stagiaires suivis se sont révélées assez différentes : certains semblaient ne rencontrer aucun problème lié à la gestion de leur classe, alors que d'autres exprimaient de réelles difficultés. Nous avons alors choisi de sélectionner des stagiaires confrontés à des conditions de travail différentes afin d'en mesurer, si possible, les effets sur la construction de pratiques professionnelles. Marie et Benjamin ont ainsi effectué leur stage en responsabilité dans des lycées au centre de grandes villes, Claire et Julien ont, quant à eux, enseigné dans des lycées techniques.

III - LES CHOIX RELATIFS A L'ANALYSE DES DONNEES :

L'étude de l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre va s'effectuer à travers l'analyse de gestes professionnels (élaboration d'une progression, d'un cours, d'activités, d'évaluations...) et de réflexions sur leurs propres pratiques de professeurs stagiaires. Nous avons choisi de centrer notre étude autour de quatre pôles : la vision des enjeux de l'algèbre, la vision des élèves et de leurs difficultés, l'élaboration de stratégies d'enseignement et l'analyse par les stagiaires de leurs propres pratiques. L'objet de ce paragraphe est de présenter les outils d'analyse que nous avons utilisés dans notre travail pour l'étude des trois premiers pôles. Nous consacrons donc une première partie à l'utilisation de la grille d'analyse de la compétence professionnelle en algèbre que nous avons présentée dans le chapitre 2. Puis nous préciserons dans une deuxième partie certains aspects de la théorie anthropologique du didactique que nous avons utilisés pour analyser les stratégies d'enseignement des professeurs stagiaires.

III.1 - L'utilisation de la grille d'analyse de la compétence professionnelle en algèbre :

Dans cette grille, nous avons pointé un certain nombre de savoirs relatifs à l'algèbre élémentaire susceptibles d'outiller la professionnalité enseignante, que nous avons classés selon trois dimensions non indépendantes (épistémologique, cognitive et didactique). Cet ensemble de savoirs constitue une grille qui a pour nous le statut d'un instrument d'analyse de l'évolution du rapport à l'algèbre d'enseignants débutants ou non ; nous ne le considérons en aucun cas comme un ensemble de savoirs à acquérir en formation initiale. Mais nous considérons en revanche que cette grille est constituée d'éléments particulièrement importants pour situer les compétences professionnelles d'un enseignant en algèbre, sur lesquels nous pouvons attendre une évolution au cours de cette première année. Cette grille nous fournit donc des indicateurs pour essayer d'analyser, de mesurer ces évolutions qui, nous en avons fait l'hypothèse, ne seront pas homogènes dans toutes les dimensions et pourront être parfois ténues.

Nous faisons l'hypothèse qu'une sensibilité à certains points figurant dans cette grille est peut-être présente dès le début de l'année ou va se construire en cours d'année. Dans notre travail, nous aimerions ainsi relever des points auxquels des enseignants débutants sont d'emblée ou presque d'emblée sensibles, apprécier le niveau de cette sensibilité en étudiant comment elle s'exprime par la parole ou par des actes, étudier comment elle évolue lors de l'année de stage, identifier, si cela est possible, les facteurs qui conditionnent cette évolution, étudier comment cette sensibilité peut conduire des enseignants débutants à se construire des savoirs qui pourront être conscients ou non et mobilisables ou non dans l'action.

Dans ce qui suit, nous précisons l'utilisation que nous faisons des indicateurs de la grille pour répondre aux questions que nous nous posons relativement aux trois pôles : la vision des enjeux de l'algèbre, la vision des élèves et de leurs difficultés, et l'élaboration de stratégies d'enseignement.

III.1.1 - La vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre :

Comme nous l'avons vu dans la dimension didactique, la détermination des enjeux de l'enseignement de l'algèbre passe par la coordination de savoirs relatifs aux textes officiels et d'autres relatifs à l'apprentissage de l'algèbre par les élèves. Certains de ces savoirs ne sont certainement pas d'emblée disponibles pour les professeurs stagiaires et nous faisons donc l'hypothèse que la vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre est extrêmement floue au début de la première année d'enseignement. Nous aimerions donc étudier comment cette vision se construit et comment elle évolue. En particulier, nous étudierons comment les professeurs stagiaires analysent et utilisent les textes officiels, comment ils articulent les savoirs issus de ces textes et d'autres savoirs, comment ils situent leur travail par rapport au passé et au futur des élèves, comment se construit chez eux une perception des enjeux de l'enseignement et des progressions associées qui dépassent l'unité immédiate du chapitre.

Par ailleurs, la détermination de ces enjeux est extrêmement liée à une réflexion sur l'articulation des deux dimensions "outil" et "objet" de l'algèbre. Or, nous l'avons pointé dans la dimension épistémologique, cette articulation, préconisée par les programmes actuels, est loin d'aller de soi. Nous faisons donc l'hypothèse que les rapports entre ces deux dimensions ne seront pas évidents à gérer pour un enseignant débutant et nous étudierons comment ils sont pensés et gérés. Dans la dimension outil, nous nous s'intéresserons aussi à la place respective faite aux différentes fonctionnalités de l'algèbre et, dans la dimension objet, nous prendrons aussi en compte la place accordée au travail technique, la façon dont il est organisé, commenté et justifié.

En outre, nous faisons l'hypothèse qu'une réflexion sur les enjeux de l'enseignement de l'algèbre peut amener des professeurs stagiaires à s'interroger sur la nature du travail algébrique. En effet, nous avons noté dans le paragraphe consacré à la dimension épistémologique que cette question est tout à fait justifiée par le fait que pour des étudiants à l'université le mot "algèbre" fait sans doute davantage référence à l'algèbre des structures et ce n'est pas cette algèbre qui est enseignée au collège et au lycée. Or, nous l'avons noté, les questions relatives à la nature du travail algébrique et aux frontières de l'algèbre sont loin d'être simples et risquent de déstabiliser les professeurs stagiaires. Nous aimerions donc étudier si une telle réflexion est effectivement menée et comment évolue en général la vision de l'algèbre chez les débutants.

III.1.2 - La vision des élèves et de leurs difficultés :

L'étude de différentes recherches nous a amenée à pointer différents types de difficultés et d'obstacles rencontrés par les élèves lors de l'apprentissage de l'algèbre. Nous faisons l'hypothèse que les professeurs stagiaires vont être très rapidement confrontés à ces difficultés et y seront particulièrement sensibles. Mais suivant les genres de difficultés la sensibilité sera différente. Nous aimerions donc, dans un premier temps, identifier les types de difficultés repérées les plus aisément par les professeurs stagiaires et étudier l'évolution du pointage des difficultés au cours de l'année. Un deuxième niveau d'étude portera sur les analyses de ces erreurs effectuées par les professeurs : ces erreurs sont-elles décrites, analysées ? Quels sont les systèmes d'interprétation mis en place et comment évoluent-ils ? Un troisième niveau d'analyse portera sur la prise en charge de ces difficultés par les enseignants dans la conception ou la gestion des séances "ordinaires", ou par le recours à des activités spécifiques, par exemple en séances de modules.

III.1.3 - L'élaboration de stratégies d'enseignement :

Le troisième pôle d'étude sera consacré à l'étude des stratégies d'enseignement proposées par les stagiaires : comment les élaborent-ils ? Quelles sont leurs priorités dans ce domaine ? Sont-elles pensées très localement, chapitre après chapitre ou plus globalement ? A travers ces analyses, nous tenterons de repérer les différents savoirs (explicités dans la grille d'analyse de la compétence professionnelle) mis en œuvre pour l'élaboration de telles stratégies. Nous serons également attentive aux diverses sources utilisées par les professeurs stagiaires : quelles sont les ressources utilisées ? Sur ce point, la thèse de C.Ben Salah (Ben Salah, 2001) sur les pratiques d'enseignants a bien mis en évidence que les enseignants sont très fortement influencés par le manuel de la classe et ont tendance à mettre de côté leurs connaissances mathématiques au profit de celles exposées par le manuel. Nous serons donc particulièrement attentive à l'utilisation des manuels par les professeurs stagiaires : comment utilisent-ils le manuel de la classe ? Quelles libertés s'autorisent-ils par rapport à cet outil ? Utilisent-ils d'autres ressources didactiques ? Comment articulent-ils alors les différentes ressources utilisées ?

Nous étudierons également la prise en compte des élèves dans l'élaboration de ces stratégies, selon deux axes : les difficultés des élèves d'une part, la place accordée dans le développement du savoir et la répartition des responsabilités entre enseignant et élèves dans le travail mathématique, plus globalement.

III.2 - La mise en œuvre de concepts issus de la théorie anthropologique :

Au cours de notre recherche, nous nous proposons donc d'analyser notamment les stratégies d'enseignement en algèbre de professeurs stagiaires de mathématiques. Pour ce faire, nous avons fait le choix de deux types d'approches : une analyse du contenu algébrique proposé par ces enseignants, ce que Y.Chevallard (Chevallard, 1999) désigne par "*la réalité mathématique* qui peut se construire dans une classe de mathématique où l'on étudie le thème θ", et une analyse de l'organisation de ces contenus c'est à dire, selon Y.Chevallard, "*la manière* dont peut se construire cette réalité mathématique". En nous appuyant sur des concepts issus de la théorie anthropologique du didactique, nous allons mener ces deux analyses en étudiant respectivement les organisations (ou praxéologies) mathématiques et les organisations (ou praxéologies) didactiques mises en place par les professeurs stagiaires. Nous reprenons ici la notion de praxéologie au sens défini par Y.Chevallard (Chevallard, 1999) ; un tel objet est constitué de quatre éléments : un type de tâches T, une technique τ (c'est à dire une manière d'accomplir les tâches de T), une technologie θ (un discours rationnel sur la technique τ qui peut avoir pour fonction de la justifier, l'expliquer ou de la produire), et enfin une théorie Θ qui est un discours relatif à la technologie τ et qui a le même rôle que celui joué par la technologie par rapport à la technique.

III.2.1 - L'étude des organisations mathématiques :

Pour l'étude des "réalités algébriques" mises en place par les professeurs stagiaires, nous avons, dans un premier temps, étudié les différents types de tâches algébriques rencontrées par les élèves en considérant, en particulier, les critères suivants proposés par Y.Chevallard (Chevallard, 1999) :

> " – *Critère d'identification* : les types de tâches T_i sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ? En particulier, sont-ils représentés par des corpus K_i effectivement disponibles de spécimens suffisamment nombreux et adéquatement calibrés ? Ou au contraire ne sont-ils connus que par quelques spécimens peu représentatifs ?
>
> – *Critère de raison d'être* : les raisons d'être des types de tâches T_i sont-elles explicitées ? Ou au contraire ces types de tâches apparaissent-ils immotivés ?
>
> – *Critère de pertinence* : les types de tâches considérés fournissent-ils un bon découpage relativement au situations mathématiques les plus souvent rencontrées ? Sont-ils pertinents au regard des besoins mathématiques, pour aujourd'hui ? Pour demain ? Ou au contraire apparaissent-ils comme des "isolats" sans lien véritable – ou explicite – avec le reste de l'activité (mathématique et extramathématique) des élèves ? "

Puis, nous avons analysé les techniques relatives à ces types de tâches notamment en prenant en compte les questions suivantes : ces techniques sont-elles effectivement élaborées ou seulement ébauchées ? Sont-elles faciles à utiliser ? Leur portée est-elle satisfaisante ?

Enfin, nous avons considéré les éléments technologiques en prenant en compte leur fonction : justification, explication ou production de techniques. Nous avons, plus particulièrement, centré notre regard sur la justification des techniques. En effet, les premières analyses d'organisations mathématiques mises en place par certains professeurs stagiaires ont fait apparaître, relativement à ce point, des niveaux de discours très différents, allant de discours technologiques qui se limitent à une paraphrase de la technique exprimée en termes de règles d'action, à des discours qui font clairement apparaître les raisons d'être de la technique, voire discutent son champ de validité, en passant par des discours technologiques de type légaliste, en terme de droit et de non-droit, forme de discours que le domaine de l'algèbre favorise.

III.2.2 - L'étude des organisations didactiques :

Pour l'analyse des organisations didactiques, nous avons cette fois privilégié deux axes : l'étude des moments didactiques, de leur structuration temporelle, leur importance respective, leur articulation, d'une part et l'étude du topos de l'élève, c'est à dire de la place donnée à l'élève par l'enseignant au cours de ces différents moments. En ce qui concerne le premier axe, Y.Chevallard distingue six moments qui sont nécessairement présents lors de l'étude d'une organisation mathématique :

- le moment de la première rencontre avec une organisation mathématique donnée,
- le moment de l'exploration d'un type de tâches et de l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches,
- le moment de la constitution d'un environnement technologico-théorique[35],
- le moment du travail de la technique,
- le moment de l'institutionnalisation,
- le moment de l'évaluation.

La présentation ordonnée qui est faite ci-dessus ne préjuge pas bien sûr, comme le souligne Chevallard, de l'ordre qui peut être choisi dans une stratégie d'enseignement déterminée. De plus, un même moment peut apparaître plusieurs fois dans un processus d'enseignement. Nos premières études des organisations didactiques mises en place par les professeurs stagiaires ont fait apparaître une variabilité qualitative et quantitative de la présence de ces moments et une certaine complexité d'analyse due au fait que, dans les pratiques de ces débutants, il n'était pas toujours facile d'identifier clairement ces différents moments se succédant, voire s'imbriquant à un rythme assez rapide dans une même séance. Un découpage selon cette catégorisation nous a ainsi semblé parfois aller, par l'atomisation qu'il induisait, à l'encontre d'une lisibilité des pratiques ainsi que des logiques sous-jacentes à laquelle nous souhaitions parvenir. C'est pourquoi dans certains cas, tout en reprenant ce découpage en moments de l'étude, nous avons introduit des catégories mixtes, combinaisons de plusieurs de ces moments. Nous préciserons les aménagements apportés dans les parties méthodologiques des chapitres correspondants.

En conclusion de ce chapitre, nous voulons préciser qu'il s'agit bien sûr d'une étude tout à fait qualitative, basée sur un petit nombre de sujets, avec des histoires différentes, placés dans des contextes d'enseignement différents. Même si des régularités apparaissent dans les états initiaux, dans les trajectoires, dans les processus conditionnant l'évolution, elles n'auront pas valeur de généralité, mais on espère pouvoir leur donner sens en rendant apparentes les cohérences sous-jacentes, en rendant sensibles les contraintes qui façonnent le travail des enseignants et la perception qu'ils en ont, en mesurant mieux les coûts des évolutions en jeu. Tout ceci suppose d'appréhender le travail de l'enseignant dans sa richesse et sa diversité, et d'étudier sa dynamique dans la durée. Cela pose des problèmes méthodologiques certains. Seule la triangulation d'observables reflétant la diversité des gestes de l'enseignant et des positions diverses qu'il peut avoir par rapport à ses propres pratiques peut permettre d'accéder aux résultats escomptés. En l'état de développement du champ, les sélections a priori sont difficiles. Pourtant, si toutes les données recueillies ont nourri la réflexion qui s'est développée et ont contribué à l'identification de ses lignes de force, la sélection s'impose quand il s'agit de rendre compte de ce travail, en partie souterrain, dans un

[35] Y.Chevallard désigne par l'expression "bloc technologico-théorique" l'ensemble formé par les éléments technologiques et théoriques d'une praxéologie donnée.

manuscrit de thèse, de le rendre communicable, compréhensible. C'est ce que nous avons fait ici, en nous centrant sur les suivis et sur un niveau d'enseignement.

CHAPITRE 4

DESCRIPTION D'UNE FORMATION DIDACTIQUE EN ALGEBRE

Un des objectifs de notre recherche est de mesurer l'influence de la formation didactique dispensée à l'IUFM de Reims sur l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre de PLC2 de mathématiques. Nous faisons donc le choix de consacrer ce quatrième chapitre à une description de cette formation. Après une présentation rapide de la formation professionnelle initiale des étudiants ayant réussi un concours de recrutement de l'Education Nationale (CAPES ou agrégation), nous décrirons de manière générale, dans un deuxième paragraphe, la formation disciplinaire suivie par les stagiaires considérés dans notre thèse. Puis, nous nous centrerons, dans une troisième partie, sur la formation didactique en algèbre[36].

I - LA FORMATION PROFESSIONNELLE INITIALE :

La formation professionnelle initiale des PLC2 est fondée sur l'articulation de la théorie et de la pratique. Elle repose sur deux types de dispositifs : des stages en établissement scolaire et une formation de deux jours par semaine ayant lieu à l'IUFM.

Au cours de cette année de formation, les PLC2 effectuent deux stages :

- *le stage en responsabilité* : le stagiaire est affecté pour une année, à raison de six heures maximum par semaine, dans un établissement secondaire où il a la responsabilité totale de l'enseignement dans une classe ou plusieurs. Dans cet établissement, un professeur, que nous appelons conseiller pédagogique à l'IUFM de Reims, est désigné pour l'accueillir et mettre à sa disposition sa propre expérience professionnelle, mais aussi sa connaissance de l'établissement, de son environnement, de ses coutumes ;
- *le stage en pratique accompagnée* : le stagiaire effectue ce stage de trente heures avec un enseignant affecté dans un établissement de la catégorie non attribuée en responsabilité (si un stagiaire exerce pour une année en lycée, il effectuera ce stage en collège et vice-versa). Au cours de ce stage alternent des phases d'observation de l'enseignant expérimenté et des phases d'action pendant lesquelles ce professeur confie au stagiaire, en sa présence, la conduite d'une ou plusieurs séances.

La formation dispensée à l'IUFM comporte, quant à elle, deux composantes : une formation générale (qui a pour but de constituer un premier bagage de connaissances sur le fonctionnement de l'institution scolaire, sur les droits et des devoirs qui incombent à un enseignant, sur la psychologie des adolescents, d'étendre la culture générale des futurs enseignants...) et une formation disciplinaire que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

Par ailleurs, tout au long de l'année, les stagiaires sont suivis par un tuteur, c'est à dire une personne intervenant dans cette formation disciplinaire ou ayant déjà participé à celle-ci, qui a différentes missions dont celle d'assurer trois visites dans la classe en responsabilité,

---

[36] Nous baserons ces descriptions sur les différents dispositifs en place à l'IUFM de Reims pendant la partie expérimentale de notre thèse.

suivies d'un entretien, dans le cadre d'une évaluation formative, et celle d'accompagner le stagiaire dans l'élaboration de son mémoire professionnel.

II - UNE DESCRIPTION GENERALE DE LA FORMATION DISCIPLINAIRE :

La formation disciplinaire dispensée aux stagiaires ayant participé à notre recherche est constituée de dix-sept séances de six heures[37]. Elle est organisée autour des différents axes suivants :

– *l'accent mis sur l'articulation entre le terrain et l'IUFM* à travers trois dispositifs :

- les groupes d'échanges pendant lesquels les stagiaires, en groupes restreints, peuvent discuter des expériences de chacun ou aborder de façon informelle des questions comme la discipline, les corrections, la motivation des élèves...
- l'"opération séance", qui se déroule de la manière suivante : lors d'une première séance de formation, les stagiaires préparent par groupe de deux ou trois une séance d'enseignement à partir d'une grille de préparation de séance élaborée collectivement[38]. Ils ont alors environ un mois et demi pour réaliser successivement ces séances, avec observation croisée, dans les classes du groupe. Un bilan est effectué en principe par le groupe après chaque expérimentation. Suite à cette expérimentation, les stagiaires élaborent un rapport écrit dans lequel ils doivent inclure la préparation initiale de la séance, la description des déroulements effectifs, les modifications apportées et leurs raisons, une analyse des difficultés rencontrées par les élèves ou par eux-mêmes, et un bilan final. Une deuxième séance de formation est alors consacrée au retour de cette opération : chaque groupe dispose alors d'environ vingt minutes pour présenter son travail et pour répondre aux questions des autres stagiaires. A la fin de cette deuxième séance de formation, une synthèse collective est menée, pilotée par les formateurs[39] ;
- la participation au Rallye Mathématique Champagne Ardenne qui est organisé chaque année par l'IREM de Reims : après une analyse des sujets des années précédentes, les stagiaires vont observer son déroulement dans des classes.

- *une didactique opérationnelle :* la formation didactique vise, en début d'année, à munir en quelque sorte les stagiaires d'une trousse à outils d'utilisation simple et efficace, à partir d'activités portant sur l'entrée dans la classe, l'analyse des enjeux et de l'organisation de l'enseignement sur des thèmes donnés, de la classe de sixième à celle de seconde, l'identification des différents types d'activités intervenant dans une séance de classe, la gestion des rythmes et du temps, la préparation d'une séance d'enseignement... Dans un second temps, un approfondissement didactique intervient, mettant en place un petit nombre

---

[37] Entre les deux années 1998/1999 et 1999/2000, les plannings de la formation didactique n'ont pratiquement pas été modifiés. Le lecteur pourra trouver en annexe 4 celui de l'année 1999/2000.

[38] Au cours de cette séance de formation, une première grille est construite à partir des propositions, parfois naïves, des professeurs stagiaires. Le lecteur pourra trouver, en annexe 5, la grille élaborée lors du lancement de l'opération séance en 1999/2000.

[39] Les formateurs profitent, en particulier, de ce moment pour revenir sur la grille de préparation d'une séance afin d'amener les stagiaires à l'enrichir. Cette grille devient en particulier, par la suite, un outil que les PLC2 doivent exploiter pour préparer leurs séances lors des visites des conseillers pédagogiques ou des tuteurs.

d'instruments d'analyse et de notions choisis en fonction de leur supposée accessibilité et de leur opérationnalité ;

- *un travail sur des thèmes mathématiques*, tels que l'algèbre, la géométrie plane, la géométrie dans l'espace, les statistiques, la proportionnalité ou les preuves et démonstrations, qui sont choisis en fonction de l'intérêt qu'ils présentent pour les stagiaires, quel que soit leur niveau de stage (algèbre ou démonstration par exemple), ou du fait des réticences reconnues chez les enseignants à leur endroit (statistiques ou géométrie dans l'espace) ;

- *un travail sur des thèmes plus transversaux* : un travail autour des programmes et des progressions, la préparation d'une séance d'enseignement et d'un chapitre, l'analyse d'obstacles et d'erreurs, l'évaluation, une réflexion autour de la notion d'activité ;

- *un travail autour des outils et de la technologie*, qui conjugue différents aspects :

- une formation à l'informatique pédagogique, pendant laquelle les stagiaires ont l'occasion d'aller observer en classe de seconde des élèves travaillant en groupe avec un logiciel sur des problèmes qu'ils ont eux-mêmes cherchés et analysés,
- une demi-journée de formation sur l'utilisation du rétroprojecteur,
- l'analyse didactique de cassettes vidéo préenregistrées.

Parallèlement à cette formation didactique, dans le cadre d'un parcours individualisé défini en concertation avec le tuteur, les PLC2 suivent des compléments de formation en mathématiques ou en informatique qui peuvent prendre diverses formes : terminer une maîtrise, préparer un diplôme de troisième cycle ou l'agrégation s'ils sont déjà titulaires d'une maîtrise, suivre des modules proposés par l'IUFM. Ce dernier choix est, en fait, très largement majoritaire chez les PLC2 : les compléments proposés, d'une durée de douze heures, ont pour objectif d'ouvrir les professeurs stagiaires à des thèmes, des questionnements, des formes de travail mathématique qu'ils ont peu eu l'occasion de rencontrer dans leurs études universitaires et qui semblent devoir faire partie de la culture actuelle d'un professeur de mathématiques. Chaque année, différents axes sont proposés comme, par exemple, une ouverture à l'histoire des mathématiques et à l'épistémologie, une ouverture aux technologies nouvelles, une réflexion autour des statistiques et des probabilités.

Nous abordons maintenant la formation didactique consacrée plus spécifiquement à l'algèbre.

III - UNE DESCRIPTION DE LA FORMATION DIDACTIQUE EN ALGEBRE :

La formation didactique consacrée plus spécifiquement à l'algèbre est constituée de deux séances de trois heures. L'observation des pratiques de stagiaires, notamment ceux enseignant en classe de seconde, ayant montré que ces derniers ont une tendance certaine à débuter l'année par des révisions numériques et algébriques, les formateurs ont fait le choix de placer ces deux séances plutôt en début d'année.

Les diverses considérations que nous avons développées dans les chapitres précédents montrent bien que l'enseignement de l'algèbre ne va pas de soi. Un premier but de cette formation est donc d'aider les professeurs stagiaires à appréhender les problèmes rencontrés (ou susceptibles d'être rencontrés) au cours de cet enseignement. Le second but est de les amener à se questionner sur ce domaine des mathématiques et sur son enseignement dans le secondaire. Deux entrées ont alors été privilégiées : une première de type "épistémologique" pour la première séance et une seconde de type "didactique[40]" permettant d'aborder également des questions relatives aux difficultés rencontrées par les élèves au cours de cet enseignement pour la seconde séance.

Nous allons maintenant décrire chacune de ces séances telles qu'elles se sont déroulées en 1998/1999 et 1999/2000.

III.1 - La première séance :

La première séance n'a pas été modifiée entre les deux années pendant lesquelles se sont déroulés les suivis individuels de stagiaires. Pendant ces deux ans, les formateurs ont donc privilégié une entrée par le savoir mathématique lors de cette première séance de formation sur l'algèbre. Celle-ci s'est déroulée en trois temps : lors d'une première phase, une brève réflexion collective a été lancée à partir de la question : "A quoi sert l'algèbre ?", les réponses obtenues ont alors été notées au tableau[41] ; une deuxième étape a été consacrée à une réflexion sur les fonctionnalités de l'algèbre ; enfin, une troisième a été centrée sur le développement historique de ce domaine des mathématiques.

Descriptif de la deuxième étape :

Lors de la deuxième partie de la séance, les formateurs ont proposé aux stagiaires d'étudier une liste de treize problèmes[42] et de déterminer, pour chacun d'entre eux, la fonctionnalité de l'algèbre mise en jeu, de pointer si l'algèbre est nécessaire ou non pour résoudre le problème, de repérer les connaissances en jeu lors d'une résolution de type algébrique, de préciser enfin à quel niveau d'enseignement ces connaissances sont disponibles. Ces problèmes ont été, bien entendu, choisis de manière à varier les fonctionnalités de l'algèbre. Nous présentons ci-dessous quelques-uns d'entre eux, extraits de la liste étudiée en formation, mettant en jeu ces diverses fonctionnalités :

- l'algèbre comme outil de résolution de problèmes numériques :

> ***Problème 3 :*** *Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculatrice. Ils affichent sur cette calculatrice le même nombre. Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7. Quand ils ont fini, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent le même résultat. Peut-on savoir quel nombre ils ont affiché au départ ?*

- l'algèbre comme outil de théorisation du numérique :

> ***Problème 12 :*** *Vrai ou faux ? La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.*

---

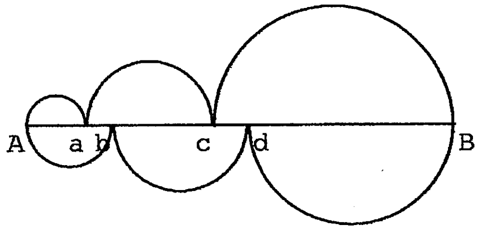
[40] Nous utilisons de nouveau ce terme "didactique" dans le même sens que dans la grille multidimensionnelle d'analyse de la compétence professionnelle en algèbre.

[41] Les résultats obtenus font, le plus souvent, apparaître que certaines fonctionnalités de l'algèbre, en particulier l'algèbre comme outil pour prouver des propriétés numériques ou géométriques, ne sont pas mentionnées à ce niveau.

[42] La liste complète de ces problèmes est fournie en annexe 6.

- l'algèbre comme outil de résolution de problèmes géométriques :

Problème 13 : *Pour aller de A à B, on peut suivre le segment [AB] ou passer par les demi-cercles. Lequel des trois chemins est le plus long ? Et si on change la position des points a, b, c et d ?*



- l'algèbre comme outil de généralisation :

Problème 2 : *On borde un carré de côté n par une bordure de carrés de côté unité. Combien y a-t-il de carrés de côté unité sur cette bordure ?*

- l'algèbre comme outil de preuve :

Problème 11 : *Construire un triangle équilatéral ABC de hauteur 6 cm. Placer un point M à l'intérieur du triangle et construire ses projetés orthogonaux : E, F et G sur les trois côtés du triangle. Mesurer pour évaluer ME + MF + MG. Recommencer avec d'autres positions de M. Que conjecturez-vous ? Comment le prouver ?*

- l'algèbre comme outil au service des fonctions :

Problème 5 : *On place sur un segment [AB] un point M. Où placer M pour que le produit des deux longueurs AM et BM soit maximum ?*

Certains de ces problèmes ont également été choisis de manière à illustrer des situations où la résolution algébrique n'est pas nécessaire, comme dans le problème suivant :

Problème 1 : *J'ai choisi un nombre entier x. Je l'ai multiplié par 4 et j'ai ajouté 2. J'ai trouvé 30. Que vaut x ?*

L'étude d'un tel problème permet, en particulier, de pointer les différences entre une démarche arithmétique et une démarche algébrique de résolution de problèmes. Par ailleurs, la comparaison de ce problème avec le problème 3, par exemple, présenté ci-dessus permet de pointer certaines caractéristiques des problèmes qui favorisent une démarche algébrique.

Lors du bilan de cette étape, les PLC2 ont, notamment, été invités à comparer les résultats obtenus, suite à l'analyse de ces treize problèmes, avec la liste des réponses fournies à la question : "A quoi sert l'algèbre ?" étudiée au début de la séance.

Descriptif de la troisième étape :

La troisième partie de cette séance a été, quant à elle, consacrée à un exposé relatif au développement historique de l'algèbre. L'objectif de cette phase était d'amener les stagiaires à appréhender les problèmes qui sont à l'origine de ce domaine des mathématiques, à prendre conscience de la lenteur et de la complexité de la mise en place du système symbolique, à percevoir la diversité des questions abordées dans ce domaine, à faire le lien entre l'algèbre élémentaire qu'ils allaient enseigner dans le secondaire et celle qu'ils avaient étudiée à l'université.

Dans cet exposé, les formateurs ont articulé différents aspects : une chronologie avec quelques étapes clés du développement de l'algèbre (la résolution de problèmes dans l'antiquité, l'introduction de lettres chez Diophante, le rôle joué par les mathématiques arabes, certains résultats des algébristes italiens, les avancées dans le symbolisme dues à Viète et à Descartes, l'entrée dans le monde des fonctions et enfin le développement de l'algèbre des structures et de l'algèbre linéaire). Des exemples de résolutions de problèmes par les Babyloniens ou par Diophante, certains aspects de la résolution des équations par Al Khwarizmi et la considération de l'évolution du système symbolique à travers l'étude d'un document extrait d'une brochure élaborée par une équipe de l'IREM de Poitiers (IREM de Poitiers, 1987), dans lequel sont présentées différentes écritures de l'équation $2x^2 - 5x = 23$ à travers les siècles, ont ponctué l'exposé.

III.2 - La deuxième séance :

La deuxième séance a été consacrée, quant à elle, à l'étude des enjeux de l'enseignement de l'algèbre dans le secondaire. Etant donné que ces enjeux sont différents au collège et au lycée et étant donné le peu de temps que nous avions à consacrer à cette étude, nous avons fait le choix de différencier la formation suivant que les stagiaires exerçaient au collège ou au lycée. Mais, afin que tous les stagiaires aient une vision plus large des enjeux que celle développée dans leur propre groupe de travail, deux documents écrits, relatifs à la formation dispensée dans le sous-groupe collège et le sous-groupe lycée, ont été produits par les formateurs à l'issue de cette séance (cf. annexes 9 et 11). Nous allons décrire maintenant ces deux formations.

III.2.1 - Le sous-groupe collège :

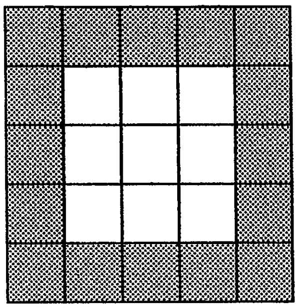
Le but de la séance avec le sous-groupe collège était d'amener les stagiaires à étudier les enjeux de l'enseignement de l'algèbre au collège. Le travail proposé a alors été centré autour des deux axes : le travail pré-algébrique et l'introduction des équations comme outil de résolution de problèmes (cf. les parties III.1.1 et III.1.2 du chapitre 2).

Au cours des deux années 1998/1999 et 1999/2000, cette séance s'est déroulée en trois temps. Les dispositifs mis en place pour les deux premières étapes sont communs aux deux années, mais, pour des raisons que nous préciserons par la suite, les formateurs ont été amenés à modifier le contenu de la dernière étape.

Descriptif de la première étape :

Dans cette étape, les formateurs ont proposé un travail relatif au premier de ces deux axes et ont donné à étudier l'énoncé d'une situation extraite de l'ouvrage de G.Combier, J.C.Guillaune et A.Pressiat (Combier, Guillaume, Pressiat, 1996) visant l'introduction de la notion de formule en classe de sixième :

On borde un carré de côté n par une bordure de côté unité. Combien y a-t-il de côté unité sur cette bordure ?



Les stagiaires se sont alors mis en groupe, suivant le niveau de leur classe en responsabilité. Puis ils ont étudié les potentialités de la situation et construit un scénario pour une séance d'une heure au niveau où ils enseignaient. Après une mise en commun et une synthèse (cf. le texte de synthèse en annexe 9), un travail sur l'introduction des équations comme outil de résolution de problèmes a été engagé.

Descriptif de la deuxième étape :

Cette deuxième partie de la séance a débuté par une synthèse faite par les formateurs sur les programmes du collège et la nécessité de "négocier" le passage d'une résolution arithmétique d'un problème à une résolution algébrique (rappelons que les différences entre ces deux démarches avaient déjà été abordées lors de la première séance). Puis, les formateurs ont présenté et analysé avec les stagiaires une situation extraite, à nouveau, de l'ouvrage de G.Combier, J.C.Guillaune et A.Pressiat que nous avons déjà évoquée dans la partie III.2.1.2 du chapitre 2. Rappelons que les auteurs de cette situation partent d'un problème relativement simple que les élèves peuvent résoudre par des méthodes arithmétiques :

Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu.
Bertrand lui multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Puis, en faisant évoluer les données numériques dans cet énoncé, ils bloquent les procédures arithmétiques et amènent ainsi les élèves à mettre le problème en équation.

Descriptif de la troisième étape :

Pour les deux années 1998/1999 et 1999/2000, la troisième partie a été consacrée à un travail plus large sur les enjeux de l'enseignement de l'algèbre au collège. Les formateurs l'ont entamée par une analyse des programmes de collège et un exposé des différents points à aborder lors de cet enseignement avec un pointage plus systématique des enjeux relatifs à chacun de ces points. Puis, ils ont proposé aux stagiaires un travail relatif à ces enjeux. C'est à ce niveau que les supports pour les deux années considérées ont été modifiés.

Lors de l'année 1998/1999, les formateurs ont proposé un ensemble d'activités (cf. annexe 7) faisant intervenir différentes tâches pré-algébriques et algébriques que les stagiaires ont étudiées pour déterminer les enjeux présents dans chacune d'entre elle et pour préciser le niveau d'enseignement où elles pouvaient être traitées. Il s'est avéré que l'ensemble étudié était très riche et que les stagiaires ont manqué de temps pour tout étudier. Les formateurs n'ont pas eu alors la possibilité de faire une synthèse.

En 1999/2000, nous avons pris en compte ce manque de temps et le support a été alors modifié. Nous avons choisi de les faire travailler sur un ensemble moins conséquent d'exercices donnés en cinquième (cf. annexe 8) pour introduire la pratique du calcul algébrique et son utilisation dans des problèmes de premier degré. Ces exercices ont été présentés dans le désordre et les stagiaires ont dû indiquer, en argumentant leur choix, l'ordre dans lequel ils les présenteraient à leurs élèves au cours de l'année de cinquième. Pour compléter l'étude des enjeux de l'enseignement au collège, nous avons alors repris dans le document écrit, distribué à l'issue de cette séance (cf. annexe 9), un exposé des différents enjeux que nous avons exemplifiés par des activités extraites de la fiche étudiée l'année précédente.

III.2.2 - Le sous-groupe lycée :

Le sous-groupe lycée a, quant à lui, davantage travaillé sur la préparation de l'utilisation de l'algèbre comme outil au service des fonctions. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe consacré à la dimension didactique de la grille d'analyse de la compétence professionnelle en algèbre, cette préparation passe, avant l'introduction des fonctions, par un travail visant une évolution du rapport des élèves de seconde à des objets déjà étudiés au collège.

Ce sous-groupe lycée a donc analysé, dans un premier temps, des exercices susceptibles d'être proposés dans une séance de module en début de seconde (cf. annexe 10), extraits d'un corpus élaboré dans le cadre d'un projet d'innovation et valorisation des réussites (Académie de Créteil). Puis, dans une deuxième partie, ils ont travaillé sur une activité illustrant l'utilisation de l'algèbre pour l'étude d'une fonction modélisant une situation géométrique. Enfin à la fin de la demi-journée, dans le but d'amener les stagiaires à réinvestir la réflexion menée au cours de séance, les formateurs leur demandaient de produire une fiche d'exercices d'algèbre qu'ils devaient proposer à leur classe. Après l'expérimentation, cette fiche était récupérée et analysée par les formateurs.

Descriptif de la première partie :

Cette première partie de la séance visait, en fait, différents objectifs. Un premier était d'amener les stagiaires à percevoir différents enjeux de l'enseignement de l'algèbre en seconde, dans des domaines qui ont déjà été abordés au niveau du collège. Un deuxième objectif était de les amener à se questionner sur certaines difficultés que les élèves peuvent rencontrer en fin de collège, notamment celles liées au symbolisme algébrique (cf. la partie II.2 du chapitre 2) comme dans les exercices suivants, extraits de la fiche analysée par le sous-groupe lycée :

***Exercice 1** : Quelle est l'expression égale à* $a - \frac{b-c}{b}$?

$\frac{ab-b-c}{b}$, $a + c$, $a+\frac{c}{b}$, $ab-b-c$, $a-1+\frac{c}{b}$

> ***Exercice 3 :*** *Soit l'expression $E(x)=2x(3+x)-(2x+6)(x-5)$*
> *Quelles sont toutes les solutions de l'équation $E(x)=0$?*

Les exercices choisis pouvaient également amener les professeurs stagiaires à s'interroger sur les difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre de l'algèbre comme outil de preuve (cf. la partie II.3 du chapitre 2), ceci est le cas, par exemple, dans l'exercice suivant :

> ***Exercice 6 :*** *Un élève dit à un autre : "Tu choisis un nombre, tu lui ajoutes 2, tu multiplies par 4 le résultat, tu ajoutes le nombre initial, puis tu ajoutes 2, tu divises le résultat par 5, tu retranches 2 et tu trouves le nombre de départ", ça marche à tous les coups.*
> *Qu'en pensez-vous ? Justifiez votre réponse.*

Un troisième objectif était d'amener les professeurs stagiaires à analyser des exercices permettant de faire évoluer le rapport des élèves sur certains points délicats, comme les deux suivants :

- le sens des écritures algébriques, à travers, par exemple, des situations mettant en jeu des articulations de registres comme dans l'exercice suivant :

> ***Exercice 4 :*** *Complète le tableau suivant :*

Expression algébrique	*Langage courant*
soit x	*soit x*
$\frac{1}{x^2}$	
$\frac{x^3}{x^2+1}$	
$2x^3 - 3x^2$	
	Prendre le carré de x
	Ajouter à ce carré l'inverse de la différence de x et de 3
	Prendre le cinquième de ce résultat

- le sens de certaines notions, comme celle de solution d'une équation :

> ***Exercice 2 :*** *Soit l'expression $D(x)=(x-1)(x+3)+(x+3)(x-1)(2x-5)$*
> *Que peut-on dire de $D(-3)$ et $D(1)$?*
> *Factorise l'expression $D(x)$.*
> *Quelles sont toutes les solutions de l'équation $D(x)=0$?*

Enfin un quatrième objectif était d'amener les stagiaires à percevoir l'intérêt de faire en sorte que les élèves développent une certaine intelligence du calcul algébrique nécessaire lors du travail sur les fonctions. Un exercice de la fiche permettait d'illustrer comment cet aspect de l'algèbre peut être pris en compte dès le début de la seconde :

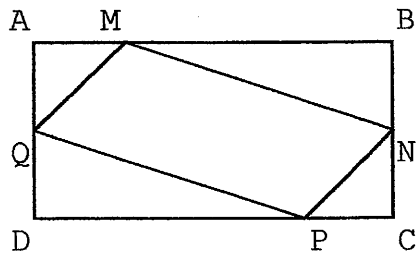
> ***Exercice 9 :*** *On considère l'expression $A(x) = 7x\,(3x+4) + 9x + 12 - 2(3x+4)(x+3)$*
> *a) Développer et réduire $A(x)$. On obtient une expression $D(x)$.*
> *b) Factoriser $A(x)$. On obtient une expression $F(x)$.*
> *c) En comparant $D(x)$ et $F(x)$, vérifier la factorisation et le développement.*

d) Préciser dans chaque cas la forme A(x), D(x), F(x) qui vous semble la plus appropriée pour répondre à la question posée :
Calculer la valeur de l'expression en 0, en 1, en -1, en 3/5, en 5.
Trouver le signe de l'expression pour x=1/2, pour x=-10
Donner un ordre de grandeur de A(10)
Résoudre les équations $A(x)=0$, $A(x)=-12$, $A(x)=14x^2+11x+4$

Descriptif de la deuxième partie :

La seconde partie de cette séance de formation avec le sous-groupe lycée a été consacrée à l'élaboration d'un scénario de séance portant sur les fonctions à partir d'un problème mathématique donné. Le travail sur ce thème a été mené à partir de l'analyse d'une situation extraite du bulletin Inter-IREM "Maths en seconde : énoncés et scénarios" (1993) :

Le quadrilatère qui tourne



ABCD est un rectangle. AB mesure 9 cm et BC mesure 6 cm. Les points M, N, P et Q sont tels que AM = BN = CP = DQ. Où faut-il placer le point M sur [AB] pour que l'aire du quadrilatère soit la plus petite possible ?

Différentes possibilités d'exploitation de cette situation sont envisageables : une activité introductrice à la notion de fonction, une activité de réinvestissement du travail sur les fonctions, à la fin de ce travail, une activité de révision sur les fonctions en première S, avant de se lancer dans l'analyse, un problème d'optimisation proposé en première après l'enseignement de la notion de dérivée.

Afin d'illustrer différents aspects de l'utilisation de l'algèbre lors de l'étude des fonctions, les formateurs ont donc fait le choix d'amener les stagiaires à travailler sur le scénario correspondant à une activité de réinvestissement, en fin de seconde ou début de première S. Par ailleurs, ils ont également choisi d'intégrer à cette séance une réflexion sur l'utilisation de technologies informatiques pour l'étude de telles situations, en demandant aux stagiaires d'élaborer ce scénario dans l'hypothèse où l'enseignant disposerait d'une TI-92 rétroprojetable[43]. L'introduction de cet outil a, en particulier, permis d'aborder l'aide au calcul que peut fournir un logiciel de calcul formel convenablement piloté, pour prouver algébriquement l'existence et l'unicité d'un minimum pour la fonction considérée (question non posée dans la brochure Inter-IREM, où l'on en reste à une validation graphique).

En dehors de ces deux demi-journées de trois heures spécifiquement consacrées à l'algèbre, ce thème peut être abordé à d'autres reprises lors du travail sur des thèmes plus

[43] Le lecteur trouvera en annexe 12 le scénario produit par le sous-groupe lycée en 1998/1999.

transversaux. Ainsi, lors du travail sur les erreurs et obstacles, les formateurs demandent aux stagiaires d'apporter des exemples d'erreurs relevés dans leur propre classe. Il s'avère alors qu'ils reviennent assez souvent avec des exemples tirés de l'algèbre, ce qui conduit donc généralement à un travail autour des difficultés rencontrées par les élèves en algèbre. En outre, le travail sur les activités, mené en fin d'année, est axé autour de l'analyse d'activités que les stagiaires ont réellement mises en place dans leur classe. Au cours de cette séance de formation, le thème de l'algèbre peut donc également être abordé. Par ailleurs, lors des séances de formation consacrées à la preuve, les formateurs essaient de montrer aux stagiaires la force d'une culture qui les conduit à égaler "entrée dans la preuve" et "géométrie" ; ils mettent alors en évidence le potentiel offert par des situations où l'algèbre sert d'outil de preuve, cependant inutilisé en France du fait de cette pesanteur culturelle.

Par ailleurs, la description générale de la formation professionnelle initiale montre qu'au cours de leur première année d'enseignement, les professeurs stagiaires ont des contacts avec d'autres personnes (les conseillers pédagogiques, le tuteur) avec qui peut être éventuellement menée une réflexion didactique relativement à l'algèbre[44] lors, par exemple, de la préparation ou de l'analyse d'une séance, dans le cadre du travail sur le mémoire professionnel. Il existe donc d'autres moments que la formation spécifiquement consacrée à l'algèbre, pendant lesquels les stagiaires peuvent être amenés à s'interroger sur l'enseignement de ce domaine des mathématiques. Mais, en tant que formatrice, nous n'avons pas d'informations précises sur ces autres moments.

IV - CONCLUSION :

En conclusion, nous tenons à souligner le temps limité consacré officiellement à l'algèbre même si le rapport à ce domaine des mathématiques est travaillé indirectement en diverses occasions, comme nous venons de le pointer. Par ailleurs, nous sentons peser sur la formation professionnelle initiale de lourdes contraintes institutionnelles : une formation relativement courte, un temps réduit pour la formation didactique (moins de cent vingt heures), les attentes des professeurs stagiaires qui sont fortement gouvernées par leur vie professionnelle dans leurs classes et qui ne sont pas toujours en accord avec les objectifs de la formation. Ces considérations nous conduisent à penser que l'on ne peut espérer que les séances de début d'année aient une influence très importante sur les stagiaires. Elles peuvent sans doute les sensibiliser à certaines questions, les rendre un peu plus attentifs à certains phénomènes et un peu mieux à même de les interpréter mais il manque l'élément essentiel de la résonance avec les pratiques (cf. le chapitre 1 de notre thèse). C'est le prix à payer d'une formation non intégrée et il est intéressant de ce point de vue de comparer avec des travaux de recherche concernant, eux, des formations intégrées (cf. (Comiti C, Ball D.L, 1996) pour une comparaison de différents systèmes de formation professionnelle initiale d'enseignants à travers plusieurs pays). L'étude du dispositif de formation en didactique dispensé à l'Université du Québec à Montréal fait ainsi apparaître d'autres perspectives. En effet, dans cette université, la formation initiale des enseignants de mathématiques s'étale sur une durée

[44] Relativement à ce point, nous voulons préciser que, dans le cadre de la formation continue des enseignants du second degré, des formateurs de mathématiques de l'IUFM, intervenant auprès des PLC2, organisent trois stages de formation didactique à destination des conseillers pédagogiques avec notamment l'objectif de les amener à se construire des outils d'analyse exploitables lors du suivi de professeurs stagiaires. Lors du stage de niveau 2, le thème de l'algèbre est précisément exploré avec les conseillers pédagogiques.

beaucoup plus longue qu'en France, ce qui offre la possibilité de proposer, en particulier, un travail de réflexion plus riche que celui permis dans notre système de formation. Nadine Bednarz, dans (Bednarz, 2001), nous permet de prendre la mesure de ces différences et de leur impact :

" Ainsi, dès la première année de formation, dans le premier cours de didactique, les étudiantes et les étudiants ont à préparer une suite de trois leçons consécutives sur un sujet donné, puis à en réaliser une devant leurs pairs, l'enseignante ou l'enseignant responsable du cours et une enseignante ou un enseignant du milieu scolaire. Ces étudiantes et étudiants ont ensuite à construire à la lumière des différentes réactions qui leur ont été fournies, une version améliorée de cette leçon. Ce cycle (planification, réalisation, analyse et modification) sera repris lors du premier stage d'enseignement, en contexte réel de classe du secondaire, puis plus tard dans un autre cours de didactique en troisième année de formation. Il mettra cette fois l'accent sur l'élaboration d'une séquence d'enseignement s'étalant sur plusieurs semaines, construction reprise lors du dernier stage d'enseignement, en dernière année du programme. Il s'agit ici de travailler à l'élaboration d'activités de classe, à leur réalisation et à leur amélioration à la lumière de deux types d'analyse, l'une préalable et l'autre a posteriori. Cette élaboration s'appuie en effet sur une analyse préalable du concept ou des concepts que l'étudiante ou l'étudiant doit aborder, l'amenant à s'interroger sur la signification de ces concepts, sur leurs liens avec d'autres concepts ou d'autres domaines, sur les raisonnements clés à développer. Cette analyse conceptuelle prend également en compte les raisonnements des élèves, leurs difficultés, leurs erreurs et leurs conceptions. Elle permet de faire un choix de situations appropriées, fécondes sur le plan des apprentissages pour les élèves, dans lesquelles par exemple des raisonnements importants ou des erreurs sont susceptibles d'être activés. [...] Un véritable développement conceptuel à long terme est ainsi pensé, réalisé et analysé, prenant appui sur une réflexion didactique qui apparaît, à chacun des moments, essentielle."

A l'Université du Québec à Montréal, la formation en didactique de l'algèbre des futurs enseignants de mathématiques est donc conçue dans ce cadre. Elle se situe en particulier dans un contexte de modification du curriculum mathématique. En effet, face aux multiples difficultés rencontrées par les élèves dans ce domaine des mathématiques, les programmes d'enseignement ont été modifiés pour faire apparaître les recommandations suivantes, précisées par N.Bednarz (Bednarz, 2001) :

" • Moins de temps devrait être consacré à la manipulation algébrique ;

• le développement du raisonnement algébrique devrait être la principale préoccupation de l'enseignement ;

• l'algèbre devrait être vue comme un moyen d'exprimer la généralité ;

• l'enseignement de l'algèbre devrait être pertinent, significatif pour les élèves."

Un des objectifs de la formation didactique en algèbre est donc d'amener les étudiants à "changer significativement leurs conceptions de l'enseignement de l'algèbre pour pouvoir mettre en œuvre de nouvelles approches", qui sont différentes de celles qu'ils ont vécues en tant qu'élève. Concernant cet objectif, nous observons des similarités avec les intentions de la formation développée à l'IUFM de Reims. En effet, même si le contexte en France est différent, l'étude des différents travaux de recherche menée dans le chapitre 2, consacré à la grille d'analyse de la compétence professionnelle de l'algèbre, montre bien que l'enseignement de l'algèbre nécessite une reconstruction des connaissances des professeurs stagiaires relativement à ce domaine des mathématiques.

La formation en didactique de l'algèbre à l'Université du Québec à Montréal se déroule alors en trois étapes décrites par N.Bednarz :

" Le premier moment consiste principalement en activités dans lesquelles les futurs enseignantes et enseignants sont amenés à s'observer eux-mêmes, ainsi qu'à observer les autres, en train de faire de l'algèbre, de manière à se rendre réceptifs à la nécessité d'un changement face à l'enseignement de l'algèbre. [...] Il s'agit de faire en sorte qu'ils puissent identifier et comprendre les principales difficultés rencontrées par les élèves qui provoquent le besoin d'un changement. [...]

Dans un deuxième moment, les étudiantes et étudiants en formation expérimentent un cycle complet d'enseignement (construction de trois leçons consécutives réalisation d'une leçon, analyse et modification), les amenant à préciser les objectifs d'une approche de l'algèbre comme outil de généralisation (une des orientations du curriculum d'études), à observer les difficultés à l'implanter et à se construire, dans ce travail de conception et réalisation d'une intervention et dans la réflexion sur celle-ci, un premier aperçu d'une intervention possible dans ce domaine.

[...] Le troisième moment, intervenant dans le cours de didactique, [...] s'articule sur ce qui a été réalisé précédemment et cherche à faire en sorte que les futurs enseignantes et enseignants se construisent un cadre de référence à leur intervention auprès des élèves en algèbre. "

Il est clair que les contraintes institutionnelles en France n'autorisent pas un tel développement conceptuel à long terme, d'où l'un des objectifs de notre thèse : étudier et déterminer, à travers l'analyse de la constitution et de l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre de PLC2, quelles entrées seraient les mieux à même d'être efficaces, compte tenu des contraintes existantes, en formation initiale et continue. De telles pistes pourraient, en particulier, être exploitées pour la conception des formations qui sont désormais proposées par les rectorats aux "néo-titulaires", c'est à dire aux professeurs effectuant leur première année d'enseignement en tant que titulaires.

CHAPITRE 5

ANALYSE DES PRATIQUES DE BENJAMIN

Dans ce chapitre, nous analysons les pratiques, lors de l'enseignement de l'algèbre, de Benjamin, stagiaire en 1999-2000, afin d'étudier la construction de son rapport professionnel à ce domaine des mathématiques. Rappelons que pour l'étude de la constitution et de l'évolution du rapport à l'algèbre d'enseignants débutants, nous nous sommes proposé de considérer les quatre questions clés suivantes : comment se construit et évolue la vision des enjeux de cet enseignement chez des professeurs stagiaires de mathématiques ? Comment se construit et évolue leur vision des élèves, de leurs difficultés, des obstacles qu'ils doivent surmonter ? Comment élaborent-ils des stratégies d'enseignement et quelles sont leurs priorités dans cette élaboration ? Comment analysent-ils leurs pratiques, les difficultés éventuelles qu'ils rencontrent, les décalages entre leurs attentes et la réalité de la classe ?

Nous avons alors fait le choix d'étudier la constitution et l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre de Benjamin selon deux axes principaux : l'étude de sa vision des élèves et de leurs difficultés, et l'analyse de ses stratégies d'enseignement en algèbre tout au long de son année de stage (ce qui nous permettra de pointer aussi la construction de sa vision des enjeux de l'enseignement de ce domaine des mathématiques). A travers la considération de ces deux pôles, nous nous montrerons également attentive aux analyses que Benjamin fait de ses propres pratiques ou des difficultés qu'il rencontre.

Dans une première partie, nous présenterons brièvement Benjamin et nous préciserons certains éléments relatifs à sa propre vision des mathématiques (de l'algèbre en particulier) et de leur enseignement. Dans une deuxième, nous étudierons la construction et l'évolution de la vision des élèves et de leurs difficultés chez Benjamin. Puis, dans une troisième, nous analyserons ses stratégies d'enseignement de l'algèbre. Enfin, dans une dernière partie, nous synthétiserons les différents résultats obtenus sous forme de profil. Nous préciserons au début de chaque paragraphe la méthodologie mise en œuvre pour cette dimension de l'étude.

I - LA PRESENTATION DE BENJAMIN :

Dans le cadre du suivi individuel, nous avons rencontré Benjamin pour trois entretiens individuels qui se sont respectivement déroulés le 13 octobre 1999, le 19 janvier 2000 et 27 juin 2000[45]. Par ailleurs, il a participé au dispositif vidéo, que nous analyserons dans le chapitre 7, dans le cadre duquel nous avons filmé, le 17 mars 2000, dans sa classe une séance consacrée à l'étude de la fonction carré.

C'est avec ce stagiaire que les entrevues ont été les plus longues et, dès le début du suivi, il s'est montré très coopératif, notamment en ce qui concerne la tenue de son cahier de bord[46] et il se l'est rapidement approprié comme un outil de réflexion sur sa pratique, comme nous le verrons dans la suite.

[45] Le lecteur trouvera en annexes 14, 15 et 16 la retranscription de ces trois entretiens.

[46] Le lecteur pourra se reporter en annexe 18 pour consulter quelques extraits de ce cahier de bord.

Comme nous l'avons déjà précisé dans le chapitre 3 consacré à la méthodologie générale adoptée pour notre recherche, les conditions de travail de Benjamin semblent satisfaisantes. En effet, lors de notre étude, Benjamin enseigne en classe de seconde dans un lycée de centre ville et ses relations avec cette classe sont visiblement bonnes : au cours de nos différentes rencontres, il n'évoquera jamais de problèmes de discipline et estimera qu'il s'agit d'une classe qui participe bien. En revanche, dès le début de l'année, il regrette un manque de travail de la part de certains élèves qui ne préparent pas toujours les exercices à faire à la maison ou qui n'apprennent pas leurs cours.

La suite de la présentation de Benjamin est centrée sur la présentation d'éléments relatifs à sa vision personnelle de l'algèbre et de son enseignement, en début d'année. En effet, comme nous l'avons pointé dans le premier chapitre de la thèse, les recherches actuelles en didactique des mathématiques sur les pratiques des enseignants conduisent à poser l'hypothèse que ces dernières articulent diverses logiques : une logique institutionnelle et sociale, une logique cognitive, une logique de médiations et une logique plus personnelle (qui inclut en particulier les conceptions de l'enseignant). Afin de relever des éléments de cette logique personnelle et d'en mesurer, par la suite, d'éventuels effets sur la constitution du rapport professionnel à l'algèbre de Benjamin, nous avons pris le parti d'interroger ses conceptions initiales de l'algèbre et de son enseignement en début d'année. Dans ce but, lors de la première séance de formation didactique consacrée à l'algèbre, Benjamin a rempli, comme tous les stagiaires de sa promotion, un questionnaire[47] ayant pour but de faire émerger certains éléments de sa vision initiale de l'algèbre. Puis, au cours du premier entretien qui s'est déroulé environ un mois et demi après la rentrée, nous lui avons posé des questions visant à définir certains éléments de son rapport personnel aux mathématiques et plus particulièrement à l'algèbre, ainsi que sa vision de l'enseignement, après quelques semaines d'exercice. Nous consacrons les deux parties suivantes à l'exposé des résultats obtenus.

I.1 - Sa vision des mathématiques et de l'algèbre :

En tant qu'élève, Benjamin a toujours été attiré par les disciplines scientifiques et, après son baccalauréat, il entre en classe préparatoire en visant une éventuelle admission dans une école d'ingénieur mais l'idée de devenir professeur de mathématiques lui a toujours "trotté dans la tête au collège et au lycée". Il rencontre alors des difficultés en physique et change de projet professionnel. Après avoir été admissible aux ENSI, il prépare une licence de mathématiques, qu'il obtient en un an. Puis, il s'inscrit en première année d'IUFM pour préparer le CAPES qu'il obtient également en un an.

Benjamin ne s'est donc pas tout de suite dirigé vers les mathématiques. Mais il a l'impression que c'est la seule discipline qu'il pouvait finalement étudier à l'université ("Je suis attiré par les maths, je pourrais presque dire, parce que je ne sais rien faire d'autre. Naturellement, j'y suis venu."). Par ailleurs, les mathématiques ne lui ont jamais posé de difficultés et ne lui demandaient pas trop de travail au collège et au lycée. Et, même si quelques cours en licence ne lui ont pas plu et lui ont semblé plus difficiles, les techniques de travail acquises en classes préparatoires lui ont permis de surmonter les difficultés.

---

[47] Ce questionnaire est constitué des deux questions suivantes : " Donnez cinq termes à associer au mot "algèbre" " ; " Pour vous, à quoi sert l'algèbre en mathématiques ?"

Les mathématiques représentent, pour lui, logique et rigueur. A l'université, il a particulièrement apprécié l'analyse qui lui permettait de faire des démonstrations correspondant bien à sa vision des mathématiques, comme il nous l'explique lors du premier entretien :

B : Logique... Rigueur... C'est ça surtout que j'ai appris en 5/2[48] : à être rigoureux. Et c'est ça que j'aime en analyse : une démonstration en analyse bien propre, bien faite... Je ne dis pas que c'est beau, il ne faut pas exagérer. Mais je trouve ça agréable. C'est propre. Quand je révisais les leçons d'oral du CAPES, les leçons de géométrie si elles étaient bien faites tant mieux, si elles étaient pas trop bien faites, j'essayais de voir quand même un peu. Mais les leçons d'analyse je les ai quasiment toutes reprises avec mon cours de sup et à la fin j'étais content d'avoir fait une démonstration propre, à mon goût.

D'une manière générale, il n'a jamais vraiment apprécié la géométrie qui lui a, d'ailleurs, occasionné quelques difficultés quand il était au collège.

Après ces quelques éléments relatifs au rapport personnel de Benjamin aux mathématiques, nous abordons l'étude de sa vision initiale de l'algèbre. Dans le questionnaire de début d'année, les cinq mots qu'il associe au mot "algèbre" sont : espace vectoriel, matrice, application linéaire, calculs, structures (anneaux, corps...). En début d'année, le mot "algèbre" fait donc référence pour Benjamin à l'algèbre étudiée à l'université et seul le mot "calculs" peut être mis en rapport avec l'algèbre enseignée dans le secondaire. Cette hypothèse est confirmée par Benjamin lors du premier entretien :

B : C'est vrai que l'algèbre que tu fais avec des secondes ou des collèges, cela n'a rien à voir avec ça. Mais pour moi, l'algèbre c'est vraiment devenu ça. Je me souviens de la première fois qu'on m'a dit algèbre. On m'a dit : on va faire de l'algèbre. J'ai regardé avec des grands yeux. Finalement on n'a fait que des calculs. Et là, maintenant, quand on me dit algèbre, je ne pense même plus à ça. Je pense à ça : espaces vectoriels, tous ces trucs-là. L'algèbre de fac.

AL : Sauf calculs ?

B : Calculs parce que finalement... Là j'ai dû repenser à ce qu'on faisait dans le secondaire. Ce qu'on apprend là, l'application c'est faire des calculs. Et c'est pareil les structures, c'est les règles de calcul dans IR.

Cette vision de l'algèbre va, en fait, très rapidement se modifier. En effet, environ un mois après le remplissage de ce questionnaire, nous repérons un basculement dans son discours, puisque lors du premier entretien Benjamin explique :

B : Pour moi, au début de l'année, l'algèbre c'était ça[49]. Maintenant c'est les équations. Pour moi l'algèbre, j'en suis certain, c'est devenu ce que font les élèves au lycée.

Au bout d'un mois et demi d'exercice, sa vision d'étudiant de l'algèbre s'est déjà modifiée au profit d'une vision plus professionnelle centrée sur les objets de l'algèbre élémentaire étudiée dans le secondaire. Cette vision professionnelle, qui reste centrée sur la notion d'équation, est relativement réduite, mais ceci n'a rien d'étonnant car, comme nous l'avons pointé à plusieurs reprises dans le chapitre 2 consacré à la grille d'analyse de la

[48] Benjamin a redoublé sa deuxième année de classes préparatoires et le terme "5/2" désigne l'année de redoublement.

[49] Benjamin fait référence aux cinq mots proposés lors du questionnaire de début d'année.

compétence professionnelle en algèbre, l'objet "équation" tient culturellement une place particulière dans l'enseignement de l'algèbre en France.

En ce qui concerne la dimension outil de l'algèbre, dans le questionnaire de début d'année, Benjamin privilégie deux fonctions de l'algèbre : l'algèbre sert à calculer des sommes et des produits et est utilisé en géométrie. Pour cette dernière fonction, il fait, de nouveau, référence à ce qu'il a étudié à l'université et, en particulier, en licence où il a suivi un module de géométrie où l'algèbre des structures était utilisée pour étudier les propriétés de transformations. En outre, pour lui, l'algèbre étudiée à l'université est essentiellement un objet, comme il nous le précise lors du premier entretien :

> AL : Lors de la première séance[50], j'avais parlé des dimensions outil et objet de l'algèbre. Pour toi, ce que tu as fait en fac, est-ce que c'était du côté outil ou du côté objet ?
>
> P : Objet. Parce que finalement, j'en reviens à la diagonalisation des matrices, c'est bien et puis après... Quand on m'a expliqué ça et bien après c'est tout... Après, en analyse numérique, tu diagonalises et tu appliques ça pour des algorithmes, des machins comme ça, à la limite. [...] Mais sinon... Pour moi, on faisait de l'algèbre, on se posait pas de questions.

La vision de l'algèbre comme un objet à étudier semble donc être assez forte chez Benjamin en ce début d'année de stage. Toutefois, dès le premier entretien, il exprime une nécessité d'enseigner au lycée l'algèbre plus concrètement qu'à l'université, pour que les élèves puissent comprendre les notions étudiées. Il évoque alors deux autres fonctions de l'algèbre : l'algèbre comme outil de résolution de problèmes à l'aide d'équations et comme outil pour l'étude de fonctions. Assez vite donc, il exprime une certaine sensibilité à l'intérêt d'articuler les dimensions outil et objet de l'algèbre dans son enseignement pour aider ses élèves à lui donner du sens, mais sa vision de l'algèbre en tant qu'outil reste réduite : il n'évoque pas, par exemple, l'algèbre comme outil de preuve et de généralisation. De nouveau, nous pouvons pointer ici le poids de la culture de l'enseignement des mathématiques.

I.2 - Sa vision de l'enseignement des mathématiques et de l'algèbre :

Le premier entretien fait apparaître que Benjamin avait, avant de commencer à enseigner, une vision initiale de l'enseignement des mathématiques de type transmissif, ce qui l'amenait à considérer le professeur de mathématiques comme une personne qui apporte le savoir. Mais, après le premier mois d'enseignement, cette vision a déjà évolué, comme il nous le précise dans le premier entretien :

> P : Avant je me faisais une idée : on donne le cours, les exercices à faire, on corrige et puis c'est tout. Mais là je me rends compte, ce que je te disais, il faut leur apprendre à travailler. Tu as beau leur donner une formule, leur donner l'exercice, ils ne sauront pas forcément le faire. C'est à toi de leur apporter l'aide, leur donner des conseils. Et puis leur donner un regard critique par rapport à leurs solutions. C'est pas évident.

Ce vécu d'un mois d'enseignement l'a donc déjà conduit à questionner son rôle en tant qu'enseignant de mathématique et à modifier sa vision du métier : il se considère désormais également comme une aide à l'étude pour les élèves. Par ailleurs, notons la mise en place, dès le premier mois d'exercice, d'un questionnement sur l'aide qu'il peut apporter aux élèves pour

---

[50] Nous faisons ici référence à la première séance de formation sur l'algèbre (cf. le chapitre 4).

qu'ils développent un esprit critique. Ce souci restera présent tout au long de l'année et son mémoire professionnel portera sur cette question.

Par ailleurs, Benjamin se sent investi d'une grosse responsabilité vis à vis des élèves et cela l'effraie un peu en début d'année comme il nous l'explique lors du premier entretien :

B : Pour moi j'ai l'impression d'avoir une grosse responsabilité envers eux. Bon là j'ai eu le CAPES cette année, on m'a jugé sur mes capacités en maths. On ne sait pas du tout comment je suis devant une classe et on m'a laissé une classe de seconde. Cela fait peur finalement. Tu te dis que leur niveau en maths dépend de moi finalement.

Dès le début d'année, Benjamin considère donc qu'être un expert en mathématiques ne suffit sans doute pas pour enseigner les mathématiques.

En ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre, Benjamin estime, au début de l'année, qu'il s'agit d'un enseignement plus simple que celui d'autres domaines des mathématiques, notamment que la géométrie :

AL : Comment est-ce que tu imagines l'enseignement par rapport aux enseignements des autres domaines des maths ?

B : J'aurais tendance à dire qu'il est plus facile, parce que finalement ils travaillent avec des nombres, des sommes... Alors qu'en géométrie il faut connaître les théorèmes, avoir une tête bien structurée pour pouvoir construire une démonstration. Bon, l'analyse c'est encore autre chose : quand on balance la dérivée comme ça... C'est pas dur à dériver, mais enfin à quoi ça sert ? C'est des concepts plus délicats. Alors que ça c'est pas... Et cela permet de résoudre des problèmes vraiment tout simples. C'est manipuler des sommes, des différences... Je pense que pour eux c'est plus simple, c'est ce qu'ils font depuis qu'ils sont tout petits finalement.

Nous voyons ici apparaître sans doute une influence du vécu de Benjamin en tant qu'élève : la géométrie, qui lui a posé quelques difficultés, lui semble a priori plus difficile à enseigner. Par ailleurs, Benjamin met ici l'accent sur les continuités de l'algèbre avec le numérique, ce qui induit pour lui une expression de facilité. Enfin, il a l'impression que l'utilité est plus facilement perceptible pour l'algèbre que pour d'autres domaines des mathématiques.

Il est toutefois conscient, dès le premier entretien, que les élèves rencontrent des difficultés relativement à l'algèbre et qu'il devra les prendre en charge. Ceci constitue d'ailleurs sa principale préoccupation par rapport à l'enseignement de l'algèbre en début d'année : quelles sont les explications que l'on peut apporter ? Quels exercices proposer pour cette prise en charge ? Et, lors du premier entretien, il nous explique qu'il attend de la formation en didactique à l'UFM qu'elle lui apporte une banque de données contenant des exercices "efficaces" :

AL : Tu aurais besoin d'aide en plus...

B : Des exercices ciblés qui permettent de faire face à des erreurs attendues. Parce que les erreurs, tout le monde les a. Quand on discute avec les formateurs, ils les connaissent. On devrait pouvoir avoir une banque d'exercices adaptés à ces problèmes pour les appliquer en aide individualisée, par exemple.

Nous repérons ici quelques informations supplémentaires quant à la vision du métier de professeur chez Benjamin : il attend ici des formateurs qu'ils lui transmettent des "trucs" pour prendre en charge les difficultés. Dans ce sens, sa vision initiale du métier semble s'approcher du modèle de l'enseignant technicien[51] décrit par M.Altet (Paquay et al., 1996). Toutefois il apparaît, à la lecture des différents éléments de la logique personnelle de Benjamin explicités dans ce paragraphe, que ce stagiaire adopte dès le début de l'année une posture qui le conduit à questionner ses premières pratiques, plus généralement, les fonctions du professeur de mathématiques et à s'interroger sur l'enseignement des mathématiques.

Par ailleurs, la considération de ces éléments laisse percevoir le souci, dès le début de l'année, de laisser une certaine place aux élèves, de les aider à s'approprier les différentes notions abordées en classe. Nous allons retrouver cette attention particulière portée aux élèves dans le paragraphe suivant que nous consacrons à la vision de Benjamin relativement aux élèves et à leurs difficultés en algèbre.

II - SA VISION DES ELEVES ET DE LEURS DIFFICULTES :

Dans cette partie, nous proposons donc d'analyser comment se construit et évolue la vision des élèves lors de la première année d'enseignement de Benjamin. Nous nous centrons plus particulièrement sur sa vision des difficultés et des obstacles que les élèves doivent surmonter lors de l'apprentissage de l'algèbre. En fait, tout au long de l'année, Benjamin s'est montré très attentif aux difficultés de ses élèves et s'est appliqué à les noter dans son cahier de bord (comme nous le verrons par la suite) afin de pouvoir, notamment, en parler lors des entretiens de suivi. Dans ce paragraphe, nous cherchons à déterminer les types de difficultés et obstacles repérés par Benjamin au cours de cette année scolaire. Pour ce faire, nous reprenons l'analyse théorique sur laquelle nous nous sommes appuyée pour définir la grille d'analyse de la compétence professionnelle en algèbre, en particulier la dimension cognitive pour laquelle nous avons relevé des points sensibles relatifs à l'apprentissage de l'algèbre par les élèves qui nous semblent être de bons indicateurs pour étudier l'évolution du rapport à l'algèbre d'enseignants débutants.

Nous rappelons que, dans cette dimension, nous avons considéré trois composantes (la rupture arithmétique / algèbre, le symbolisme algébrique, l'algèbre et la construction de la rationalité mathématique) et nous avons identifié pour chacune d'elles différents indicateurs que nous résumons dans le tableau suivant :

La rupture arithmétique / algèbre	- Le signe d'égalité - Les lettres - L'appréhension des objets - Les démarches de résolution de problèmes
Le symbolisme algébrique	- Le sens des écritures algébriques - Les difficultés de formation des écritures algébriques - Les difficultés de manipulation des écritures algébriques - L'articulation entre différents registres sémiotiques

[51] " L'enseignant TECHNICIEN : ce second modèle apparaît avec les Ecoles Normales ; on se forme au métier par apprentissage imitatif, en s'appuyant sur la pratique d'un enseignant chevronné qui transmet ses savoir-faire, ses " trucs " ; le formateur est un praticien expérimenté-modèle : les compétences techniques dominent. "

En nous appuyant sur les trois entretiens menés avec Benjamin au cours de l'année et sur son cahier de bord, nous relèverons les principales difficultés qu'il évoque. Puis, nous les classerons selon les trois composantes et indicateurs rappelés ci-dessus, tout en restant ouverte à tout autre type de difficultés relatives à l'apprentissage de l'algèbre signalées par Benjamin qui ne pourrait être classé suivant ces composantes.

Parallèlement à ce pointage, nous étudierons les questions suivantes :

- Comment Benjamin interprète-t-il, éventuellement, ces difficultés ?
- Etaient-elles prévues ou non ?
- Peut-on identifier des facteurs déclenchant la prise de conscience de telles difficultés ?

Afin de rendre intelligible cette analyse, il nous semble important de préciser maintenant l'ordre dans lequel Benjamin a choisi d'aborder les différents chapitres mettant en jeu des thèmes algébriques. Nous présentons cette progression dans le tableau suivant :

Période	*Titre du chapitre*	*Principaux thèmes algébriques abordés*
7/09/99 au 27/09/99	Calculs numériques	Fractions, puissances, racines carrées, factorisations et développements d'expressions algébriques, valeur absolue
28/09/99 au 16/10/99	Equations	Equations du premier et du second degré, équations faisant intervenir la valeur absolue, résolution de problèmes
23/11/99 au 4/01/00	Inéquations	Inéquations du premier degré, étude du signe d'un produit, d'un quotient, comparaison de nombres
8/01/00 au 8/02/00	Repères	Equations de droites
29/02/00 au 25/03/00	Fonctions	Utilisation de différentes notions algébriques

Le travail sur les systèmes d'équations linéaires et d'inéquations à deux inconnues a été, mené quant à lui, lors de cinq séances de modules réparties sur la période du 17/12/99 au 5/05/2000.

Nous consacrons la partie suivante aux difficultés repérées par Benjamin relevant de la composante "la rupture / arithmétique algèbre".

II.1 - La rupture arithmétique / algèbre :

Dans les trois entretiens et dans le cahier de bord, nous ne pointons aucun élément qui indiquerait que Benjamin lie certaines difficultés qu'il a repérées à la rupture arithmétique / algèbre. Notons, toutefois, qu'il évoque un certain nombre de difficultés qu'il considère comme des difficultés à utiliser les lettres. Ce constat l'a notamment conduit à une réflexion sur les changements de statut de la lettre qui apparaissent en classe de seconde (le passage du statut d'inconnue à celui de variable lors du travail des fonctions, par exemple). Ces difficultés évoquées ne sont pas liées au changement de statut de la lettre dans le passage entre l'arithmétique et l'algèbre. Nous les reprendrons donc dans le paragraphe suivant consacré aux difficultés liées au système symbolique de l'algèbre.

Au cours de sa première année d'enseignement, Benjamin n'a visiblement pas été sensibilisé aux discontinuités liées à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre, ainsi qu'aux difficultés qu'elles induisent chez certains élèves. Ceci s'explique très certainement par le fait que le passage entre l'arithmétique et l'algèbre se situe officiellement au début et au milieu de l'enseignement des mathématiques au collège (travail sur les formules, introduction de la démarche algébrique de résolution de problèmes...). Par conséquent, Benjamin n'a pas eu à élaborer de stratégies d'enseignement pour négocier ce passage et, de ce fait, il n'a pas été directement confronté à de telles difficultés. Les analyses d'entretiens avec certains professeurs stagiaires enseignant en classe de quatrième, que nous ne reprenons pas ici, montrent le repérage de difficultés liées à la rupture arithmétique / algèbre, notamment lors de l'introduction de la mise en équation où, suivant les problèmes choisis, sont apparues des difficultés liées aux différences de démarches de résolution de problèmes. De telles difficultés peuvent également être rencontrées en classe de seconde dans le cas où certains élèves ne se seraient pas appropriés la démarche algébrique et tentent de résoudre arithmétiquement certains problèmes proposés. Nous pensons qu'un tel incident pourrait conduire un professeur stagiaire comme Benjamin à une réflexion sur les démarches de résolution de problèmes. Or, dans les trois entretiens et dans son cahier de bord, Benjamin n'évoque jamais une telle situation. Il conviendra donc d'analyser, dans la partie consacrée à l'élaboration des stratégies d'enseignement, la nature des problèmes choisis et la mise en place dans la classe du travail sur la mise en équation, en particulier l'autonomie laissée aux élèves, afin d'étudier si la rencontre avec de telles difficultés était possible.

Dans la partie suivante, nous centrons notre étude sur les difficultés repérées par Benjamin relatives à une deuxième composante "le système symbolique de l'algèbre".

II.2 - Le système symbolique de l'algèbre :

Au cours de son année de stage, Benjamin a repéré un grand nombre de difficultés relevant de cette composante. Comme nous l'avons signalé dans la partie précédente, il a ainsi été sensibilisé très tôt aux problèmes que rencontraient ses élèves face aux lettres, ce qui l'a conduit à un questionnement que nous décrirons dans une première partie. Le début de son stage a également été l'occasion, pour lui, de s'interroger sur le sens que peuvent donner les élèves aux écritures algébriques, comme nous le verrons dans une deuxième partie. Une troisième partie sera consacrée aux différentes difficultés de formation et de traitement des écritures algébriques repérées par Benjamin. Enfin, nous terminerons ce paragraphe par une présentation des problèmes que ses élèves ont rencontrés lors du traitement de tâches mettant en jeu des articulations de registres sémiotiques.

II.2.1 - L'utilisation des lettres :

Dès le début de l'année, Benjamin a constaté des difficultés de ses élèves lors de la manipulation d'écritures littérales et il en interprète certaines comme des difficultés à utiliser les lettres. Dans le premier entretien, il explique ainsi que ses élèves savent relativement bien appliquer les formules de calculs avec les puissances sur des exemples numériques mais qu'ils ont "énormément de mal" quand ils travaillent avec des lettres. Tout au long des deux premiers entretiens, son discours relatif à ce type de difficultés reste assez vague, comme le montre cet extrait du deuxième entretien :

B : Et puis j'ai l'impression que dès qu'ils voient des lettres ils bloquent. [...] Et ça je l'avais remarqué dès le début de l'année. Le calcul littéral, cela allait mal dès le début de l'année pour beaucoup d'élèves.

AL : Et tu t'attendais à de telles difficultés au début de l'année ?

B : Oui je m'attendais... Autant je ne sais pas. Mais je m'y attendais, je savais que c'était quelque chose d'assez nouveau.

AL : D'où le savais-tu ?

P : Parce que pendant les vacances j'avais regardé les programmes de collège et lycée pour pas être dans le vague dès le début de l'année. Visiblement cela dépend des classes : il y en a qui ont déjà pas mal bossé avec les lettres, d'autres ne savent pas du tout ce qu'est le calcul littéral.

A ce moment de l'année (la fin du mois de janvier), Benjamin semble donc en être encore à un niveau de constat global : les élèves ont un blocage par rapport aux lettres. Il explique ce phénomène par un manque de familiarité : pour lui, certains élèves n'ont pas tellement manipulé de lettres au collège et ceci est l'origine des difficultés qu'il constate en seconde. Il construit ce système explicatif à partir de sa propre interprétation des programmes de collège et à partir de constats qu'il fait dans sa classe relativement aux connaissances de ses élèves. Finalement, cela lui semble normal qu'un élève de seconde puisse rencontrer de telles difficultés et il s'y attendait dès le début de l'année. Toutefois, malgré cette prévision, il semble être surpris par leur ampleur et leur résistance aux diverses explications qu'il apporte, comme nous le verrons par la suite.

Pour prendre en charge cette "non-familiarité" des élèves avec les lettres, il met rapidement en place une stratégie pour aider les élèves à comprendre certaines écritures littérales : il leur propose de passer au numérique en substituant des nombres aux différentes lettres. Cette stratégie est déjà évoquée dans le premier entretien :

B : Surtout au début, je prenais pas mal d'exemples numériques parce que pour certains cela avait l'air vraiment nouveau de prendre des lettres. Je disais : a égale ça, b égale ça, tu regardes ce que cela donne.

Elle restera tout au long de l'année une stratégie privilégiée qui sera évoquée dans l'ensemble des entretiens et dans le cahier de bord. Elle lui permet notamment d'expliquer des points quand il ne réussit pas à faire fonctionner d'autres stratégies de prise en charge, notamment l'utilisation de l'algèbre pour prouver :

P : On était en classe, je guidais l'élève. [...] Là une fois qu'on a lu ça[52], je les laisse patauger pendant quinze secondes évidemment. Et puis je dis : quand tu vois b^2-a^2, cela te fait penser à quoi ? Elle répond tout de suite : identité remarquable et elle écrit. Et après (b-a)(b+a)... Je dis : on veut que ce soit du même signe que b-a, on a déjà b-a donc on va regarder ce qui se passe avec b+a. Alors, après, dire comme b et a sont positifs, b+a est positif... Ouais, bof... Est-ce que c'est déjà trop, je ne sais pas trop... ? Là je ne sais pas du tout.

AL : C'est sûr que, ce genre de choses, ils en ont sûrement peu vu au collège...

---

[52] Benjamin relate ici des difficultés rencontrées lors d'une activité dont voici les premières questions : "Soient a et b deux nombres positifs.
1. Démontrer que $b^2 - a^2$ a le même signe que $b - a$.
2. En déduire que : pour a et b positifs, a^2 et b^2 sont dans le même ordre que a et b. [...]"

P : Ah, ça j'en suis conscient, bien sûr. Alors je reviens toujours à des exemples numériques : tu prends a=1, b=2, cela fait 3, c'est positif. Prenons plusieurs exemples comme ça. Ils finissent par être convaincus mais après une fois que l'on revient à b+a positif, cela ne va plus. Il y a un blocage quand on passe de l'un à l'autre.

Cette stratégie lui permet donc de rapprocher ses élèves de l'arithmétique qu'ils maîtrisent mieux que l'algèbre. La citation met également en évidence une autre stratégie que Benjamin utilise pour aider les élèves à traiter des questions qui lui semblent difficiles : il envoie un élève au tableau et le guide à l'aide de questions. En définitive, il semble laisser peu d'autonomie à ses élèves.

A travers ce discours relativement vague sur les difficultés des élèves à utiliser les lettres, Benjamin pointe quelques difficultés particulières, pertinentes et bien reconnues. C'est le cas, par exemple, de la difficulté liée au signe des nombres représentés par des lettres : pour certains élèves, x représente toujours un nombre positif et –x un nombre négatif. Il a repéré ceci pour la première fois lors des évaluations nationales où l'on demandait aux élèves ce que l'on pouvait dire du signe de –5x lorsque x est un nombre quelconque. Il semblait alors visiblement s'attendre à cette difficulté et n'a pas été particulièrement surpris. Puis il la rencontre de nouveau lors du travail sur la valeur absolue, en particulier lors de l'énoncé de la propriété "*Lorsque x est positif :* $|x| = x$, *lorsque x est négatif :* $|x| = -x$". Dans le premier entretien, il nous relate, ainsi, les réactions de ses élèves et la façon dont il les prend en charge :

B : Et quand je suis passé dans les rangs, c'est là qu'un sur deux m'interpellait : vous avez dit que la valeur absolue c'est positif, là il y a un signe moins. Bon ça je m'y attendais, mais cela a été au-delà de mes espérances. Alors à chaque fois je leur réexpliquais. Je reprenais l'exemple numérique et cela allait. Mais là, x négatif, cela ne passe plus. Alors là, moi après je ne sais plus quoi dire. Alors j'ai laissé couler. Bon quand ils me demandaient, je réexpliquais. Bon au bout d'un moment ils disent qu'ils ont compris soit par politesse, soit parce qu'ils en ont ras le bol.

La prise en charge se fait donc ici avec une autre stratégie : l'explication et la répétition de cette explication autant de fois que nécessaire. Mais Benjamin est bien conscient des limites de sa stratégie puisqu'il pense qu'à la fin certains élèves n'ont toujours pas compris, simplement il ne sait pas quoi faire d'autre. La difficulté didactique qu'il rencontre ici est visiblement le point de départ pour une analyse plus approfondie des problèmes que les élèves rencontrent face aux lettres, puisque, lors du troisième entretien, il précise :

B : Je crois que ce à quoi je ne m'attendais pas et ce sur quoi je me suis vraiment posé des questions, c'est l'histoire de la lettre. Je pense que le premier moment où c'est intervenu, c'est la valeur absolue. C'est là que je me suis rendu compte qu'il y avait un problème.

Comme nous l'avons pointé précédemment, à travers les deux premiers entretiens, le discours relatif aux difficultés des élèves à utiliser les lettres est resté relativement vague et, en particulier, Benjamin n'a jamais fait référence au rôle que les changements de statut de la lettre jouent. Pourtant, il a conscience de ces différents statuts puisque, dans son premier chapitre, il consacre un paragraphe aux lettres et fait noter aux élèves le texte suivant[53] :

---

[53] Pour une présentation plus claire, nous avons fait le choix dans notre thèse de retranscrire les différents extraits des préparations des stagiaires, de leur cahier de bord ou des cahiers de leurs élèves.

Les lettres servent à désigner : *- un nombre : a, b...* *- une inconnue : x, y...* *- un nombre fixé : π* *- une variable dans une fonction : x.*

Au cours du premier entretien, Benjamin nous a expliqué que, pour construire ses cours et choisir des exercices, il utilise trois manuels scolaires : "Pythagore"[54], le manuel officiel de la classe, "Pyramide"[55] et "Fractale"[56]. Il s'avère que, dans aucun de ces trois manuels, nous ne trouvons un tel texte et une telle référence explicite à l'existence de différents statuts de la lettre. Cela semble donc important pour lui dès le début de l'année. Mais ces changements de statut ne font pas partie de son système explicatif des difficultés de ses élèves.

Lors du troisième entretien, nous constatons que sa réflexion sur les difficultés d'élèves à utiliser les lettres a évolué et qu'il prend désormais en compte ces changements de statut. Visiblement, cette réflexion sur les différents statuts de la lettre est née lors de l'enseignement des équations de droites :

> B : Mais dans les équations de droites, y=ax+b, j'ai eu l'impression que pour eux x et y restent des inconnues, des choses qu'il faut déterminer. J'ai l'impression qu'ils ne comprennent pas que x représente n'importe quel nombre réel, une généralité. Je ne saurais pas te dire précisément quand j'ai ressenti ça.

Il s'agit de nouveau d'une difficulté bien connue : certains élèves peuvent rencontrer des problèmes liés aux changements de statut de la lettre lors du travail sur les équations de droites qui sont des équations qui ne sont pas à résoudre (la lettre passe ici du statut d'inconnue à celui de nombre généralisé ou de variable). Benjamin a donc de nouveau été sensibilisé à une difficulté bien identifiée mais il ne s'agit que d'une impression non soutenue par un épisode précis. Mais cette impression l'amène à réfléchir aux changements de statut de la lettre et sa réflexion s'est ensuite affinée lors de l'enseignement des fonctions. Ainsi, tout au long du troisième entretien, il laisse apparaître qu'il a réfléchi sur les différents statuts que peut prendre la lettre lorsqu'on travaille sur les fonctions et sur les difficultés que cela entraîne. Relativement à la notation fonctionnelle, il explique par exemple :

> B : Ce qui me pose problème aussi c'est la lettre x qui un coup est un nombre fixé et le x qui varie dans l'ensemble de définition. Cela rejoint ce que je disais tout à l'heure avec les équations. [...] Moi je me demande ce que veut dire x pour un élève, cela doit être un fouillis. On le met à toutes les sauces x en maths. [...] Et je me demande vraiment comment cela peut se passer dans la tête d'un élève. Même moi comment j'ai fait ? J'ai réussi mais sans m'en rendre compte. C'est pareil l'histoire du x où je ne me suis jamais posé la question. C'est venu naturellement, je ne sais pas.

Cette prise de conscience progressive du rôle joué par les changements de statut de la lettre lui permet d'améliorer son système explicatif des difficultés des élèves quant à

---

54 BONNEFOND G, DAVIAUD D., REVRANCHE B. (1994). *Mathématiques seconde*, Collection Pythagore. Editions Hatier.

55 TERRACHER P.H., FERRACHOGLOU R. (1998). *Math 2de*, Collection Pyramide. Editions Hachette.

56 BONTEMPS G., BRABANT P., CARNEC H., GARDES D., KCZACZKOWSKI M., NOUET M., SEROUX R. (1994). *Mathématiques seconde avec modules*, Collection Fractale. Editions Bordas.

l'utilisation de la lettre. Ceci le conduit alors, en fin d'année, à élaborer des stratégies d'enseignement pour prendre en charge ce type de difficulté. Par exemple, nous verrons lors de l'analyse de son enseignement sur les fonctions qu'il prévoit, au début du chapitre, une activité introductrice dans le but d'aider les élèves à s'approprier la notion de variable.

II.2.2 - Le sens des écritures algébriques :

Comme pour les difficultés décrites dans la partie précédente, Benjamin s'aperçoit très vite que certains de ses élèves ont des difficultés à lire ou à interpréter certaines écritures algébriques qu'il n'avait a priori pas prévues, comme il nous l'explique au cours du premier entretien :

> B : Il y a aussi une difficulté à laquelle je ne m'attendais pas du tout : ils ont énormément de difficultés avec les signes. Si on a le signe "×", on ne met pas de signe et il y en a qui sont perdus. J'ai encore eu le cas hier : on avait 4(x-7) "Monsieur, qu'est-ce qu'il y a entre 4 et x-7 ? ". Il y en a qui disent que c'est "×" et d'autres qui veulent mettre un plus. Je ne m'y attendais pas.

Il découvre, de nouveau, ici une difficulté, bien identifiée dans divers travaux, due aux caractéristiques de la syntaxe utilisée dans le système symbolique de l'algèbre et, en particulier, liée à l'implicite du signe "×". Pour lui, cette syntaxe est naturalisée et il enseigne à un niveau où il n'a pas, a priori, à préparer l'entrée dans le symbolisme algébrique (explicitation des différents implicites, règles ou conventions utilisés dans ce système). Par conséquent, ce n'est qu'au détour des questions ou erreurs de certains élèves qu'il découvre ce type de difficultés, qu'il interprète comme des difficultés à visualiser les opérations en jeu dans les expressions ("Beaucoup ont vraiment du mal à se rendre compte des opérations que l'on fait.") ou des difficultés liées à la confusion entre des opérations (dans le premier entretien il évoque souvent des confusions entre l'addition et la multiplication). Jamais il n'explicitera qu'il y reconnaît des difficultés liées à la syntaxe algébrique et il ne fera jamais explicitement non plus le parallèle avec l'arithmétique où tous les signes opératoires sont apparents.

Il fait alors le choix de consacrer une de ses premières séances d'aide individualisée à la prise en charge a posteriori de ce type de difficultés. Il met en place une activité[57], dont l'objectif est d'amener les élèves à donner du sens à des expressions algébriques à travers l'articulation entre le registre des écritures algébriques et celui du langage naturel, qu'il nous décrit ci-dessous :

> B : En ce qui concerne les difficultés avec les signes, je ne m'y attendais pas du tout. Je ne vois pas du tout d'où cela vient. Pour cela j'ai essayé de faire de l'aide individualisée, de détailler les opérations, j'ai écrit $4x^2+5$, qu'est-ce qu'on fait ? On prend 4 fois x^2 et on ajoute 5. Il y en a certains, ça marche, mais d'autres ne comprennent pas du tout. Il y en a qui sont incapables d'écrire la phrase.

Il s'avère que la feuille de modules étudiée par le sous-groupe lycée, lors de la deuxième séance de formation consacrée à l'algèbre, comportait un exercice de ce style[58].

---

[57] Dans cette activité, les élèves devaient d'abord traduire à l'aide d'une expression algébrique le programme de calcul suivant : "soit un nombre réel quelconque, noté x ; prendre le triple du carré de ce nombre ; retrancher 5 à l'inverse du résultat obtenu". Puis, dans une deuxième partie, ils devaient transcrire en langage naturel le programme de calcul décrit par les expressions algébriques successives suivantes :

$$x \longrightarrow (x+5)^2 \longrightarrow \frac{1}{3(x+5)^2} \longrightarrow 5+\frac{2}{3(x+5)^2}.$$

[58] Il s'agit de l'exercice 4 présenté en annexe 10.

L'analyse de cette situation par les stagiaires avait alors conduit à la considérer, notamment, comme un moyen de prendre en charge les difficultés des élèves à donner du sens aux écritures algébriques. Benjamin paraît donc réinvestir ici le travail mené en formation ; il nous le confirmera lors du premier entretien.

Cette stratégie est visiblement privilégiée au début de l'année où, pendant des séances "normales", il demande aux élèves qui ont de telles difficultés de "lire en français" les expressions algébriques. Puis il semble l'abandonner peu à peu, en privilégiant une seconde qui lui semble sans doute moins lourde, consistant à demander aux élèves en difficulté à écrire tous les signes opératoires.

Plus tard dans l'année, il sera, de nouveau, confronté à des difficultés de ses élèves lors de l'interprétation d'écritures algébriques particulières : les équations de droites. Il est ainsi particulièrement étonné de découvrir, au détour d'un exercice proposé après le travail sur les équations de droites, que les élèves ne donnent pas de sens à l'écriture $y = ax + b$, comme il nous l'explique lors du troisième entretien :

> B : [...] Dans cet exercice[59], je leur demande l'équation d'un cercle. Je voulais voir ce que cela donnait. Et là, le fait qu'un cercle ait une équation... Pour eux, une équation, c'est y=ax+b de toute façon. C'est pas évident à expliquer non plus. Ils me demandaient ce qu'il fallait faire. Je leur disais : une équation, c'est quoi ? y=ax+b. Mais oui, mais... J'essayais de leur faire dire que c'était une relation entre des coordonnées. Je ne pense pas que j'ai réussi. Et j'ai fini par leur dire.

Ce type de difficultés rencontrées lors du travail sur les équations de droites n'aurait rien d'étonnant pour un professeur confirmé, mais Benjamin n'est a priori pas conscient de ce genre de problème, même après avoir travaillé avec ses élèves autour de la notion d'équation de droite. Ceci le laisse visiblement assez dépourvu quant aux prises en charge qu'il peut alors proposer. Notons, toutefois, que le souci exprimé en début d'année de laisser une certaine place aux élèves, de les aider à s'approprier les différentes notions rencontrées en cours, le conduit ici à commencer par les interroger sur le sens qu'ils donnent à une écriture du type : "$y = ax + b$". C'est seulement parce que ses élèves ne savent pas répondre qu'il fait le choix d'expliquer lui-même.

En conclusion, au cours de son année de stage, Benjamin a découvert que ses élèves pouvaient rencontrer des difficultés lors de l'interprétation de certaines écritures algébriques, mais il n'évoquera jamais explicitement de "problèmes liés au sens". Par ailleurs, l'analyse de la formation en algèbre du sous-groupe lycée a montré que certains exercices de la feuille de modules avaient été sélectionnés de manière à amener les stagiaires à prendre conscience de

[59] Il s'agit de l'exercice suivant proposé lors d'une séance de modules avec l'objectif d'appliquer des résultats relatifs à l'orthogonalité dans le plan :

Soit, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points I(3 ; – 1), A(2 ; 1) et B(5 ; – 2). On appelle C le cercle de centre I passant par A. 1.a – Calculer le rayon de C. 1.b – B appartient-il à C ? 1.c – Donner une équation du cercle C. 2 – Soit (D) la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$. 2.a – Vérifier que A appartient à (D). 2.b – Montrer que (D) est perpendiculaire à (IA). 2.c – Que peut-on dire de (D) et C ?

ce genre de difficultés. Nous pouvons noter le peu d'influence de ce travail sur Benjamin qui n'avait visiblement pas prévu les problèmes explicités ci-dessus. En revanche, nous pouvons repérer le réinvestissement d'un de ces exercices pour mettre en place une stratégie de prise en charge.

II.2.3 - Les difficultés de formation et de traitement des écritures dans le registre des écritures algébriques :

Très rapidement au début de son stage, Benjamin est confronté à des difficultés de traitement des écritures numériques et algébriques et, suite au premier devoir surveillé qui a lieu un mois après la rentrée, il semble particulièrement marqué par le fait que ses élèves commettent diverses erreurs de calculs (dans son cahier de bord, il pointe ainsi des erreurs de signes, des difficultés à utiliser les valeurs absolues, à utiliser certaines formules sur les puissances, des simplifications abusives d'écritures fractionnaires avec des puissances...). Il n'est pas véritablement étonné par ce type de difficultés dans la mesure où, ayant commis lui-même des erreurs de calculs en tant qu'élève, il estime normal que des élèves de seconde en fassent également. En revanche, il est surpris par l'ampleur de ces difficultés, comme il nous l'explique dans le premier entretien :

> B : Sinon les difficultés auxquelles je m'attends, je dirais : des erreurs de calculs. Je l'ai constaté sur le premier DS, c'est vraiment important. Je m'y attendais plus ou moins. Je sais ce que c'est, j'en ai fait moi-même. Et puis c'est normal. Mais c'est vraiment important.

Ce constat le conduit alors à rechercher des causes : dans un premier temps, il se demande si ses élèves fournissent un travail personnel suffisant. Mais, il ne se contente pas de cette hypothèse et se questionne également sur ses propres pratiques, en particulier sur le travail technique mené avec ses élèves en début d'année, comme le montre la citation suivante :

> B : Est-ce que c'est eux qui n'ont pas assez travaillé ou est-ce que c'est moi qui ne les ai pas fait assez travailler ? J'en sais rien. Peut-être que je devrais plus insister. Mais si j'insiste plus, je passe deux fois plus de temps sur le chapitre. Je ne vois pas comment faire. $10^n + 10^p = 10^{n+p}$, on a fait suffisamment de calculs pour qu'ils se rendent compte qu'ils n'ont pas le droit d'écrire ça.

A travers cette citation, un autre aspect de la vision initiale de l'enseignement de l'algèbre chez Benjamin semble apparaître : il semble ici le concevoir, en partie, comme un enseignement de règles à appliquer (par exemple, on n'a pas le "droit" d'écrire $10^n + 10^p = 10^{n+p}$) et il n'évoque pas, en particulier, de difficultés des élèves à donner du sens aux manipulations en jeu.

Au cours des trois entretiens, Benjamin fera de nombreuses fois référence à de telles difficultés (notamment lors de la résolution d'équations ou d'inéquations, lors du développement et de la factorisation d'expressions algébriques) et il fournira très souvent de nombreux exemples très précis. En fait, comme nous l'avons précisé lors de la présentation de Benjamin, il s'est très vite approprié le cahier de bord, que nous lui avons demandé de remplir en début d'année, comme un outil de réflexion sur ses propres pratiques et il y a répertorié, en particulier, de nombreux problèmes rencontrés par ses élèves, comme il l'explique dans le deuxième entretien :

> AL : [...] J'ai l'impression que c'est assez facile pour toi de repérer les erreurs de tes élèves. Est-ce que c'est le fait que je t'ai demandé de remplir le cahier de bord qui favorise cela ?

B : Ouais beaucoup. [...] Là je m'efforce de regarder ce qu'ils font pour remplir le cahier de bord. Et ça m'intéresse parce que je me rends compte que quand je parle avec les formateurs ou avec n'importe quel autre collègue et que je dis : j'ai vu ça, ils me disent : oui, on a déjà vu ça des centaines de fois. Je me rends compte qu'on voit toujours la même chose. Donc ce que je vois là, cela me servira. La prochaine fois que j'aurai des secondes, je ferai en sorte d'éviter les erreurs que je vois là ou au contraire de l'amener pour voir...

Au cours de son année de stage, il s'est donc construit une sorte de catalogue où sont répertoriés des exemples très précis qu'il évoque ensuite au cours des entretiens de suivi. Ainsi, pendant une séance de modules consacrée à la transformation d'écritures algébriques, il relève des exemples d'erreurs lors de développements et de factorisations d'expressions algébriques qu'il note dans son cahier de bord, dont nous présentons ci-dessous un extrait :

__Développements :__

- $x \times 2x = 3x$

- erreurs de signes !

- beaucoup d'erreurs du type : $\times$ devient + à la ligne suivante

- Difficulté avec 3 fonctions : la plupart développent d'abord $(3x - 2)(1 - x)$ mais oublient les parenthèses

- $(3x - 2)(1 - x)(5x - 2 + 4(3 - x)) = 3x - 3x^2 - 2 + 2x\,(5x - 2 + 12 - 4x)$; certains n'ont pas le réflexe de réduire avant de développer

__Factorisations :__

- $C(x) = (x - 1)\,(7x - 4) - (x - 1)^2 = (x - 1)\,[7x - 4 - 1]$

→ Faire écrire à l'élève $(x - 1)^2 = (x - 1) \times (x - 1)$

- $E(x) = (3x - 2)^2 + (2x + 9)(6x - 4)$

La plupart des élèves détectent $(6x - 4) = 2(3x - 2)$ (sauf 1 cas de $(6x - 4) = 3\,(3x - 2)$) mais par la suite, l'expression devient :

$(3x - 2)\,[2(3x - 2) + (2x + 9)]$

ou $(3x - 2)\,[(2x + 9)\,2]$

ou $(3x - 2)\,[(2x + 9)\,2\,(3x - 2)]$

ou $(3x - 2)\,[(3x - 2) + (2x + 9) + 2]$

- Quelques cas de $36x^2 - 4 = (6x - 2)^2$

Nous pouvons ici pointer que le remplissage du cahier de bord ne se limite pas à un relevé très précis des différentes difficultés repérées, c'est aussi l'occasion pour Benjamin pour revenir sur les prises en charges effectuées ou à mettre en œuvre.

D'une manière générale, Benjamin semble moins surpris par ce genre de difficultés que par celles que nous avons évoquées dans les deux parties précédentes. Comme nous l'avons pointé ci-dessus, de par son expérience d'élève il s'attendait, en début d'année, à un certain nombre d'erreurs de calcul. Par ailleurs, le travail sur certains exercices de la feuille de module étudiée à l'IUFM semble l'avoir sensibilisé à certaines difficultés peut-être moins "naturelles" pour un enseignant débutant, comme il nous l'explique dans le premier entretien :

B : Si on a $(x+1)^2$, quand on factorise par $x+1$, dans le meilleur des cas il reste $x+1$, sinon il reste 1 ou alors il ne reste rien du tout. Ils ont vraiment de grosses difficultés là-dessus. Je m'y attendais. On en avait parlé en groupe, le formateur nous avait dit : ça, ça va pas louper. Et en effet ça n'a pas loupé. Là je ne m'y attendais pas vraiment au départ, c'est le formateur qui nous l'a dit.

Enfin, la correction des épreuves de l'évaluation nationale qu'il a fait passer à ses élèves environ une semaine après la rentrée lui a permis d'anticiper certaines de ces difficultés, comme dans le cas de la résolution d'équations qu'il nous décrit ci-dessous :

B : Je n'avais pas encore fait d'équations : résolution de 10-x = 0, x = $\frac{0}{10}$ ou x = $\frac{10}{0}$, encore de la confusion d'opération.

En début d'année, il reste toutefois surpris de la résistance de certaines de ces difficultés et il ne semble pas comprendre pourquoi ses élèves commettent toujours des erreurs autour d'une technique, pourtant déjà travaillée avec lui, qu'ils semblent maîtriser, comme dans l'exemple suivant qu'il nous propose lors du premier entretien :

B : Donc finalement tu reviens aux équations du premier degré, cela se passe pas mal. Sauf hier, mais là ce devait être une erreur d'inattention, parce qu'elle avait fait tout l'exercice bien et patatras! 2x=0, x=-2. Je lui dis non c'est pas ça. Il y en a quand même un qui a dit : non c'est x=2. Encore pire.

Notons que ce type d'erreur est bien repéré par différents chercheurs et est notamment analysé par Y.Chevallard (Chevallard, 1992). En tant qu'enseignant débutant, Benjamin y voit une erreur incompréhensible dans une équation aussi simple, pour une élève qui semble ne pas avoir de difficultés particulières (elle avait traité correctement le début de l'exercice). De ce fait il ne peut attribuer cette erreur qu'à de l'inattention. Il n'a pas encore identifié cette équation comme étant d'un type différent.

Par ailleurs, il s'aperçoit aussi, dès son premier mois d'enseignement, que certaines des difficultés que ses élèves rencontrent lors de la manipulation d'écritures algébriques se montrent fortement résistantes à une stratégie de prise en charge qu'il privilégie alors et que nous avons déjà évoquée : l'explication. Il nous expose, ainsi, une telle résistance rencontrée lors du travail sur les équations du second degré :

B : Alors, ici[60], il fallait appliquer une identité remarquable, mais ils ne passent pas le 2 de l'autre côté. Et, ensuite, ils font comme si c'était égal à 0. Mais bon, quand tu leur expliques : là si tu as 2, 2 × 2, ça fait 4, c'est pas ça du tout. Ceux-là, ils comprennent. Mais ils font l'erreur. C'est ça à chaque fois que tu leur expliques, ils comprennent, mais ils peuvent pas s'empêcher de faire l'erreur.

Comme nous l'avons pointé ci-dessus, Benjamin s'interroge, dès le début de l'année, sur l'origine des difficultés rencontrées lors de la manipulation d'écritures algébriques. Ainsi, comme pour les problèmes repérés lors de l'utilisation de lettres, il se questionne sur le niveau de familiarité de ses élèves avec certaines transformations d'écritures, comme le montre cet extrait du premier entretien, dans lequel il commente des difficultés rencontrées lors du travail sur le développement d'expressions algébriques :

B : Alors dans les développements x × 2x ça fait 3x. Pas mal d'erreurs de signes.

AL : Comment est-ce que tu interprètes l'erreur x × 2x égale 3x ?

P : Pour moi, c'est encore que × c'est la même chose que le signe +. Et là, je le comprends pas mal parce que, pour eux, je pense que x × x ça fait x^2, c'est peut-être pas tout à fait naturel. Je ne sais pas s'ils font beaucoup de trucs de ce genre au collège.

[...]

---

[60] Les élèves devaient résoudre l'équation : $(x-1)^2 - 3 = 2$.

AL : Oui ils en font. Par exemple, avec les identités remarquables en troisième.

B : Oui, mais je ne sais pas s'ils ont le réflexe... Bon, peut-être maintenant parce qu'ils commencent à manipuler. Et quand ils ont une identité remarquable $(a+b)^2$, souvent il y en a qui écrivent $(a+b) \times (a+b)$, quand c'est pas $(a+b) \times (a-b)$. Bon, tu leur dis: ah non, quand même maintenant... Mais, $(a+b) \times (a-b)$, je l'ai vu pas mal de fois quand même, c'est embêtant.

A travers cette citation, nous pouvons d'abord pointer l'ouverture d'esprit de Benjamin. Il se montre, en effet, très compréhensif face aux problèmes repérés dans sa classe et il trouve normal que certains puissent avoir du mal face à certaines écritures ou manipulations qui ne leur sont pas encore naturelles, même s'il estime qu'en classe de seconde certaines devraient être naturalisées. Notons également que la confusion d'opérations, que nous avons déjà évoquée dans la partie précédente, est aussi un élément du système interprétatif des difficultés rencontrées lors de certaines manipulations d'écritures algébriques. Enfin, nous voyons apparaître ici un nouvel élément de ce système à travers la référence à des "réflexes" qui ne sont pas encore acquis par ces élèves de seconde. Il s'avère que Benjamin traduit, en fait, ici un point fort de sa vision de l'enseignement de l'algèbre, comme nous allons le voir dans la suite de notre analyse. De même, il estime que ses élèves ne travaillent pas de façon assez méthodique et y voit la source d'un certain nombre de problèmes. Il l'exprime ainsi dans le premier entretien :

B : C'est là que j'ai expliqué l'exemple[61]. Une seule règle à la fois, car il y en a qui te font ça en deux coups de cuiller à pot et tout est faux. Et c'est ça qui est embêtant : tu ne peux pas leur expliquer leur erreur alors que si tout est détaillé, tu peux leur dire : regarde là quand tu es passé de là à là. Mais il y en a qui ,quand même, te font ça. Il y en a toujours des plus malins que les autres.

Rappelons que l'étude de la vision des mathématiques chez Benjamin a mis en évidence son goût pour les démonstrations structurées et son besoin de méthodes pour réussir certains examens à l'université. Nous voyons bien intervenir cette composante de sa logique personnelle dans cette stratégie d'aide.

A travers l'analyse d'autres difficultés rencontrées par les élèves, nous notons un autre élément du système interprétatif de Benjamin : les élèves ne disposent pas toujours des formules ou des règles adéquates qui leur permettraient d'éviter certaines erreurs. Cet aspect apparaît, notamment, dans le premier entretien lors de la description du travail mené sur des écritures fractionnaires littérales :

B : Et là voilà : beaucoup de simplifications abusives : $\frac{a+b}{a} = b$, cela ne loupe pas. [...] Mais, là, je comprends qu'ils simplifient. C'est trop tentant. Et ça, c'est peut-être une erreur de ma part : j'aurais peut-être dû leur rappeler la règle dans le cours : $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$, je l'ai pas fait. Je l'ai fait plus tard en module.

L'analyse des stratégies d'enseignement de Benjamin montrera que cet aspect de l'analyse des difficultés des élèves est complètement lié à certains traits de sa vision de l'enseignement de l'algèbre. Par ailleurs, cette citation fait, de nouveau, apparaître deux

---

[61] Lors d'un travail en séance de modules sur la transformation d'écritures numériques et algébriques faisant intervenir des puissances, Benjamin présente un exemple de tâche (Déterminer le signe de $A = -\frac{6^{-3} \times 8^4}{12^2 \times 93}$) en insistant sur l'intérêt d'appliquer une seule règle de calcul sur les puissances à la fois.

éléments que nous avons déjà pointés : la compréhension de Benjamin face aux erreurs repérées dans la classe et le regard critique qu'il a relativement à ses propres pratiques.

Le souci de prendre en charge ce type de difficultés a posteriori est déjà apparu à plusieurs reprises à travers cette partie. Nous avons, ainsi, pointé plusieurs stratégies mises en place dès le début de l'année qui consistent, par exemple, à aider les élèves à avoir un regard critique sur leurs réponses ou à donner du sens aux écritures algébriques. Les entretiens avec Benjamin mettent aussi en évidence qu'il a construit certaines de ses stratégies d'enseignement dans le but de prendre en charge a priori de telles difficultés. Ceci est, en particulier, le cas lors du travail de révision sur les équations du premier degré qu'il a débuté par une reprise des règles de résolution étudiée au collège. En effet, visiblement conscient a priori que la stratégie de résolution qui consiste "à passer les nombres de l'autre côté", mise en place par de nombreux élèves, peut être à l'origine d'un certain nombre d'erreurs, il décide, dans son cours, de reprendre la technique de résolution avec la volonté de restituer le sens des différents gestes à effectuer, comme il nous l'expose lors du premier entretien :

B : Mais alors la résolution de $3x+2=0$, je l'ai faite proprement, c'est-à-dire : $3x+2=0$, $3x+2-2 = 0-2$. En mettant en rouge. Parce que dès que j'ai dit : on va résoudre ça. Ils m'ont dit : ouais on passe le 2 de l'autre côté. Ce que je fais aussi mais... Alors, j'ai eu beaucoup de réticences : ouais, cela ne sert à rien d'écrire ça. Alors je leur ai dit : c'est vrai, ça il ne faut pas l'écrire, sauf si vous en éprouvez le besoin, mais je détaille parce que c'est comme ça que cela se fait. Mais ça ne passe pas, pour eux, tu vois, c'est passer b de l'autre côté. Pareil pour la division. Et à mon avis c'est ce qui les induit en erreur.

Benjamin est ici confronté à une difficulté didactique relative à la stratégie qu'il présente dans le cours et qu'il voudrait que ses élèves emploient : elle n'est pas compétitive par rapport à celle qu'ils utilisent (d'où les réticences rencontrées). Elle restera toutefois le moyen privilégié pour prendre en charge les difficultés que les élèves rencontreront ensuite, comme il nous l'explique sur un exemple précis :

B : Je leur dis : écris comme je le fais, tu verras que ce n'est pas pareil du tout. Alors tu leur fais écrire : ah oui c'est vrai... Je ne sais pas s'ils le referont le prochain cours. Voilà, tu ne leur dis pas : non c'est faux, c'est ça. Là tu leur montres : regarde, si tu avais fait comme je t'ai expliqué... [...] Alors là, des difficultés quand il y a des quotients : $\frac{x}{2}=\frac{4}{3}$, $x=\frac{4}{6}$. Là pareil : non là, tu multiplies par 2 et ils constatent... [...] Donc ça tu vois, j'ai marqué : les obliger à détailler les opérations.

Cette démarche qui consiste à revenir sur le sens des gestes mis en jeu lors de la manipulation d'écritures algébriques n'est, cependant, pas toujours mise en œuvre. En effet, pour d'autres types de tâches algébriques, la prise en charge des difficultés se fait à travers l'étude d'un algorithme que les élèves doivent acquérir et qui doit devenir mécanique, comme dans le cas des équations du second degré en début d'année:

B : Là, j'en suis dans les équations et mon objectif est que, dès qu'ils voient une équation du second degré, ils aient le réflexe de factoriser. Ce qu'ils n'ont pas du tout : il y en a encore qui développent. Dans le cours, je leur ai détaillé la méthode en leur disant qu'il fallait se ramener à une équation du type un membre égal à 0, ensuite on factorise et on applique la propriété, etc. Mon principal objectif c'est ça, c'est que cela devienne un mécanisme.

Au cours de cet entretien, Benjamin ne précise pas comment a été justifiée cette technique ; l'étude des stratégies d'enseignement permettra de le déterminer. En revanche, nous pouvons, de nouveau, pointer sa volonté de faire acquérir des mécanismes, des réflexes à ses élèves. La prise en charge a posteriori de difficultés rencontrées lors de la résolution d'équations du type $x^2 = a$ avec a positif, en particulier l'oubli de la solution négative, confirme cette volonté :

B : Dans cet exercice, l'équation c'était : $16x^2 = 900$. Donc x^2 égale machin, donc x égale la solution positive. L'élève qui était au tableau a fait ça. Je lui demande : il n'y a que ça comme solution. Je l'avais rappelé dans le cours. Personne ne voit rien. Et il y en a un qui finit par me dire : il y a aussi moins racine. [...] J'ai remarqué qu'à chaque fois que je donnais ça, il n'y a qu'une solution. Au début que je l'ai fait d'ailleurs, ils ne voyaient vraiment pas la deuxième solution. Bon cela devrait être vu quand même, mais ils ne s'en rappellent vraiment pas.

Contrairement à ce qu'il a décrit pour les équations du premier degré, il ne met visiblement pas en place de stratégies[62] qui permettraient d'amener les élèves à percevoir l'existence d'une deuxième solution, mais il veut qu'ils se remémorent un résultat du cours.

II.2.4 - Les difficultés rencontrées lors d'articulation de registres :

Comme nous l'avons précisé précédemment, Benjamin semble avoir été sensibilisé, lors de la deuxième séance de formation relative à la didactique de l'algèbre, à l'intérêt de certains exercices mettant en jeu une articulation entre le registre des écritures algébriques et celui du langage naturel, pour prendre en charge les difficultés de certains élèves liées à l'interprétation d'expressions littérales. Dans le cadre de ce travail qui a lieu tôt dans l'année, il s'aperçoit que ses élèves rencontrent des problèmes pour passer d'un registre à l'autre. La passation des évaluations nationales le conduit également à constater ce type de difficultés lors de la mise en équation, comme il nous l'explique lors du premier entretien :

B : On leur demandait la formule littérale de l'aire[63], on voulait que cela fasse 20 cm², je crois, et il y en a qui ne voient pas du tout comment on pose l'équation. [...] La difficulté était de dire : je connais la formule littérale de l'aire, l'aire doit faire tant. Ils sont incapables de mettre un signe "= "entre les deux. Il y en a très peu qui m'ont donné l'équation.

Lors du travail sur la mise en équation de problèmes, qui a lieu quelques semaines après ce constat, Benjamin ne semble pas avoir mis en place de stratégie particulière pour aider a priori les élèves dans ce type de tâches. En revanche, lors de la modélisation de problèmes énoncés en langage naturel qui lui semblent compliqués pour les élèves, il choisit de les aider en les guidant par un ensemble de questions. Lors du premier entretien, il nous expose, ainsi, les aides apportées et les difficultés rencontrées lors de la résolution d'un exercice[64] traité lors d'une séance de modules :

B : Donc voilà la mise en équation, là ils savent pas. Je leur ai demandé combien il y a de frères et sœurs en tout. J'avais posé x le nombre de sœurs et là tu as de tout : tu as x ou 2x ou... Je leur ai dit : imaginez

---

[62] Il existe des stratégies s'appuyant sur des factorisations ou sur le graphe de la fonction carré qui peuvent amener les élèves à percevoir l'existence d'une deuxième solution.

[63] Le lecteur trouvera en annexe 3 l'énoncé du problème auquel Benjamin fait ici référence.

[64] L'énoncé de ce problème est le suivant :

Martin, qui a autant de frères que de sœurs, partage équitablement une boîte de dragées avec eux. S'il prend sa part, chaque frère et chaque sœur recevra 12 dragées. Mais il décide de laisser sa part aux autres qui reçoivent ainsi 14 dragées chacun. a – Combien Martin a-t-il de sœurs ? b – Combien y avait-il de dragées dans la boîte ?

combien les parents ont d'enfants. Ils finissent par te dire que c'est 2x+1. Bon, après la mise en équation pose problème. Là j'ai pris un problème concret : imaginez, on a 3 enfants, on leur donne 10 dragées chacun, combien il y a de dragées ? 30. Bon là il y a 2x+1 enfants, chacun en a douze cela fait combien ? Et là il y en a un qui m'a dit : cela ne sert à rien avec le premier cas de figure, cela suffit. Oui mais je lui dis : et tu fais quoi quand tu as ce cas de figure ? Il ne savait plus. Je lui ai dit : c'est l'intérêt d'avoir les deux. Donc je leur ai fait écrire les deux expressions et j'avais fait écrire : le nombre total de dragées est... Et chacune des deux expressions. Après il y en a qui disent que c'est égal. La résolution de l'équation ne pose pas de problème. Et après pour trouver le nombre total de dragées tu te retrouves avec deux formules et là j'ai demandé : laquelle on utilise ? La première... La deuxième... Il y en a qui disent qu'on ne peut pas prendre la deuxième car Martin n'est pas compté... Tu vois c'est pas... J'ai insisté en leur disant de bien faire étape par étape, en regardant chaque donnée l'une après l'autre. Bon c'est vrai que c'est difficile pour eux, ça je le comprends.

A travers cette citation, nous retrouvons différents points que nous avons pointés dans les parties précédentes : le poids de sa stratégie de prise en charge par le passage au numérique, l'attention portée aux élèves et le souci de leur donner des méthodes pour réussir (J'ai insisté en leur disant de bien faire étape par étape, en regardant chaque donnée l'une après l'autre.). Par ailleurs, Benjamin se montre de nouveau très compréhensif face aux difficultés rencontrées par ses élèves et soucieux de faire participer sa classe. Le dispositif décrit ci-dessus permet, en fait, de laisser une place aux élèves, mais il leur facilite fortement la tâche et leur laisse peu de responsabilités.

Au début de son stage, Benjamin n'est pas sensible à l'intérêt d'articuler le registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques lors de l'étude de certains types de tâches algébriques, comme le montrera l'analyse de ses stratégies d'enseignement. Ce n'est que dans le cadre du chapitre sur l'étude des fonctions qu'interviendra ce type d'articulation. Néanmoins certains commentaires de son cahier de bord montrent que, lors du travail sur les équations de droites ou lors de la résolution de systèmes d'inéquations, il a repéré quelques difficultés liées à ce changement de registres. Ainsi, Benjamin signale qu'après avoir déterminé que l'ensemble des points de coordonnées (x ; y) tels que $y < ax + b$ est un demi-plan dont la frontière est la droite d'équation $y = ax + b$, certains élèves ont du mal à comprendre que la solution d'un système d'inéquations à deux inconnues soit représentée par l'intersection de tous les demi-plans qui représentent les solutions de chacune des inéquations du système. De même, il note que plusieurs élèves ne savent pas tracer la droite d'équation $y = 3$: il explique que certains tracent la droite d'équation $x = 3$ ou $y = 3x$ ou $y = x + 3$. Néanmoins, ces difficultés ne seront pas abordées dans les entretiens de suivi. Nous faisons alors l'hypothèse que Benjamin les a plus considérées comme anecdotiques et n'a pas été particulièrement marqué par ce type de problème.

II.3 - Difficultés rencontrées lors de l'utilisation de l'algèbre pour généraliser ou pour prouver :

Dès le début de l'année, Benjamin repère à partir d'un exercice extrait des évaluations nationales[65] que certains élèves généralisent des résultats à l'aide d'exemples, comme il nous l'explique lors du premier entretien :

[65] Le lecteur trouvera en annexe 3 l'énoncé de cet exercice.

B : L'exercice 3, c'est de l'algèbre. C'était un tableau à remplir. Il y avait un exemple au début : on leur demandait le signe de – 5x et il fallait argumenter. Je m'y attendais : beaucoup considèrent que x est positif. Beaucoup de généralisations à l'aide d'un exemple.

Ce type d'erreurs ne le surprend visiblement pas. Mais, suite à ce constat, il ne mettra pas en place de stratégie de prise en charge. Nous pouvons même, pointer que sa stratégie, qui consiste à proposer des exemples numériques risque de conforter ses élèves dans ce type de pratique. En effet, elle est mise en place dans deux types de situations : la proposition de contre-exemples pour montrer qu'un résultat est faux ou la généralisation d'une propriété à partir d'exemples. Ainsi, lors du travail sur la comparaison de nombres, Benjamin s'aperçoit que ses élèves ne comprennent pas pourquoi, si deux nombres sont positifs, leur somme est positive. Il nous explique alors dans le deuxième entretien comment il a aidé ses élèves à saisir ce résultat :

B : Alors après dire comme b et a sont positifs, b+a est positif... Ouais, bof... Est-ce que c'est déjà trop, je ne sais pas trop... ? Là je ne sais pas du tout. [...] Alors je reviens toujours à des exemples numériques : tu prends a=1, b=2, cela fait 3, c'est positif. Prenons plusieurs exemples comme ça. Ils finissent par être convaincus mais après, une fois que l'on revient à b+a positif, cela ne va plus.

Il existe clairement une ambiguïté entre ce type de prise en charge et le fait qu'il aimerait que ses élèves ne généralisent pas à partir d'exemples. L'analyse de ses stratégies d'enseignement et, plus particulièrement, des entretiens relatifs à la séance que nous avons filmée dans sa classe montrera, ultérieurement, que ce n'est qu'à la fin de son année de stage que Benjamin prendra conscience de cette ambiguïté. Ceci le conduira à s'interroger sur la possibilité et l'intérêt d'un travail spécifique sur la notion de contre-exemple en classe de seconde. Ce questionnement survenu en fin d'année restera ouvert, comme il nous l'explique lors de notre dernière rencontre :

AL : Est-ce que tu te poses encore des questions sur l'enseignement de l'algèbre ?

B : Ouais... Pour moi l'histoire des exemples, contre-exemples, il faut que j'y réfléchisse.

Néanmoins, le choix de Benjamin d'amener sa classe à généraliser certaines propriétés par des exemples s'explique certainement par le fait qu'il a également repéré, lors du travail sur les inéquations, que ses élèves rencontraient de grosses difficultés à comprendre des preuves algébriques de certains résultats (nous reviendrons sur ce travail dans le paragraphe consacré à l'analyse de ses stratégies d'enseignement). Malgré ce type de problèmes, Benjamin continue à prouver algébriquement certaines propriétés car cela lui semble important de présenter de tels raisonnements en classe de seconde. Il nous l'explique lors du troisième entretien :

B : J'essaie un petit peu de leur faire des démonstrations pour qu'ils voient un peu ce que c'est.

AL : Cela s'est bien passé ?

P : Moyen, parce que j'ai l'impression que cela leur paraît artificiel, surtout de travailler avec des lettres comme ça, ils savent pas trop. Quand je leur dis : si on sait que a-b est négatif, alors on sait que a est inférieur à b, ils acquiescent parce qu'ils arrivent à manipuler l'inégalité. Mais quand ça vient dans une démonstration, il y a quelque chose. Quand il s'agit de mettre en jeu cette méthode, cela ne va pas. Là j'ai encore eu le coup hier, je leur ai fait une démonstration pour le vecteur directeur d'une droite dont on connaît l'équation. Je leur ai fait une vraie démonstration et c'est la pataugé complète. Ils se laissent perdre par les lettres, ils sont perdus tout de suite. Pourtant j'essaie de détailler, de m'arrêter, d'en parler avec eux mais ça... Ça passe mal.

Les difficultés rencontrées alors par ses élèves le laissent visiblement démuni et son interprétation reste assez vague ("Ils se laissent perdre par les lettres"). Nous pouvons d'ailleurs repérer que, pour ce type de travail qu'il sait difficile, il fait le choix de prendre en charge lui-même la question tout en veillant à proposer quelque chose de clair et de faire participer ses élèves qui ont donc peu de responsabilités. Nous retrouvons ici la même stratégie que celle décrite dans la partie précédente pour la mise en équation de problèmes. En fait, le type de tâches "prouver un résultat en utilisant l'algèbre" ne sera laissé à la totale responsabilité des élèves que dans le travail sur les fonctions lors de l'étude des variations ou de la parité, par exemple. Benjamin sera alors confronté à des difficultés résistantes, qu'il nous expose lors du troisième entretien :

B : Sinon il y a toujours des problèmes : les histoires de recherche de parité. Ça, je l'ai revu encore très tard : prendre une valeur pour montrer qu'elle est paire ou impaire. C'était récurrent dans tous les chapitres : il y a quand même un tas d'irréductibles dans cette classe. Vraiment non cela ne rentre pas. Peut-être que l'année prochaine cela aura mûri. J'ose l'espérer. Surtout que j'ai, quand même, passé pas mal de temps là-dessus.

La prise de conscience de la résistance de ce genre de difficultés contribuera également à amener Benjamin au questionnement relatif à la notion de contre-exemple que nous avons précisé ci-dessus.

Les résultats obtenus dans cette étude consacrée à la vision de Benjamin des élèves et de leurs difficultés seront intégrés de façon synthétique au profil de Benjamin que nous présenterons dans le paragraphe IV. Analysons maintenant les stratégies d'enseignement élaborées par Benjamin.

III - ANALYSE DE SES STRATEGIES D'ENSEIGNEMENT :

Nous consacrons ce troisième paragraphe à l'étude des stratégies d'enseignement en algèbre de Benjamin afin de comprendre comment il les élabore, de pointer ses priorités, de repérer les différents savoirs explicités dans la grille d'analyse de la compétence professionnelle qu'il met en jeu dans ces élaborations. Comme nous l'avons déjà explicité dans le troisième chapitre consacré à la méthodologie générale de notre travail, nous mènerons cette analyse à travers deux axes : l'étude des praxéologies mathématiques mises en place par Benjamin et celle de ses praxéologies didactiques. A travers ce travail, nous étudierons aussi comment il prend en compte ses élèves lors de l'élaboration et la mise en place de ses stratégies d'enseignement. Enfin, ce questionnement sera également l'occasion de mesurer l'influence des manuels scolaires (en particulier celui de la classe) et d'autres ressources didactiques sur la construction du rapport professionnel à l'algèbre de Benjamin.

Dans le troisième chapitre de notre thèse, nous avons également précisé que l'étude de l'enseignement de l'algèbre par un professeur stagiaire en classe de seconde nous semble particulièrement appropriée à notre recherche, dans la mesure où les enseignants y sont amenés à mettre en place à la fois le travail sur des objets déjà rencontrés par les élèves au collège, l'introduction de nouvelles tâches algébriques et l'entrée dans une nouvelle fonctionnalité de l'algèbre (un outil au service des fonctions). Nous avons donc choisi d'analyser les stratégies d'enseignement de Benjamin à travers quatre chapitres où apparaissent ces différents aspects du travail algébrique : le premier chapitre de l'année ("Calcul numérique", qui s'est déroulé du 7/09 au 27/09/99), le deuxième ("Equations", période du 28/09 au 16/10/99), le quatrième ("Inéquations", période du 23/11/99 au 4/01/2000) et le sixième ("Fonctions", période du 29/02 au 25/03/00). Afin de mesurer d'éventuelles évolutions dans l'élaboration des stratégies d'enseignement au cours de l'année, nous avons fait le choix d'analyser successivement chacun de ces quatre chapitres, chacune de ces études étant menée suivant un questionnement spécifique à chaque chapitre, élaboré à partir des savoirs explicités dans la grille d'analyse de la compétence professionnelle et à partir de considérations didactiques plus larges. Ces questionnements, ainsi que les méthodologies employées, seront précisés lors de la présentation de ces quatre analyses.

III.1 - Analyse du chapitre "Calculs numériques" :

Dans ce paragraphe, nous étudions le premier chapitre de l'année intitulé "Calculs numériques" consacré à la fois à un travail de révision sur des notions déjà étudiées au collège et à l'introduction de thèmes nouveaux[66], comme le montre le plan du cours que nous reprenons ci-dessous :

I - Les nombres et les lettres
- 1 - Les nombres entiers naturels
- 2 - Les nombres entiers relatifs
- 3 - Les nombres décimaux
- 4 - Les nombres rationnels
- 5 - Les nombres réels
- 6 - Rapports entre les ensembles
- 7 - Notation
- 8 - Les lettres
- 9 - Définitions

II - Le calcul dans $\mathbb{R}$
- 1 - Propriétés de calcul
  - a - Développement, factorisation
  - b - Fractions
  - c - Identités remarquables
  - d - Puissances
- 2 - Notation scientifique
- 3 - Racines carrées

III - Distance et valeurs absolues
- 1 - Distance entre deux nombres
- 2 - Valeur absolue

A l'intérieur de ce chapitre figurent certains éléments relatifs au calcul littéral, comme par exemple la manipulation d'écritures fractionnaires littérales ou le développement et la factorisation d'expressions algébriques. Il nous semble donc intéressant d'étudier ce chapitre pour analyser l'élaboration des premières organisations mathématiques et didactiques relatives à l'algèbre et, en particulier, au calcul littéral.

Dans une première partie, nous préciserons le questionnement spécifique que nous avons élaboré pour l'analyse de ce chapitre. Puis, nous présenterons une première analyse des pratiques de Benjamin, qui nous a en particulier permis de pointer que le manuel de la classe est l'une des sources didactiques privilégiées par Benjamin pour ce chapitre. Afin de mesurer

[66] Le lecteur pourra se reporter en annexe 13 pour consulter les programmes de la classe de seconde en vigueur en 1999/2000.

l'influence de cet ouvrage sur la construction du rapport professionnel de Benjamin, nous analyserons, dans une troisième partie, le champ des possibles offerts par ce manuel. Enfin, dans une dernière partie, nous étudierons précisément certaines stratégies d'enseignement construites par Benjamin.

III.1.1 - Notre questionnement :

Comme nous l'avons déjà précisé dans le paragraphe consacré à la dimension didactique de la grille d'analyse de la compétence professionnelle en algèbre, un des enjeux de l'enseignement du calcul littéral en classe de seconde est de préparer l'utilisation de l'algèbre pour l'étude des fonctions. Cette préparation nécessite d'une part de changer le rapport des élèves à certains types de tâches mathématiques et d'autre part de les amener à développer une certaine intelligence du calcul algébrique. L'analyse de ce premier chapitre sera donc centrée, dans un premier temps, autour d'un questionnement spécifique à l'algèbre destiné, en particulier, à analyser les organisations algébriques présentes dans ce chapitre afin de pointer si elles permettent ou non de préparer cette évolution du rapport à l'algèbre que l'on pourrait attendre d'un élève en seconde. Comme nous l'avons déjà précisé dans le paragraphe relatif à la dimension didactique de la grille d'analyse de la compétence professionnelle, la préparation à l'utilisation de l'algèbre pour étudier les fonctions passe par un travail sur le sens des écritures littérales et des manipulations, sur la reconnaissance de formes, sur la dénotation d'expressions algébriques et sur l'articulation entre différents registres. Par ailleurs, un autre aspect de cet enjeu de l'enseignement de l'algèbre en classe de seconde est d'amener progressivement les élèves à être plus autonomes dans les calculs. Ces considérations nous ont amenée à retenir les questions suivantes :

- Y a-t-il un travail spécifique sur le sens ou la dénotation des écritures algébriques ?
- Benjamin intègre-t-il, dans son enseignement, des tâches algébriques mettant en jeu des articulations de registres ?
- Les organisations mathématiques choisies permettent-elles de développer l'autonomie des élèves relativement au calcul littéral ?

Par ailleurs, une certaine intelligence du calcul algébrique ne peut vraisemblablement pas se développer uniquement à travers des exercices "techniques" complètement balisés. En revanche, des exercices mettant en jeu l'algèbre dans sa dimension "outil" peuvent contribuer à un tel développement. Une deuxième partie de notre questionnement est donc centrée sur les deux dimensions "outil" et "objet" de l'algèbre :

- Ces deux dimensions sont-elles articulées à travers le travail algébrique proposé par Benjamin ?
- Concernant la dimension "objet", comment le travail technique est-il mené ? Sur quels types d'exercices ? Quel est le niveau de complexification des tâches mathématiques ?
- Pour la dimension "outil", quelles fonctionnalités Benjamin privilégie-t-il ?

Parallèlement à ce questionnement spécifique à l'algèbre, nous analyserons les pratiques de Benjamin d'un point de vue didactique plus général. Nous nous sommes donc proposé d'étudier les questions suivantes :

- Quels sont les organisations didactiques privilégiées par Benjamin ?

- Comment élabore-t-il ses stratégies d'enseignement et d'évaluation ? Quelles sont ses priorités ?
- Sur quelles ressources didactiques s'appuie-t-il ?
- Comment est gérée la transition didactique avec le collège dans ce premier chapitre consacré à l'algèbre ? En particulier, comment Benjamin prend-il des informations sur les connaissances et les besoins de ses élèves ?

Avant l'étude de ces questions, qui fera l'objet de la partie III.1.5, nous tenons à présenter une première analyse des pratiques de Benjamin.

III.1.2 - Une première analyse des pratiques de Benjamin :

Conformément à la vision de l'algèbre qu'il exprime au début de son stage (cf. page79), Benjamin choisit de commencer par un chapitre consacré à des calculs, qu'il aborde comme un chapitre ne devant pas sembler trop délicat à ses élèves, ainsi qu'il nous l'explique lors du premier entretien :

> B : J'avais hésité entre les calculs et la géométrie. Mais la géométrie cela leur fait peur. Alors que les calculs cela passe bien, c'est pas trop violent. C'est vraiment la continuité du collège. Puis ce n'est que des calculs, il n'y a rien de vraiment difficile.

Malgré cette impression de facilité pour les élèves, Benjamin se montre tout de suite soucieux de leur proposer un travail clair et structuré. Ainsi, lors du premier entretien, il nous précise que, pour l'élaboration du texte de cours, il a fait le choix de "faire quelque chose de succinct, de clair". Ce souci apparaît également dans les critères de sélection d'exercices, qu'il explicite au cours de cette première rencontre :

> B : J'essaie de trouver des exercices où il y a des trucs qui pourraient leur donner l'idée, pour qu'après ils aient le réflexe. [...] Les exercices, j'en mets des très simples. Ensuite j'essaie de faire très rapidement des exercices d'application du cours et, après, on va voir un peu plus loin.

Lors de l'étude des questions présentées dans la partie précédente, nous reviendrons de manière plus précise sur le choix des exercices. Mais nous tenons à pointer, d'ores et déjà, qu'un mois après son entrée en fonction, Benjamin a déjà des idées très précises sur la structuration du travail technique qu'il souhaite proposer à ses élèves. En revanche, la préparation des premiers cours semble avoir été un peu plus problématique pour lui, comme il nous l'explique ci-dessous :

> B : Quand il faut préparer tes cours au début, c'est pas évident. Bon j'avais récupéré le cours... Moi mon cours de seconde, cela n'a plus rien à voir. J'avais celui de mon frère, qui a fait sa seconde il y a quatre ans. Je me suis un peu inspiré de ça, un peu de ça et puis voilà.

En fait, dès le début de l'année, Benjamin a choisi de travailler simultanément avec les trois manuels, le Pythagore[67], le Fractale et le Pyramide (déjà évoqués dans le paragraphe consacré à sa vision des élèves et de leurs difficultés), et avec l'ancien cours de son frère (que nous n'avons pas consulté). Pour le choix des exercices, il semble privilégier le manuel officiel de la classe, le Pythagore, comme nous allons le constater ci-après, mais il n'y trouve

[67] Nous avons fait le choix de désigner les manuels par leur collection plutôt que par les auteurs, comme cela est couramment fait par les enseignants.

visiblement pas toujours des exercices qui lui semblent intéressants ; dans ce cas, il écrit des feuilles d'exercices supplémentaires en s'inspirant des deux autres manuels.

Une cohérence certaine apparaît également très tôt dans la structuration de ce chapitre[68]. En effet, dès la première semaine, le cours est segmenté en sous-thèmes, chacun d'entre eux étant généralement abordé dans une séance qui lui est entièrement consacrée. Après chaque cours, Benjamin propose immédiatement des exercices d'application en classe et, à la fin de chaque séance, les élèves ont des exercices à préparer pour la fois suivante. Quant aux séances de modules, elles sont consacrées à des exercices relatifs à des sous-thèmes déjà étudiés en cours.

A l'intérieur de ce chapitre, les élèves ont traité vingt-deux exercices du Pythagore, deux activités et quatre fiches d'exercices supplémentaires et ils ont été évalués deux fois (une interrogation en cours de chapitre et un contrôle à la fin). En fait, le nombre d'exercices tirés du manuel de la classe nous autorise à poser l'hypothèse qu'il s'agit d'une source didactique privilégiée par Benjamin. Par ailleurs, une comparaison de sa progression avec celles des trois manuels qu'il utilise fait apparaître qu'il s'est, en partie, appuyé sur le Pythagore, le seul des trois manuels où la valeur absolue est abordée dès le premier chapitre. Ceci tend à confirmer notre hypothèse. Notons toutefois que Benjamin semble aussi s'être inspiré du Pyramide, dans lequel le cours commence par l'étude des ensembles de nombres.

Nous consacrons donc le paragraphe suivant à l'analyse du champ des possibles dans ce manuel afin de pouvoir, lors de l'étude des stratégies d'enseignement élaborées par Benjamin, situer ses choix au regard de ceux effectués par les auteurs du manuel.

III.1.3 - Analyse du champ des possibles dans le manuel de la classe :

L'étude des thèmes algébriques abordés par Benjamin dans son premier chapitre est présentée dans le premier chapitre du manuel, intitulé "Calculs", qui est consacré en partie à une transition avec le collège, puisque de nombreuses notions déjà rencontrées par les élèves y sont abordées (fractions, puissances, racines carrées, proportionnalité, égalités remarquables, équations du premier degré...). C'est également le lieu d'introduction de deux nouveaux thèmes du programme de la classe de seconde : les ensembles de nombres et la valeur absolue. Pour ne pas alourdir notre texte, nous avons fait le choix de ne présenter ici que l'étude du champ des possibles dans ce manuel, relativement à la transition avec le collège. En nous appuyant sur le questionnement spécifique à l'algèbre que nous avons présenté dans la partie III.1.1 et que nous allons utiliser pour analyser les pratiques de Benjamin en début d'année, nous nous proposons alors d'étudier si les types de tâches proposés permettent une évolution du rapport des élèves avec des notions déjà rencontrées, qui permettrait en particulier de préparer l'utilisation de l'algèbre comme outil pour l'étude des fonctions.

Comme nous l'avons précisé précédemment un certain nombre de notions déjà étudiées au collège sont abordées dans ce chapitre. Pour certaines d'entre elles (fractions, puissances, racines carrées), les compétences exigibles en fin de collège se situent uniquement

[68] Benjamin a consacré douze séances à ce chapitre (dont quatre de modules) sur la période du 7/09/99 au 1/10/99 ; le lecteur pourra se reporter à l'annexe 17 pour consulter le contenu précis de chacune de ces séances, sur lequel nous reviendrons dans la suite de notre étude.

dans le cadre numérique. Or le travail algébrique ultérieur, notamment lors de l'étude des fonctions, demandera des compétences dans le cadre algébrique. Ce changement de cadre à venir nécessite de faire évoluer le rapport des élèves à ces notions et d'introduire des types de tâches, sans doute nouveaux pour un certain nombre d'élèves. Pour ce type de notions, nous avons étudié si les exercices proposés par les auteurs offraient la possibilité de choisir des tâches qui permettraient une telle évolution. Nous présenterons ici l'étude menée sur la notion de fraction et nous donnerons les conclusions des études similaires menées sur les notions de puissance et de racine carrée.

D'autres notions plus spécifiques à l'algèbre sont abordées dans ce chapitre : égalités remarquables, développements et factorisations d'expressions algébriques, équations du premier degré, formules. Le travail algébrique ultérieur demande également un changement de rapport au calcul littéral. Nous étudierons ici si les exercices proposés permettent d'envisager un tel changement.

III.1.3.1 - Analyse du travail sur les fractions :

Pour préparer le travail sur les notions de fraction, puissance et racine carrée, les auteurs proposent trois activités de révision où différentes règles de calcul dans $\mathbb{R}$ déjà étudiées au collège sont mises en jeu. Ces trois activités peuvent constituer un moyen de prendre des informations sur les connaissances et les besoins des élèves.

Les auteurs du Pythagore ne proposent pas de cours dans ce chapitre relativement à ces règles de calculs. En revanche, plusieurs fiches, résumant différents aspects théoriques et technologiques sur ces notions, sont disponibles à la fin du manuel.

La partie "Exercices" est divisée en deux rubriques : la rubrique "Savoir-faire" qui regroupe des exercices destinés à l'entraînement et la rubrique "Chercher" avec des exercices qui demandent souvent plus d'initiative. La notion de fraction apparaît dans quatorze exercices de la partie "Savoir-faire" avec pour objectif d'amener les élèves à retravailler les règles de calcul. Les huit premiers exercices sur les fractions de cette partie sont proposés dans un cadre numérique et mettent en jeu des types de tâches mathématiques déjà rencontrés au collège : calculer la somme ou le produit de fractions, simplifier une fraction. L'analyse de ces exercices montre le souci des auteurs de complexifier progressivement le travail technique : nous trouvons ainsi, d'abord, des calculs qui mettent en jeu un seul type d'opération, comme pour le calcul de $a = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$, puis des calculs plus complexes mettant en jeu plusieurs types d'opérations, comme pour le calcul de $A = \frac{1}{7} - \frac{1 - \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{6}}$.

Les auteurs profitent, par ailleurs, de ce travail technique dans un cadre numérique pour introduire une réflexion sur les priorités opératoires ou les règles de simplification de fractions, comme dans l'exercice suivant :

<u>Ex n°9 p 15 :</u>
Parmi les égalités suivantes, donner celles qui sont fausses :
a – $\frac{91-13}{119-17} = \frac{91}{119}$; *b –* $\frac{11-3}{25-3} = \frac{11}{25}$;
c – $\frac{15+2}{19+2} = \frac{15}{19}$; *d –* $\frac{14+4}{21+6} = \frac{14}{21}$

A travers ces exercices proposés dans un cadre numérique, la différence de complexité des tâches proposées rend donc possible la sélection de tâches de révision adaptées aux différents besoins des élèves. Par ailleurs, certains exercices simples peuvent conduire à une réflexion sur les règles de calcul erronées que les élèves pourront être tentés d'utiliser lorsqu'ils travailleront dans un cadre algébrique.

Dans cette partie, d'autres exercices mettent en jeu des types de tâches mathématiques sans doute nouveaux pour certains élèves en début de classe de seconde : calculer la somme, le produit de fractions dans le cadre algébrique. Comme pour les exercices proposés dans un cadre numérique, les auteurs ont proposé un certain nombre de tâches de calcul avec des niveaux de complexité différents et des exercices conduisant à une réflexion à propos des règles de calcul sur les fractions, comme dans l'exercice suivant :

> *Ex n°16 p 16 :*
> *Simplifier l'écriture de* $\frac{a^2 + ab}{b^2 + ab}$ *où a et b désignent des nombres réels tels que* $b^2 + ab \neq 0$.

Par ailleurs, dans ce manuel, les auteurs proposent trois exercices qui mettent en jeu des calculs sur les fractions dans les cadres numérique et algébrique et qui intègrent l'algèbre comme outil de preuve de propriétés numériques, comme dans l'exercice suivant :

> *Ex n°83 p 21 : Observer – vérifier – conjecturer – démontrer*
> *a – Vérifier les égalités :* $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3}$; $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \times 4}$.
> *b – Compléter les égalités suivantes :* $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{\dots}$; $\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{\dots}$
> *c – Quel résultat peut-on conjecturer ?*
> *d – Démontrer la conjecture.*

A travers l'utilisation de l'algèbre pour prouver une conjecture, il est donc possible de montrer l'intérêt de développer de nouvelles compétences de calcul dans d'autres cadres et donc de donner une raison d'être au type de tâches "calculer la somme ou le produit de fractions dans le cadre algébrique". Par ailleurs, nous relevons le choix des auteurs d'intégrer ici la dimension outil de l'algèbre.

L'étude des types d'exercices proposés pour les notions de puissances et de racines carrées fait apparaître les mêmes possibilités de choisir des types de tâches conduisant à un travail sur les techniques de calcul numérique étudiées au collège et qui répondent aux différents besoins que l'on peut prévoir pour un élève de seconde. Cette étude montre également l'existence d'exercices qui conduisent à une réflexion sur ces règles dans le cadre numérique. En outre, comme pour la notion de fraction, les auteurs proposent des exercices qui conduisent à développer des compétences de calcul dans le cadre algébrique. Enfin, la volonté d'intégrer différentes fonctionnalités de l'algèbre dans ce travail de transition avec le collège est confirmée : nous trouvons, par exemple, des exercices portant sur les puissances et les racines carrées où l'algèbre est considérée comme un outil de modélisation de situations géométriques et qui conduisent à un travail sur la notion de formule, comme dans l'exercice suivant :

> *Ex n°132 p 24 : Aire naturelle ?*
> *Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle. La formule :*
> $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}$ *donne l'aire de ce triangle.*

a – On donne a= 13, b = 14, c = 15. Calculer S.
b – Même question avec a = 37, b = 20, et c = 19.
c – Exprimer S en fonction de a lorsque a = b = c.
d – Exprimer S en fonction de b et de c lorsque $a^2 = b^2 + c^2$. Que dire d'un tel triangle ?

Pour les notions de fraction, racine carrée et puissance, les exercices proposés dans ce manuel pour faire la transition avec le collège permettent donc de prendre en compte les besoins d'élèves entrant en classe de seconde et de préparer une évolution du rapport à ces notions en introduisant une réflexion sur les règles étudiées au collège et de nouveaux types de tâches de nature algébrique qui seront mobilisés lors d'un travail algébrique ultérieur, par exemple pour l'étude des fonctions.

III.1.3.2 - Analyse du travail sur les notions plus spécifiques à l'algèbre :

D'autres notions plus spécifiques à l'algèbre sont donc abordées dans les exercices de ce chapitre. Notre étude de ce travail algébrique s'articulera autour des questions suivantes : les exercices proposés par les auteurs permettent-ils d'articuler les dimensions outil et objet de l'algèbre ? Quelles sont les fonctionnalités de l'algèbre qui apparaissent dans ces exercices ? Quel type de travail technique peut-on envisager ? Les exercices proposés permettent-ils de préparer une évolution du rapport au calcul littéral d'un élève de seconde ?

Dans un premier temps, nous centrerons notre étude sur la dimension outil de l'algèbre et sur les différentes fonctionnalités de l'algèbre qui apparaissent dans le premier chapitre du Pythagore. Puis nous étudierons la dimension objet de l'algèbre et les possibilités ouvertes dans les exercices sélectionnés par les auteurs quant au travail technique et à une évolution éventuelle du rapport des élèves au calcul littéral.

Etude de la dimension outil de l'algèbre :

Lors de l'étude des exercices relatifs aux notions de fraction, puissance et racine carrée, nous avons déjà noté la volonté des auteurs d'intégrer la dimension outil de l'algèbre dans ce premier chapitre ; l'étude des quatre rubriques consacrées à des notions plus spécifiques à l'algèbre (égalités remarquables, équations, calcul littéral en géométrie, formules mathématiques et physiques) confirme ce point puisque deux de ces rubriques, qui comportent neuf exercices, intègrent l'algèbre comme outil de modélisation et d'étude de situations issues de la géométrie et de la physique. Le travail algébrique présent dans ces neuf exercices fait, en outre, appel à différents types de tâches algébriques et à différentes fonctionnalités de l'algèbre : l'utilisation d'équations pour résoudre un problème issu de la géométrie, l'utilisation de l'algèbre pour prouver un résultat géométrique. Par ailleurs, il nous semble intéressant de noter que les exercices sélectionnés par les auteurs permettent un travail algébrique autour de formules (substitution numérique, transformation de formules pour exprimer une variable en fonction des autres), ce qui pourrait notamment amener à une réflexion sur le statut des lettres utilisées en algèbre.

Dans la rubrique "Equations", le travail est uniquement centré autour de la résolution d'équations, donc autour de la dimension objet de l'algèbre. Il n'y a pas de travail spécifique autour de la résolution de problèmes à l'aide d'équations. Mais, il faut noter que les auteurs consacrent un deuxième chapitre aux équations dans ce manuel et que cette fonctionnalité de l'algèbre y sera largement abordée, comme nous le verrons dans la suite de notre travail.

Dans la rubrique "Egalités remarquables", plus de la moitié des exercices présentés dans un cadre algébrique ne sont pas des exercices de pur travail technique : dans ces huit exercices, la manipulation d'écritures algébriques a un but précis. Quatre de ces exercices conduisent ainsi les élèves à démontrer des égalités, comme dans l'exercice suivant :

Ex n°109 p 23 : L'égalité de Lagrange (mathématicien français 1736-1813)
Soit a, b, c et d des nombres réels.
a – Développer $(ac + bd)^2$ *puis* $(ad - bc)^2$.
b- Démontrer l'égalité de Lagrange : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

Trois exercices conduisent à la détermination d'identités remarquables autres que celles étudiées au collège : le développement de $(a + b + c + d)^2$ ou la factorisation de $a^3 - b^3$, par exemple.

Enfin, dans l'un de ces exercices, les élèves doivent démontrer une propriété numérique :

Ex 110 p 23 : Vous dites ?
a – Choisir un entier, considérer son suivant, leur produit et le suivant de leur produit.
Vérifier que l'on obtient ainsi quatre nombres, dont la somme des carrés des trois premiers est égale au carré du dernier.
b – Démontrer que le résultat énoncé au a est vrai pour tous les entiers naturels.

En conclusion, il existe un certain nombre d'exercices intégrant la dimension outil de l'algèbre dans ce premier chapitre et différentes fonctionnalités de l'algèbre sont illustrées. L'algèbre est ainsi considérée comme un outil de modélisation : quelques problèmes de géométrie ou de proportionnalité conduisent à une mise en équation et une place non négligeable est laissée à l'utilisation de formules pour modéliser des situations géométriques et physiques. Par ailleurs, l'utilisation de l'algèbre comme outil de preuve et de généralisation apparaît également à travers des problèmes numériques ou géométriques.

Etude de la dimension objet :

Dans cette partie, notre étude porte sur les exercices purement techniques. Ce type d'exercices apparaît dans les deux rubriques "Egalités remarquables" et "Equations". Pour le travail sur les égalités remarquables, les auteurs proposent six exercices dont l'objectif est d'amener les élèves à travailler la technique des types de tâches mathématiques "développer ou factoriser une expression algébrique en utilisant les identités remarquables". L'analyse de ces exercices montre que les auteurs ont construit des expressions sans doute relativement complexes pour certains élèves au début de la classe de seconde et qui mettent en jeu d'autres compétences que la simple application des identités remarquables. Nous y relevons, par exemple, le développement d'expressions telles que $(a^3 + a^4)^2$ ou $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})$ ou la factorisation de l'expression $a^8 - b^8$. Ces tâches algébriques dépassent les compétences exigibles en fin de collège. Il s'agit donc d'exercices non balisés destinés à approfondir le travail les techniques de développement et de factorisation élaborées au collège.

En ce qui concerne le travail sur la résolution d'équations, l'analyse des dix exercices proposés montre la volonté des auteurs de balayer les différents types d'équations rencontrées au collège et de complexifier progressivement les différentes résolutions proposées. Nous notons, par ailleurs, que les différentes difficultés reconnues des élèves quant à la résolution des équations semblent visiblement avoir été prises en compte dans le choix de ces exercices, comme le montre l'exercice suivant :

> *Ex n° 124 p 24 :*
> ***Résoudre les équations suivantes :***
>
> | | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | a – | $2-x=3$; | b – | $\frac{2}{x}=3$; | c – | $3=2x$; | d – | $3+x=2$; |
> | e – | $\frac{x}{2}=3$; | f – | $2=\frac{3}{x}$; | g – | $\frac{2x}{3}=0$; | h – | $\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$ |

L'utilisation d'un tel exercice offre la possibilité à l'enseignant de repérer les difficultés de ses élèves sur un certain nombre d'équations relativement simples et peut permettre d'amener les élèves à réfléchir sur le sens des manipulations de base faites lors de la résolution d'équations du premier degré.

Enfin, deux des exercices proposés permettent d'envisager une réflexion sur la notion de solution à une équation, ce qui est le cas pour l'exercice suivant :

> *Ex n°125 p 24 :*
> ***Déterminer la valeur de a ou de b (selon les cas) pour que le nombre x proposé soit solution de l'équation ax + b = 0.***
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | a – | $2x+b=0$; $x=5$ | b – | $ax-\frac{2}{3}=0$; $x=\frac{3}{4}$ |
> | c – | $-5x+b=0$; $x=0$ | d – | $ax-10^3=0$; $x=10^{-3}$ |
> | e – | $7x-b=0$; $x=\frac{1}{7}$ | f – | $ax+\sqrt{8}=0$; $x=\sqrt{2}$ |

Les exercices proposés dans la rubrique "Equations" permettent donc d'envisager un travail sur la technique de résolution qui répondra aux différents besoins d'élèves en début de seconde. Ils offrent également la possibilité d'engager un travail de réflexion afin de préparer un changement du rapport des élèves à la notion de solution.

Comme nous l'avons déjà signalé précédemment, l'un des enjeux de l'enseignement de l'algèbre est de préparer un changement du rapport des élèves à certains types de tâches algébriques. Relativement à cet enjeu, les exercices proposés dans les rubriques "Egalités remarquables" et "Equations" offrent la possibilité d'ouvrir une réflexion sur le sens de certaines manipulations, notamment pour les équations, sur la notion de solution à une équation et peuvent amener les élèves à développer une certaine intelligence du calcul algébrique à travers l'articulation entre les dimensions outil et objet proposée dans la rubrique "Egalités remarquables". En revanche, les exercices proposés pour ces notions plus spécifiques à l'algèbre ne permettent pas d'envisager un travail sur le sens et la dénotation d'écritures algébriques ou un travail relatif à l'articulation entre registres sémiotiques. Or, nous l'avons vu, de tels travaux peuvent contribuer à faire évoluer le rapport au calcul littéral des élèves. Notons, toutefois, que les auteurs sont sensibles à l'intérêt de l'articulation entre registres sémiotiques pour aider les élèves à donner du sens à certaines écritures algébriques, puisqu'ils proposent, lors du travail sur la valeur absolue, des exercices qui conduisent les élèves à articuler le registre des écritures algébriques et celui du langage naturel :

> *Ex n °139 p 25 : Dans un sens*
> *x et y désignent des nombres réels. Ecrire à l'aide de symboles mathématiques :*
> *a - la valeur absolue de la somme de x et de y;*
> *b - la somme des valeurs absolues de x et y;*

c - le produit des valeurs absolues de x et de y;
d - la valeur absolue du produit de x par y.

<u>Ex n°140 p 25 :</u> Et dans l'autre
x et y désignent des nombres réels non nuls.
Ecrire en toutes lettres :

a) $|x-y|$ *b)* $|x|-|y|$ *c)* $\left|\frac{x}{y}\right|$

d) $\frac{|x|}{|y|}$ *e)* $\big||x|-|y|\big|$

C'est à la lumière de cette analyse que nous allons étudier les stratégies de Benjamin.

III.1.4 - Analyse des stratégies d'enseignement :

Nous consacrons ce paragraphe à l'analyse des stratégies d'enseignement élaborées par Benjamin dans ce premier chapitre consacré à l'algèbre. Dans une première partie, nous présenterons les différents types de tâches que les élèves y ont rencontrés. Cette étude nous a amenée à recentrer notre travail sur trois axes particuliers : le travail sur des types de tâches techniques, le travail sur le sens des écritures algébriques et l'articulation des dimensions outil et objet de l'algèbre. L'analyse de ces trois points fera l'objet des parties suivantes.

III.1.4.1 - Identification des types de tâches rencontrés par les élèves :

A travers les exercices traités, nous identifions vingt et un types de tâches mathématiques parmi lesquels nous trouvons des types de tâches spécifiques au domaine numérique (déterminer si un nombre appartient à un ensemble de nombres donné, simplifier des écritures numériques avec des puissances, résoudre un problème de proportionnalité dans le domaine numérique...), et d'autres plus spécifiques à l'algèbre. Ce nombre important de types de tâches mathématiques s'explique par le fait que de nombreux thèmes différents ont été étudiés dans ce chapitre et par le fait que Benjamin les a tous illustrés à travers divers exercices. Etant donné le questionnement spécifique relatif à l'étude des pratiques de Benjamin sur ce premier chapitre (cf. page 98), nous ne considérerons que les types de tâches spécifiques à l'algèbre que nous présentons ci-dessous en précisant pour chacun d'eux le nombre d'exercices et de spécimens disponibles :

- Effectuer un calcul avec des écritures fractionnaires littérales (quatre exercices, treize spécimens, dont trois en évaluation)
- Simplifier une expression littérale avec des puissances (un exercice, un seul spécimen)
- Simplifier une expression littérale avec des valeurs absolues (un exercice, deux spécimens)
- Résoudre une équation du type $|x| = a$ (un exercice, cinq spécimens, dont deux en évaluation)
- Développer une expression littérale (deux exercices, huit spécimens, dont deux en évaluation)
- Factoriser une expression littérale (un exercice, neuf spécimens)
- Ecrire dans le registre sémiotique des écritures algébriques une expression écrite dans le registre du langage naturel (un exercice, quatre spécimens)

- Ecrire dans le registre du langage naturel une expression écrite dans le registre sémiotique des écritures algébriques (un exercice, cinq spécimens)

Dans ce chapitre, Benjamin privilégie donc des types de tâches mathématiques centrées autour de la dimension objet de l'algèbre. En effet, pour les six premiers, il s'agit d'un travail technique dans lequel les élèves doivent appliquer des résultats étudiés précédemment en cours. Parmi ces six types de tâches, nous identifions des tâches que les élèves ont déjà rencontrées au collège (par exemple, simplifier une expression littérale avec des puissances ou développer une expression littérale), d'autres qu'ils ont peut-être rencontrées mais qui sont certainement plus problématiques (effectuer un calcul avec des écritures fractionnaires littérales) et des tâches nouvelles (par exemple, résoudre une équation du type $|x| = a$). Les deux derniers types de tâches sont, quant à eux, relatifs à l'articulation entre registres sémiotiques et semblent se relier davantage à un travail sur le sens des écritures algébriques.

Cette présentation globale des types de tâches algébriques, proposées par Benjamin dans ce chapitre, montre donc une prédominance du travail technique, une non-articulation des dimensions outil et objet de l'algèbre et un travail limité mais existant sur le sens des écritures algébriques. Nous allons préciser l'analyse dans ce qui suit en commençant par le travail mené sur les tâches techniques.

III.1.4.2 - Analyse du travail autour de types de tâches techniques :

Dans une première partie, nous préciserons notre questionnement. Les deux parties suivantes seront centrées sur l'étude des organisations mathématiques et didactiques associées à deux types de tâches particuliers. Enfin, nous présenterons les caractéristiques générales de ce travail.

Notre questionnement :

Rappelons que nous nous sommes proposé d'étudier de quelle manière Benjamin gère le travail technique dans lequel il engage ses élèves, à travers l'analyse des praxéologies mathématiques et didactiques qu'il met en place dans sa classe : comment ce travail est-il mené ? Sur quels exercices ? Avec quel niveau de complexification ? Quelles sont les responsabilités laissées aux élèves ?

Dans cette partie, nous présenterons d'abord l'analyse que nous avons conduite autour de deux organisations mathématiques illustrant deux aspects du travail algébrique qui peut être mené au début de la classe de seconde : le travail sur des objets routiniers pour les élèves et l'introduction de nouvelles tâches algébriques. L'analyse d'une organisation mathématique associée à un type de tâches routinier conduit à étudier comment est gérée la transition didactique avec le collège et à étudier si le travail effectué peut préparer une future évolution du rapport des élèves de seconde au calcul littéral. Il nous a aussi semblé intéressant de présenter dans cette partie l'analyse d'un type de tâches suffisamment représenté pour que l'on puisse étudier le niveau de complexification des exercices proposés : nous avons, pour cette raison, choisi le type de tâches "factoriser une expression littérale".

L'étude de la deuxième organisation mathématique va conduire à percevoir comment un type de tâche mathématique nouveau ou plus problématique pour les élèves est introduit. Afin d'avoir un type de tâches suffisamment représenté, notre choix s'est porté sur les calculs comportant des écritures fractionnaires littérales.

Enfin, pour mesurer une éventuelle évolution dans les gestes professionnels de Benjamin, nous proposons de conserver la chronologie de l'introduction de ces deux types de tâches dans le chapitre. Nous commencerons donc par l'étude du type de tâches " effectuer un calcul avec des écritures fractionnaires littérales", puis nous nous centrerons sur le type de tâches "factoriser une expression littérale".

A la suite de la présentation de ces deux études, nous donnerons nos conclusions sur le travail technique mené par Benjamin dans ce premier chapitre consacré à l'algèbre.

Une première étude :

Dans cette partie, nous étudions l'organisation mathématique associée au type de tâches "effectuer un calcul avec des écritures fractionnaires littérales", que nous noterons désormais $T_{cal\text{-}frac}$, ainsi que l'organisation didactique associée. Cette étude fait apparaître quatre étapes différentes dans cette organisation didactique, que nous décrivons ci-dessous :

Première étape : première rencontre avec $T_{cal\text{-}frac}$ et explicitation d'une technique

Comme de nombreux PLC2, Benjamin choisit de consacrer sa première séance à des révisions sur des règles de calcul numérique déjà étudiées au collège. Il fournit alors à ses élèves une feuille d'exercices portant sur des calculs avec des nombres relatifs et des nombres rationnels[69]. A travers cette fiche, il constate que ses élèves semblent maîtriser ce type de calculs. Il propose alors à sa classe de préparer deux exercices, extraits du Pythagore, incluant des calculs plus complexes sur des écritures fractionnaires, le premier se situant de nouveau dans le cadre numérique, le second se plaçant, quant à lui, dans le cadre algébrique :

Ex n°12 p 15 :
Soit x et y des nombres réels non nuls.
Soit $A = \frac{2x}{5} + \frac{y}{4} - \frac{xy}{2}$ *et* $B = \frac{5}{2x} + \frac{4}{y} - \frac{2}{xy}$.
Ecrire A, puis B sous forme de quotients.

A travers cet exercice, Benjamin organise donc une première rencontre avec $T_{cal\text{-}frac}$, son objectif étant de prendre des informations sur les connaissances de ses élèves relatives à la manipulation d'écritures littérales. Il nous l'explique lors du premier entretien de suivi :

> B : Bon c'était le tout début et je ne sais pas quel est leur passé. Il y en a qui ont déjà vu ça plein de fois, il y en d'autres qui l'ont peut-être vu vite fait, donc on ne sait pas.

Lors de la correction de cet exercice, au cours la séance suivante, Benjamin constate que ce type de tâches est, en fait, problématique pour un grand nombre d'élèves qui n'ont pas su transposer les techniques de calcul sur les fractions qu'ils ont étudiées au collège dans le

---

69 L'exercice portant sur les nombres rationnels est le suivant :

Exercice 2 : Mettre sous forme de fractions irréductibles
a – $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ b – $\frac{3}{7}-3$ c – $4 \times (\frac{5}{6}-\frac{6}{5})$
d – $(-\frac{1}{2}) \times (\frac{2}{3}) \times (-\frac{3}{4}) \times (-\frac{4}{5})$ e - $\frac{2-\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}}$

cadre numérique. Il fait donc le choix de profiter de ce moment pour expliciter une technique pour ce genre de calculs :

B : Là, systématiquement, je reprenais des exemples numériques. Par exemple, ils ne savaient pas réduire $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, je leur disais : si tu as $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$, qu'est-ce que tu fais ? Ils savent le dire, donc qu'est-ce que tu fais pour x et y ? Ils savent le dire.

Nous retrouvons donc, dès la seconde séance de l'année, la mise en place d'une des stratégies privilégiées par Benjamin pour prendre en charge les difficultés de ses élèves : le passage au numérique. Cette citation permet bien de pointer sa volonté de rapprocher ses élèves des techniques qu'ils maîtrisent. La justification des manipulations mises en jeu pour mener les calculs se fait donc uniquement dans le cadre numérique sur des exemples et ne passe pas par un retour aux règles de calculs que les élèves ont déjà étudiées au collège. Suite à cet exercice, il commence un cours dans lequel il reprend ces règles. Ceci constitue la deuxième étape que nous avons pointée dans l'organisation didactique de Benjamin.

<u>Deuxième étape : mise en place d'éléments technologiques</u>

La deuxième étape consiste donc en la reprise des différentes règles de calcul sur les fractions étudiées au collège, comme le montre la retranscription suivante du cahier de cours d'une élève[70] :

II – Le calcul dans IR *1 – Propriétés de calcul [...]* *c – Les fractions* *Pour tous les nombres réels a, b, c, d avec b ≠ 0 et d ≠ 0* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ *Si a ≠ 0,* $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$

Ces règles semblent constituer des éléments qui vont permettre d'expliquer la technique mise en jeu lors du traitement de l'exercice n°12 p 15 ou utilisée plus tard dans d'autres exercices. Nous les considérons donc comme des éléments technologiques. Notons qu'en ce début d'année, la mise en place de tels éléments se limite, chez Benjamin, à la constitution d'un ensemble de règles qui ne sont pas justifiées par écrit. Peut-être le sont-elles à l'oral, mais nous n'avons pas d'information sur ce point. Nous pouvons également pointer qu'aucun exemple d'utilisation de ces techniques n'est présenté dans ce cours. En revanche, Benjamin propose aussitôt deux exercices à traiter en classe afin de travailler la technique associée à $T_{\text{cal-frac}}$.

<u>Troisième étape : travail de la technique</u>

Ces deux exercices sont tirés du manuel et nous reprenons ci-dessous leur énoncé :

<u>Ex n°14 p 15 :</u> *Simplifier l'écriture de* $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$ *où a et b sont des nombres réels tels que a – b ≠ 0 et*

[70] Le lecteur pourra consulter en annexe 19 quelques extraits de ce cahier de cours.

$a + b \neq 0$.

Ex n°15 p 15 :

Soit $A = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y^2}{(x+y)^2}$ où x et y désignent des nombres réels tels que $x + y \neq 0$.

Simplifier l'écriture de A.

Ils sont extraits de la rubrique "Savoir-faire", dans laquelle Benjamin avait à sa disposition des exercices présentant divers niveaux de complexité. Il a visiblement choisi ici les deux exercices les moins complexes. La correction de ces exercices va lui permettre de repérer que certains élèves ont tendance à simplifier abusivement les écritures fractionnaires littérales du type $\frac{a+b}{a+c}$.

La technique de calcul sera de nouveau travaillée lors de la première séance de module, pour laquelle Benjamin écrit une feuille d'exercices où figurent les cinq spécimens suivants du type de tâches $T_{\text{cal-frac}}$:

Ecrire sous forme de quotient les expressions suivantes :

$A = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$; $B = 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2y}$; $C = \frac{2 + \frac{1}{a}}{3 - \frac{2}{a}}$; $D = \frac{7}{3} - \frac{2}{a}$; $E = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}$

Ces spécimens ont été visiblement choisis de manière à varier les opérations en jeu pour faire travailler les différentes règles étudiées dans le cours. Notons que les exercices qui restaient à la disposition de Benjamin dans le Pythagore ne permettaient plus de jouer sur cette variable. Benjamin a donc fait le choix d'écrire une feuille d'exercices supplémentaires.

La technique associée à $T_{\text{cal-frac}}$ ne sera plus travaillée dans ce chapitre et la compétence à effectuer des calculs avec de telles écritures ne sera pas immédiatement réinvestie. La prochaine rencontre des élèves avec ce type de tâches se fera à travers le premier devoir surveillé qui aura lieu un mois après cette étude.

Quatrième étape : évaluation

Benjamin programme ce premier devoir surveillé environ une semaine après la fin du chapitre 1. Cette évaluation est composée de six exercices de type technique portant sur différents thèmes étudiés depuis le début de l'année : la valeur absolue, les racines carrées, les puissances et la notation scientifique, le développement d'expressions. Un exercice est entièrement consacré au type de tâches $T_{\text{cal-frac}}$:

Exercice 3 :

Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

$A = \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$ avec $a - b \neq 0$ et $a + b \neq 0$

$B = \frac{1}{3a} + \frac{7}{a^2}$ avec $a \neq 0$

$C = \frac{2 + \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{2}}$ avec $a \neq 0$

Lors du premier entretien, Benjamin nous explique qu'il a construit ce devoir en se basant sur les exercices qui avaient été traités en classe. L'analyse de cet exercice montre effectivement que, comme dans l'exercice proposé en séance de module, il a cherché à varier la nature des opérations en jeu de manière à amener les élèves à utiliser les différentes règles revues en cours. Nous repérons également qu'il a fait le choix de placer une écriture fractionnaire littérale du type $\frac{a+b}{a+c}$ pour vérifier si ses élèves ne commettent plus l'erreur qu'il a repérée lors de la correction des premiers exercices portant sur $T_{cal\text{-}frac}$.

Lors du premier entretien qui se déroule une semaine après ce devoir surveillé, Benjamin est déçu par les résultats de ses élèves qui ont commis des erreurs sur des points qu'il jugeait suffisamment travaillés, comme il l'explicite ci-dessous :

> B : Ici, l'exercice 3, beaucoup d'erreurs. Pourtant, on en a fait, tu as vu. [...] La simplification par $\frac{1}{a}$, il faudra encore insister. Et du passage à l'inverse abusif. Quand je leur ai rendu le DS, je leur ai demandé ce qu'ils en avaient pensé. Ils l'ont trouvé trop dur. Mais il ne faut pas se ficher de moi quand même, on avait tout fait.

Ces résultats vont l'amener à se questionner sur ses pratiques relatives au travail technique, comme nous le verrons dans la suite de notre texte.

Après cette étude des organisations mathématique et didactique associées au type de tâches $T_{cal\text{-}frac}$, nous proposons de présenter l'analyse d'un deuxième type de tâches : "factoriser une expression numérique".

Une deuxième étude :

Dans cette partie, nous étudions les praxéologies mathématique et didactique associées au type de tâches "factoriser une expression algébrique", que nous notons T_{fact}. Cette étude fait apparaître une organisation didactique composée de deux étapes. Elle diffère, en particulier, de celle analysée dans la première étude par le fait que Benjamin ne prend pas d'information a priori sur les connaissances initiales des élèves et débute l'étude de T_{fact} par la mise en place directe d'éléments technologiques.

<u>Première étape : mise en place d'éléments technologiques</u>

La mise en place d'éléments technologiques pour T_{fact} se fait, comme pour le type de tâches étudié précédemment, dans le deuxième paragraphe du cours consacré aux révisions sur les règles de calcul dans $\mathbb{R}$. Nous retranscrivons ci-dessous un extrait du cahier de cours d'une élève relativement à ces éléments :

II – Le calcul dans IR

1 – Propriétés de calcul

a – Développement – Factorisation

Soient a, b, c trois nombres réels

$$a \times (b + c) \underset{\text{développe}}{\overset{\text{Factorise}}{\rightleftarrows}} ab + ac$$

$(a + b) \times c = ac + bc$

$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$

b – Identités remarquables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

La démarche de Benjamin, au cours de cette étape, est donc tout à fait semblable à celle que nous avons repérée dans la première étude : il rappelle différentes règles déjà étudiées au collège sans justification écrite et sans exemple d'application directe. Contrairement à ce qu'il avait prévu pour le type de tâches $T_{cal\text{-}frac}$, Benjamin ne propose pas de travail de la technique immédiatement après ce cours. Cette deuxième étape se déroulera lors d'une séance de module, dix jours après la mise en place des éléments technologiques.

Deuxième étape : explicitation et travail de la technique

Pour cette séance consacrée aux transformations d'écritures (développements et factorisations), Benjamin écrit une fiche qu'il distribue aux élèves. Lors du premier entretien, il nous expliquera qu'en fait, il n'avait pas trouvé d'exercices intéressants dans son manuel. L'analyse du champ des possibles dans le Pythagore montre que le type de tâches T_{fact} apparaît dans des exercices du premier chapitre, mais qu'ils sont sans doute trop complexes (cf. page 104) pour certains élèves de seconde. La factorisation d'expressions est ensuite reprise dans le deuxième chapitre de ce manuel comme outil au service de la résolution d'équations de degré strictement supérieur à 1. Le choix d'exercices pour travailler uniquement la technique associée à T_{fact} est donc assez limité dans le Pythagore.

Nous reprenons ci-dessous l'extrait de la fiche, élaborée par Benjamin, concernant le type de tâches T_{fact} :

Trois méthodes pour factoriser :
Reconnaître un facteur commun
Exemple : Factoriser $f(x) = x(4x - 8) + (x - 2)^2$
Nous pouvons mettre $(x - 2)$ en facteur, car $x(4x - 8) = 4x(x - 2)$ et $(x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$
Ainsi, $f(x) = (x - 2)(4x + x - 2)$, ou encore $f(x) = (x - 2)(5x - 2)$

Reconnaître une identité remarquable
Exemple : Factoriser $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$
Nous reconnaissons dans $f(x)$ le développement de $(3x - 2)^2$
car $9x^2 = (3x)^2$, $-12x = -2 \times 3x \times 2$ et $4 = 2^2$.
Ainsi, $f(x) = (3x - 2)^2$

Enchaîner les deux techniques
Exemple : Factoriser $f(x) = (4x^2 - 9) + (x + 5)(2x - 3)$
Nous voyons dans $4x^2 - 9$ la différence de deux carrés donc $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$
Par suite, $f(x) = (2x + 3)(2x - 3) + (x + 5)(2x - 3)$
Ainsi, $(2x - 3)$ peut être mis en facteur : $f(x) = (2x - 3)(2x + 3 + x + 5)$
$f(x) = (2x - 3)(3x + 8)$

Exercices :
[...]
2)Factoriser en utilisant une des trois méthodes :
$A(x) = (4x - 3)(x + 1) + x(4x - 3)$
$B(x) = x^2 + 6x + 9$

$C(x) = (x-1)(7x+4) - (x-1)^2$
$D(x) = 16x^2 - 8x + 1$
$E(x) = (3x-2)^2 + (2x+9)(6x-4)$
$F(x) = 25x^2 - 4 + (5x+2)(4x-7)$
$G(x) = 36x^2 - 4$
$H(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3$
$I(x) = x^2 - 4x + 4 + 3(x-2)^2$

Benjamin débute donc sa fiche par un "point méthode" où est clairement explicitée une technique associée à T_{fact}. Il reprend en fait ici une partie du cours développé dans le Pyramide. Il s'est également appuyé sur ce manuel pour choisir les neuf expressions qu'il propose sur cette fiche pour travailler la technique associée à T_{fact}. En effet, les expressions A(x), B(x), F(x), H(x) et I(x) sont extraites de quatre exercices du Pyramide. Pour les expressions D(x) et G(x), nous retrouvons dans le manuel des expressions plus complexes qui mettent en jeu les mêmes connaissances : ainsi, Benjamin semble s'être inspiré de l'expression $36x^2 - 0{,}04$ pour proposer $G(x) = 36x^2 - 4$, qui est plus simple à factoriser puisque la propriété "$4 = 2^2$" est plus facile à repérer, pour un élève en début de seconde, que "$0{,}04 = 0{,}2^2$". Cette transformation de l'énoncé du Pyramide traduit donc la volonté de Benjamin de proposer un travail de la technique pas trop complexe dans un premier temps.

L'étude de l'ensemble des neuf expressions nous amène à pointer son souci de jouer sur différentes variables didactiques. Il a ainsi visiblement cherché à faire appliquer les trois méthodes décrites au début de sa fiche : les trois expressions A(x), C(x) et E(x) se factorisent suivant la première méthode, B(x), D(x), G(x) se traitent suivant la deuxième et les trois autres relèvent de la dernière méthode. Il a également choisi des expressions qui permettent de mettre en jeu les trois identités remarquables étudiées au collège et rappelées précédemment dans son cours. Enfin, il a clairement voulu proposer des tâches avec des complexités diverses. Ainsi la comparaison des expressions A(x), C(x) et E(x), qui mettent en jeu la même méthode, fait apparaître différents aspects qui complexifient la tâche des élèves : la factorisation de A(x) est une application directe de la méthode décrite sur la fiche ; le traitement de C(x) paraît plus complexe par le fait de la présence d'un signe "–" et de la mise en facteur de $(x - 1)$ dans l'expression $(x - 1)^2$; pour E(x), les élèves doivent appliquer une première fois la méthode pour faire apparaître le facteur commun $(3x - 2)$, puis une seconde fois. Nous finirons cette analyse en pointant que, dans le Pyramide, les auteurs ont choisi de proposer des exercices entièrement balisés, guidant les élèves dans les méthodes à appliquer à travers des énoncés du type "*Dans les exercices 11 à 14, factoriser après avoir reconnu un facteur commun*". En écrivant sa fiche, Benjamin s'est clairement détaché de ce choix, ce qui traduit sans doute un certain souci de laisser des responsabilités aux élèves lors du travail de la technique associée à T_{fact}.

A la suite de cette séance, Benjamin ne proposera plus d'exercices uniquement centrés sur ce type de tâches. Ce choix s'explique par le fait qu'il considère les transformations d'écritures comme un outil au service de la résolution d'équations, ainsi qu'il nous l'explique lors de notre première rencontre :

B : L'objectif était de mettre en place le développement et les factorisations en vue des équations.

Ce type de tâches ne sera pas évalué dans le premier devoir surveillé.

L'analyse du travail algébrique proposé par Benjamin en ce début de stage nous a conduit à analyser de la même façon les organisations mathématiques et didactiques associées aux différents types de tâches techniques rencontrées par les élèves. Nous présentons dans la partie suivante les conclusions que nous tirons de ces différentes analyses.

Les caractéristiques générales de ce travail :

Dans le cadre de l'analyse du travail technique organisé par Benjamin lors de ce premier chapitre, nous avons donc mené des études semblables aux deux présentées ci-dessus pour chacun des types de tâches suivants :

- Effectuer un calcul avec des écritures fractionnaires
- Simplifier une expression littérale avec des puissances
- Simplifier une expression littérale avec des valeurs absolues
- Résoudre une équation du type : $|x| = a$
- Développer une expression
- Factoriser une expression littérale.

Nous consacrons cette partie à différentes caractéristiques du travail technique proposé aux élèves en ce début de stage, mises en évidence par ces études :

- *La mise en place de deux schémas didactiques :*

La première caractéristique concerne les praxéologies didactiques construites : au cours de ce chapitre, Benjamin met en place deux schémas didactiques différents suivant qu'il travaille sur des objets que les élèves ont déjà rencontrés au collège ou sur un objet nouveau (la valeur absolue, ici). L'étude des organisations mathématiques et didactiques relatives aux types de tâches mettant en jeu des objets que les élèves ont déjà rencontrés au collège fait apparaître une certaine stabilité au niveau du schéma didactique élaboré par Benjamin : celui-ci commence par rappeler, sans les motiver, ni les justifier, les définitions et les règles de calculs étudiées au collège, puis il organise un travail de la technique. Notons que Benjamin n'a pas mis en place dans ce chapitre de dispositif qui lui permettrait de prendre des informations sur les connaissances anciennes de ses élèves.

Lors du travail sur la valeur absolue, qui est un objet nouveau pour les élèves en début de seconde, ce schéma est modifié : Benjamin propose d'abord une activité contextualisée[71] pour introduire cette nouvelle notion, qu'il définit ensuite. De même, pour l'étude du type de tâches " Résoudre une équation du type $|x| = a$", il propose, dans le cours, quelques spécimens à étudier avant d'institutionnaliser une propriété générale sur les solutions d'une telle équation en fonction du signe de a.

- *Un travail technique organisé, mais peu étalé dans le temps :*

Notre étude du travail mené autour des tâches de type technique a mis en évidence la rigueur et la cohérence de Benjamin dans le choix des exercices proposés (prise en compte des difficultés d'élèves, ainsi que de diverses variables didactiques). Par ailleurs, l'étude des

[71] Benjamin a repris une activité qu'il a repérée au cours d'une phase d'observation dans la classe de son conseiller pédagogique, pendant laquelle il a assisté à une séance consacrée à la notion de valeur absolue. Cette activité consistait à demander aux élèves de calculer intuitivement la distance entre deux nombres, la valeur absolue d'un nombre réel x étant définie, par la suite, comme la distance entre 0 et x.

phases repérées montre que le travail autour d'un type de problème spécifique est peu étalé dans le temps. Ceci est clairement le cas pour les deux organisations mathématiques étudiées ci-dessus et c'est également évidemment le cas pour les types de tâches peu représentés. En fait, nous notons un étalement dans le temps plus important dans le seul cas du type de tâches "développer une expression littérale". La technique associée est travaillée en deux étapes : Benjamin propose d'abord un exercice du manuel, peu après l'introduction des éléments technologiques, puis ce travail est repris sur deux spécimens lors de la séance de module que nous avons décrite lors de l'étude de T_{fact}. Nous reprenons ci-dessous l'énoncé du premier exercice choisi :

> *<u>Exercice n°30 p 16 :</u>*
> *Soit x un nombre strictement positif. Développer :*
>
> *a)* $(10^3 x + 10^3)^2$ *b)* $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$
>
> *c)* $(\sqrt{x} + \sqrt{x})^2$ *d)* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

Il s'avère que Benjamin n'a pas sélectionné cet exercice pour amener ses élèves à travailler la technique relative au type de tâches "développer une expression littérale". En fait il l'a choisi pour qu'ils appliquent les règles de calcul sur les puissances et ce n'est qu'après l'avoir proposé à ses élèves qu'il se rend compte que ce n'est pas un exercice adapté à ses objectifs, comme il nous l'explique lors de la première rencontre :

> B : [...] En devoir, le 30 page 16. Alors là, c'est une erreur aussi. Comme j'avais fait les puissances, j'avais cherché des exercices sur les puissances. En regardant là-dedans je vois : ensemble de nombres, fractions, lettres, identités remarquables et puis je n'ai rien vu d'autre. Il y avait des puissances ici, je leur ai donné ça. Bon c'était une erreur : je l'ai donné trop tôt, ce n'est pas une application directe du cours.

Cette citation permet de pointer, par ailleurs, une caractéristique de Benjamin que nous avons déjà repérée dans le paragraphe consacré à la vision des élèves et de leurs difficultés : il s'agit d'un PLC2 qui, dès le début de son stage, adopte une attitude réflexive et qui a, en particulier, un regard critique par rapport à ses propres pratiques.

- *Le souci d'aider ses élèves à s'approprier les techniques*

Nous retrouvons dans la citation précédente un point que nous avons déjà relevé dans la partie III.1.2 relative à une première analyse des pratiques de Benjamin : l'expression d'une volonté de choisir des exercices d'application directe à proposer immédiatement après le cours. Cet aspect des pratiques de Benjamin traduit un souci qui apparaît clairement dès ce premier chapitre, celui d'aider les élèves à s'approprier les techniques étudiées. Par ailleurs, l'étude de l'organisation des phases identifiée dans le travail de la technique a montré que ce travail est le plus souvent entamé en classe : le choix d'un tel dispositif permet à Benjamin d'être présent pour aider ses élèves. Notons que cet aspect des pratiques de Benjamin est en concordance avec sa vision personnelle du métier de professeur de mathématiques, que nous avons analysée dans le premier paragraphe de ce chapitre : il se considère comme une aide à l'étude pour ses élèves.

- *Un travail technique balisé :*

L'étude des spécimens proposés par Benjamin pour travailler le type de tâches T_{fact} a, certes, fait apparaître le souci de laisser une certaine autonomie. Mais, l'analyse des différents exercices mettant en jeu des tâches algébriques proposés dans ce premier chapitre fait apparaître qu'ils sont tous balisés et ne laissent donc pas de place, a priori, à une préparation visant une certaine autonomie des élèves face au calcul algébrique. Soulignons cependant que l'analyse des exercices des trois manuels avec lesquels travaille Benjamin montre qu'il n'y a pas, dans leurs premiers chapitres, d'activités qui permettraient une telle préparation.

Suite à cette étude du travail technique proposé par Benjamin dans son premier chapitre consacré à des thèmes algébriques, nous proposons de nous centrer dans la partie suivante sur le travail autour du sens des écritures algébriques, mené en ce début de stage.

III.1.4.3 - Le travail autour du sens des écritures algébriques :

Le travail autour du sens des écritures algébriques est donc limité, mais existant. En effet, dans ce chapitre, Benjamin met en place un travail qui peut contribuer à amener les élèves à donner ou à construire du sens pour des écritures algébriques faisant intervenir des valeurs absolues. Il choisit, pour ce faire, deux exercices du manuel de la classe mettant en jeu une articulation entre le registre des écritures algébriques et celui du langage naturel (cf. page 105 de notre texte). Il s'agit, en fait, des deux seuls exercices du Pythagore contribuant à un travail autour du sens des écritures algébriques.

Rappelons que l'étude des difficultés des élèves en algèbre repérées par Benjamin nous a permis de pointer une certaine sensibilité, dès le début de l'année, aux problèmes rencontrés lors de l'interprétation d'écritures algébriques. Pour les prendre en charge, il avait alors proposé une activité (cf. page 86) mettant aussi en jeu l'articulation entre le registre du langage naturel et celui des écritures algébriques. Benjamin a visiblement été influencé par l'étude de l'exercice 4 de la feuille de module menée lors de la deuxième journée de formation didactique consacrée à l'algèbre (cf. l'annexe 10), puisque, lors de notre première rencontre, il explique :

> B : L'exercice dans le tableau, je n'aurais jamais eu l'idée de le faire si le formateur ne nous l'avait pas montré.

Nous pouvons donc noter ici une résonance de la formation sur les pratiques de Benjamin.

L'étude du champ des possibles dans le manuel de la classe a mis précédemment en évidence qu'à part les deux exercices repris par Benjamin, aucun autre exercice ne permet d'envisager un travail sur le sens et la dénotation des écritures algébriques ; lors du premier entretien, il exprimera son regret de ne pas trouver dans ce manuel d'exercices qui lui permettraient de prendre en charge différentes difficultés :

> B : Le problème de -x, ça c'était dans l'évaluation[72]. On en avait parlé un petit peu ensemble en formation. J'ai construit un peu l'exo comme ça. Dans les bouquins, ce genre de choses n'est pas traité. Pourtant ce sont des erreurs courantes. [...] Cela serait pas mal qu'il y ait un exercice dans le livre. Finalement c'est vrai que dans le livre tu n'as pas de réponse à des problèmes comme ça.

[72] Benjamin fait ici référence à l'exercice 3 des évaluations nationales menées à l'entrée en seconde au mois de septembre 1999 (cf. l'annexe 3), qui l'a conduit à repérer que certains considèrent l'écriture – x comme désignant toujours un nombre négatif.

L'analyse des parties "exercices" du Pyramide et du Fractale montre également l'absence de tels exercices. En revanche, dans le Fractale, nous trouvons une partie consacrée aux modules contenant des exercices permettant de travailler sur le sens interne des écritures littérales. De même, à la fin du Pyramide, une partie est consacrée à des activités de ce type. Au bout d'un mois d'enseignement, Benjamin les a repérées dans ce manuel, mais n'a pas encore eu le temps de les explorer, comme il le précise lors de notre première rencontre :

B : L'autre jour, j'ai vu à la fin du Pyramide des petites activités qui ont l'air dans cet esprit. Je ne m'y suis pas encore intéressé.

III.1.4.4 - L'articulation des dimensions outil et objet :

Comme nous l'avons constaté lors de l'analyse globale des organisations mathématiques, il n'y a pas dans ce chapitre d'articulation entre les dimensions outil et objet de l'algèbre : le travail algébrique est resté essentiellement centré sur des exercices techniques et les règles de calcul étudiées n'ont pas été réinvesties dans des problèmes où l'algèbre deviendrait un outil. En fait, la seule allusion à une articulation des dimensions outil et objet de ce domaine des mathématiques se situe au niveau de l'étude des techniques de développement et de factorisation d'expressions, que Benjamin considère comme des outils à la disposition de la résolution d'équations, comme nous l'avons pointé lors de l'analyse du type de tâches T_{fact}. L'analyse du champ des possibles dans le Pythagore a mis en évidence que Benjamin avait pourtant à sa disposition des exercices qui auraient permis un tel réinvestissement de techniques de calculs comme outils de résolution de problèmes. Mais visiblement, il n'y a pas été sensible.

En conclusion, le travail algébrique mené par Benjamin dans ce premier chapitre est complètement centré sur la dimension objet de l'algèbre, avec une priorité donnée à des tâches de type technique et une certaine sensibilité à proposer un travail autour du sens des écritures algébriques à travers une articulation entre le registre sémiotique du langage naturel et celui des écritures algébriques. L'étude du travail autour de types de tâches techniques a permis de mettre en évidence une réflexion intéressante sur le genre d'exercices à proposer pour étudier des techniques et le souci d'aider ses élèves à se les approprier. Elle a également fait apparaître deux points que l'on peut qualifier de faibles dans les pratiques de Benjamin : le travail technique est peu étalé dans le temps et il ne permet pas d'amener les élèves à développer une certaine autonomie face au calcul algébrique. Par ailleurs, l'étude des organisations didactiques mises en place dans ce chapitre montre deux schémas didactiques différents : un premier réservé à l'étude d'objets que les élèves ont déjà rencontrés au collège et un second pour l'introduction d'objets nouveaux.

Pour élaborer ses organisations mathématiques, Benjamin s'appuie essentiellement sur des manuels scolaires, mais prend aussi en compte des éléments obtenus en formation didactique (cf. le travail autour du sens des écritures algébriques). Par ailleurs, l'analyse de l'utilisation des manuels montre qu'il a su exploiter les possibilités offertes par les auteurs pour choisir des exercices conduisant un travail technique cohérent et rigoureux. En revanche, l'étude du chapitre 1 du Pythagore, guidée par une grille d'analyse, a mis en évidence des possibilités que Benjamin n'a pas exploitées, comme celles relatives à l'introduction de tâches mettant en jeu la dimension outil de l'algèbre. Benjamin avait pourtant exprimé, en début d'année, une certaine sensibilité au fait que montrer l'utilité de ce domaine de mathématiques pouvait aider les élèves à s'approprier les notions étudiées. L'exploitation du champ des possibles d'un manuel, sans outil d'analyse, ne semble donc pas évidente pour un enseignant débutant.

Passons maintenant à l'étude du deuxième chapitre de l'année de Benjamin consacré à l'étude des équations.

III.2 - Analyse du chapitre "Equations"

Dans ce paragraphe, nous étudions le deuxième chapitre de l'année intitulé "Equations". Ce chapitre, auquel Benjamin a consacré neuf séances (dont trois de modules), est consacré à l'étude de techniques de résolution de différents types d'équations, à l'utilisation des équations comme outils de résolution de problèmes, comme le montre le plan du chapitre que nous reprenons ci-dessous :

I – Rappels sur les équations
- 1 – Définitions
- 2 – Propriétés
- 3 – Equations de référence : les équations du premier degré
- 4 – La mise en équation d'un problème

II – Equations du second degré à une inconnue
- 1 – Définitions
- 2 – Résolution

III – Equations et valeurs absolues

L'étude de ce chapitre va nous conduire à poursuivre notre analyse des premières stratégies d'enseignement élaborées par Benjamin en algèbre.

Dans une première partie, nous préciserons notre questionnement sur ce chapitre. Dans la partie suivante, nous étudierons les possibilités de choix offertes par le manuel de la classe. Enfin, dans une dernière partie, nous analyserons les stratégies d'enseignement de Benjamin relativement aux équations.

III.2.1 - Notre questionnement :

Relativement à l'étude de la notion en jeu dans ce chapitre, l'objectif du programme (cf. annexe 13) est d'amener les élèves à étudier des situations conduisant à une équation : le programme indique des équations de forme plus complexe que celles étudiées au collège mais les auteurs insistent sur le fait que toute virtuosité technique est exclue et sur le fait que, pour certaines équations plus difficiles à résoudre telles $x^2 + x - 6 = 0$ ou $x + \frac{1}{x} = 3$, des indications doivent être données.

Par ailleurs, la résolution de certaines équations du second degré peut nécessiter la factorisation d'expressions algébriques. Ce chapitre peut donc être l'occasion de mener un travail sur les formes adéquates (formes développées ou factorisées) pour l'étude de telles équations. Ce travail contribuerait à développer une certaine intelligence du calcul déjà évoquée lors de l'analyse du premier chapitre.

En outre, certaines recherches (par exemple (Colomb, 1995)) ont bien montré les difficultés des élèves de collège face à la notion de solution d'une équation : pour beaucoup d'élèves, résoudre une équation revient à mener une succession de manipulations pour aboutir à une égalité du type "x = a", ce "a" devenant la solution de l'équation. Si on leur demande de vérifier si un tel nombre est solution d'une équation, nombreux sont ceux qui ne voient pas d'autre démarche possible que celle consistant à résoudre l'équation. Ces recherches mettent également en évidence les difficultés de ce fait des élèves à interpréter une équation du type "0x = a" qui n'obéissent pas à ce schéma. Un travail autour de cette notion peut donc être envisagé en classe de seconde afin de faire évoluer le rapport à l'algèbre des élèves.

Enfin, les auteurs des programmes pointent que la résolution de problèmes conduisant à des équations à une inconnue constitue un objectif important de la classe de seconde. Or la difficulté des élèves face à ce type de tâches est bien reconnue et l'élaboration d'un enseignement de la mise en équation qui laisserait de l'autonomie aux élèves est loin d'être simple.

L'étude de ce chapitre va donc nous permettre d'analyser des questions spécifiques au thème étudié :

- Comment est abordé le travail technique autour de la résolution ?
- Le travail sur le sens de la notion de solution est-il abordé ?
- Comment les dimensions "outil" et "objet" sont-elles articulées ?
- Comment le travail sur la mise en équation est-il mené ?

Et nous garderons toujours en mémoire les questions didactiques plus générales que nous sommes posées lors de l'analyse du premier chapitre :

- Quels sont les schémas didactiques privilégiés par Benjamin ? Comment élabore-t-il ses stratégies d'enseignement et d'évaluation ?
- Sur quelles ressources didactiques s'appuie-t-il ?
- En ce qui concerne les phases de révision, comment est gérée la transition didactique avec le collège ? Comment Benjamin prend-il des informations sur les connaissances et les besoins de ses élèves ?
- En ce qui concerne les nouveaux types de tâches mathématiques, comment sont-ils introduits ? Comment sont-ils motivés ?

Comme pour le chapitre "Calculs numériques", nous consacrons d'abord un premier paragraphe à l'étude du champ des possibles dans le manuel de la classe.

III.2.2 - Analyse du champ des possibles dans le manuel :

La notion d'équation est étudiée dans deux chapitres du manuel. Dans le premier, nous l'avons déjà évoqué, les auteurs proposent des exercices de révision relatifs à la technique de résolution des équations du premier degré. Le deuxième chapitre, intitulé "Equations", est entièrement consacré à cette notion qui y est abordée à la fois dans sa dimension outil, à travers l'étude de problèmes conduisant à des équations à une inconnue, et dans sa dimension objet, à travers le travail de techniques de résolution d'équations de degré strictement supérieur à 1 et d'équations du type $|x - a| = d$.

L'étude du champ des possibles dans le manuel va se faire ici selon deux axes. Dans un premier temps, nous allons analyser les possibilités offertes relativement à la dimension outil : quels sont les types d'activités et de problèmes présents dans ce manuel ? Quel type de travail sur la mise en équation cela permettait-il d'envisager ? Dans un second temps, nous étudierons des questions plus spécifiques à la dimension objet des équations : dans quel type d'exercices le travail des techniques est-il proposé ? Ce travail permet-il de faire évoluer le rapport des élèves aux équations, notamment en ce qui concerne la notion de solution ? Ce travail peut-il permettre un développement de l'autonomie des élèves par rapport au calcul littéral ?

III.2.2.1 - Les équations dans leur dimension outil :

Dans le manuel, le travail sur la mise en équation est entamé par une activité préparatoire dans laquelle l'objectif des auteurs est d'amener les élèves à résoudre algébriquement deux problèmes extraits de l'article "Equations" de l'Encyclopédie Méthodique (publiée entre 1782 et 1832). Nous reprenons ci-dessous l'énoncé du début de cette activité consacrée à l'étude d'un premier problème :

Activité 1 p 28 :

A - Un problème de prospérité

Un marchand augmente tous les ans son bien d'un tiers, en ôtant 100 livres qu'il dépense par an dans sa famille ; au bout de trois ans, il trouve son bien doublé ; on demande combien ce marchand avait de bien au commencement de ces trois ans.

Le texte manque singulièrement de précision mais l'auteur rédige aussitôt une solution éclairante. En outre, il montre à l'aide de deux colonnes, que mettre ***un problème en équation*** *consiste à* ***le traduire en langage algébrique****.*

En langage ordinaire	*Algébriquement*
Un marchand a un bien	x
dont il dépense la première année 100 livres	$x - 100$
et augmente le reste d'un tiers	$x - 100 + \frac{x-100}{3} = \ldots$
La seconde année, il dépense 100 livres	$\ldots - 100 = \ldots$
et augmente le reste d'un tiers	$\ldots + \frac{\ldots}{3} = \ldots$
La troisième année, il dépense 100 livres	$\ldots - \ldots = \ldots$
et augmente le reste d'un tiers	$\ldots + \ldots = \ldots$
Au bout des trois ans, il est deux fois plus riche qu'il ne l'était	$\ldots = \ldots$

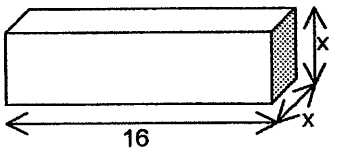
Lorsqu'on connaît les difficultés rencontrées par les élèves face à la mise en équations de certains énoncés en langage naturel, ce problème est d'une complexité évidente pour un élève de seconde. En apportant le commentaire ci-dessus, les auteurs cherchent à "faciliter" la tâche des élèves. Mais le choix d'une telle activité ne contribue pas, nous semble-t-il, à amener les élèves à développer une certaine autonomie face au type de taches "mettre un problème en équation".

Ensuite, dans la partie "Cours", les auteurs institutionnalisent une méthode pour résoudre un problème à une inconnue à l'aide d'une équation :

> *Suivre les quatre étapes ci-dessous :*
> *1 – Choisir l'inconnue et lui donner un nom (x, t, m ou autre...).*
> *2 – Traduire le texte du problème sous la forme d'une équation.*
> *3 – résoudre l'équation (et vérifier).*
> *4 – Rédiger la réponse au problème.*

Un exemple de résolution d'un tel problème issu de la géométrie est ensuite proposé comme illustration de cette méthode.

Enfin, dans la partie "Exercices", les auteurs proposent vingt-sept problèmes à mettre en équation, répartis selon deux catégories : des problèmes du premier degré (dix-sept spécimens dont six dans la partie "Savoir-faire") et de degré strictement supérieur à un (dix spécimens dont cinq dans la partie "Savoir-faire"). Ces problèmes sont issus de trois domaines, avec une forte dominance de la géométrie. En effet, quinze de ces situations sont issues de la géométrie. Les mises en équation de ces problèmes, qui mettent en jeu diverses connaissances géométriques (formules de calcul d'aires et de volumes, théorèmes de Thalès et de Pythagore), sont de difficultés diverses. Dans certains, il suffit d'utiliser des formules de calcul d'aires ou de volumes, comme dans l'exercice suivant :

> *<u>Ex n°12 p 37 :</u>*
> *Un parallélépipède rectangle mesurant 16 cm de hauteur a un volume de 900 cm³ (voir figure).*
>
> 
>
>
> *Calculer le côté de la base carrée.*

D'autres, en revanche, semblent un peu plus difficiles dans la mesure où ils nécessitent de traduire des énoncés en langage naturel, qui font parfois intervenir différentes grandeurs, comme dans l'exemple suivant :

> *<u>Ex n°6 p 37 :</u> Chamaillerie*
> *Un carré et un rectangle de même aire se chamaillent. Le carré dit : "Mon côté mesure 12 cm de plus que ta largeur". Le rectangle répond : "Oui, mais ma longueur fait 16 cm de plus que ton côté".*
> *Trouver les dimensions des deux figures.*

Onze situations sont issues du domaine de la vie courante et leurs mises en équation mettent en jeu différents types de connaissances (formules de calculs d'aires et de volumes, pourcentages, la formule d = v.t). Un grand nombre de ces problèmes nécessitent la traduction d'un énoncé en langage naturel de complexité plus ou moins grande. Quelques énoncés sont relativement simples, comme en particulier l'exemple suivant le montre :

> *<u>Ex n°48 p 41 :</u> Un vieux problème*
> *"Je te donnerai les écus que j'ai en main, dit un homme à son neveu, si tu devines combien il y en a. Le carré de ce nombre moins quatre fois ce nombre égale cinq."*

Mais la majorité des énoncés proposés ne le sont pas (certains présentant de nombreux phénomènes de non-congruence entre deux registres sémiotiques (Duval, 1988 a)) et leur mise en équation nécessite une reformulation qui pose, nous le savons, de sévères difficultés à certains élèves de seconde. L'exemple ci-dessous illustre un tel type d'énoncé :

<u>Ex n°30 p 39 :</u> L'agent mathématicien *- "Bien le bonjour, Monsieur l'agent, dit Mr McGuire. Pouvez-vous me dire l'heure ?* *- Mais bien sûr, répondit l'agent qui avait une réputation de mathématicien. Ajoutez au quart du temps depuis minuit, la moitié du temps jusqu'à minuit et vous aurez l'heure exacte."* *Quelle heure était-il donc ?*

Une seule situation est issue du domaine numérique : il s'agit de déterminer trois nombres entiers consécutifs qui vérifient une certaine propriété.

En conclusion, le Pythagore offre un choix important de problèmes à mettre en équation qui permet de jouer sur différentes variables, comme le type d'énoncé (énoncés uniquement en langage naturel ou énoncés qui nécessitent la coordination d'un texte et d'un dessin), le contexte du problème, le type de connaissances nécessaires pour mettre en équation (formules ou théorèmes géométriques, formules physiques...), la complexité du choix de l'inconnue (énoncés où l'inconnue est imposée ou implicitement donnée[73], énoncés qui mettent en jeu plusieurs grandeurs non connues et dans lesquels les élèves ne sont pas guidés dans le choix de l'inconnue[74]), la complexité de la modélisation d'énoncés en langage naturel ou le type d'équations (premier ou second degré).

Le champ des possibles dans ce manuel pour le type de tâches "mettre un problème en équation" permet donc d'envisager un travail avec une complexification progressive dans lequel un enseignant pourrait laisser une certaine responsabilité à ses élèves, puisqu'il existe des énoncés dans lesquels ils ne sont pas du tout guidés.

Passons, maintenant, à l'analyse du champ des possibles dans le Pythagore relativement à la dimension objet des équations.

III.2.2.2 - Les équations dans leur dimension objet :

Comme nous l'avons déjà précisé, deux types d'équations sont abordés dans ce chapitre : les équations de degré strictement supérieur à 1 et celles de la forme $|x - a| = d$. Pour ces dernières, les auteurs proposent d'abord une activité préparatoire visant l'élaboration d'une technique de résolution et l'explicitation de la forme générale de l'ensemble des solutions en fonction du signe de "d". Dans la partie "Exercices", six exercices sont centrés sur le travail de cette technique.

Le travail sur les équations de degré strictement supérieur à 1 est également abordé dans une activité préparatoire, où les élèves doivent choisir les écritures les plus appropriées d'une expression algébrique pour résoudre une liste d'équations :

[73] Comme dans l'exercice n°48 page 41, dont l'énoncé est repris ci-dessus.

[74] Comme dans les exercices n°6 page 37, 30 page 39, dont les énoncés sont également repris ci-dessus.

<u>Activité 2 p 29 :</u> Des équations impressionnantes

> *Devoir pour lundi prochain*
>
> *Soit $A(x) = 9 - 49x^2 - (4x + 1)(12 - 28x) - (3 - 7x)^2$*
>
> *Résoudre les quatre équations suivantes :*
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | *a /* | $A(x) = 0$ | *b /* | $A(x) + 12 = 0$ |
> | *c /* | $A(x) = 9 - 49x^2$ | *d /* | $A(x) = 13x^2 + 20x - 13$ |

A . Mises en formes

Un élève dit : " A(x) nous est donné sous une forme tarabiscotée. Certaines équations seraient sans doute plus simples avec la forme développée ou avec la forme factorisée. "

Un autre répond : " Tu as raison, cherchons ces deux formes. "

1 . Développer et réduire A(x).

2 . Factoriser A(x).

On remarquera d'abord que $9 - 49x^2 = (...) \times (...)$ et $12 - 28x = 4\,(...)$.

B . Les bonnes résolutions

En choisissant à chaque fois la forme la plus appropriée de A(x), résoudre les quatre équations.

A travers une réflexion sur les différentes formes d'une expression algébrique, cette activité permet donc d'initialiser un travail technique autour de la résolution d'équations du second degré.

Par la suite, les auteurs institutionnalisent dans la partie "Cours" une technique relative au type de tâches mathématiques "résoudre une équation de degré strictement supérieur à 1" :

> *Suivre les étapes ci-dessous :*
>
> *1 - Transposer tous les termes à gauche du signe =, pour mettre l'équation sous la forme $\boxed{\ldots\ldots = 0}$.*
>
> *2 - Factoriser le premier membre[75].*
>
> *3 - Utiliser la propriété disant qu'un produit de facteurs est nul lorsque au moins l'un de ses facteurs est nul[76].*
>
> *4 - Ecrire l'ensemble S des solutions.*

Suite à cette institutionnalisation, seront fournis trois exemples d'application de cette technique, choisis de manière à varier les méthodes de factorisation à utiliser (reconnaissance d'identités remarquables, mise en évidence d'un facteur commun).

Dans la partie exercices, il y a douze exercices de travail technique sur la résolution d'équations de degré strictement supérieur à 1. Dans les cinq exercices de la partie "Savoir-

---

[75] Juste avant cette technique, les auteurs ont institutionnalisé une méthode pour factoriser une somme :

> Faire apparaître un facteur commun et utiliser $ka + kb = k(a + b)$.
>
> Utiliser une identité remarquable.
>
> Combiner les deux méthodes précédentes.

[76] Un rappel d'ordre technologico-théorique a également été fait précédemment dans le cours : "Soit a et b deux nombres réels. Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$." .

faire", les vingt équations proposées ont été choisies de manière à travailler la technique institutionnalisée dans le cours. L'étude de ces équations montre, tout d'abord, la volonté des auteurs de proposer un travail sur la technique de factorisation faisant appel aux différentes méthodes rappelées dans le cours :

- reconnaissance d'un facteur commun comme dans l'équation $(x - 1)^2 - 3 = -3x$,
- utilisation d'une identité remarquable : $9x^4 - 16 = 0$,
- une combinaison des deux méthodes précédentes : $16x(x + 2)^2 = 25x(3x + 2)^2$.

L'analyse des équations montre également la volonté des auteurs de varier la complexité des factorisations à effectuer : ainsi, la factorisation à effectuer pour résoudre l'équation $(2x + 3)^2 = 16x^2$ posera sans doute moins de difficulté que celles à effectuer pour la résolution de $(x - 1)^2 - 3 = 0$ (ici les élèves doivent reconnaître que $3 = (\sqrt{3})^2$) ou la résolution de $x + (x - 2)^2 = 2$ (l'implicite de la multiplication par 1 peut poser problème à certains élèves).

Les sept exercices de la partie "Chercher" permettent d'approfondir le travail sur les techniques de résolution des équations de degré supérieur strictement à 1, puisque la résolution d'autres équations est proposée. Tels qu'ils ont été construits, trois de ces exercices permettent également d'approfondir le travail sur la notion de solution qui a déjà été amorcé, pour les équations du premier degré, dans deux exercices du chapitre 1, exercices que nous avons déjà signalés[77]. Nous reprenons ci-dessous l'énoncé d'un des trois exercices proposés dans le chapitre 2 du Pythagore permettant d'envisager un tel travail :

> *<u>Ex n° 38 p 40 :</u> Solution ou pas solution ?*
>
> *On pose $f(x) = 2(3x - 1)(x - 3) - (x - 3)^2$*
>
> *a / Sans résoudre l'équation $f(x) = 0$, déterminer si le nombre $- 0,2$ est solution de cette équation.*
>
> *b / Même question avec le nombre 4.*
>
> *c / Résoudre l'équation $f(x) = 0$.*

Les autres exercices de cette partie permettent de prolonger le travail sur la technique de résolution de telles équations et de poursuivre le travail de réflexion sur les formes d'une expression algébrique appropriées pour la résolution de certaines équations. Ceci est le cas, par exemple, dans l'exercice suivant :

> *<u>Ex n° 42 p 40 :</u>*
>
> *Soit $A(x) = -4x^2 + 25 + (3x + 1)(4x - 10) - (5 - 2x)^2$.*
>
> *a - Développer puis simplifier $A(x)$.*
>
> *b - Factoriser $A(x)$.*
>
> *c - Calculer $A(0)$, $A(-1)$, $A(\frac{5}{2})$, $A(1 + \sqrt{2})$.*
>
> *d - Résoudre les équations suivantes :*

---

[77] Pour rappel, voici l'énoncé d'un de ces exercices :

> <u>Ex n°125 p 24 :</u>
> Déterminer la valeur de a ou de b (selon les cas) pour que le nombre x proposé soit solution de l'équation $ax + b = 0$.
>
> a – $2x + b = 0$; $x = 5$ b – $ax - \frac{2}{3} = 0$; $x = \frac{3}{4}$
>
> c – $-5x + b = 0$; $x = 0$ d – $ax - 10^3 = 0$; $x = 10^{-3}$

1 - A(x) = 0 ; *2 - A(x) + 10 = 0.*

En conclusion, les exercices relatifs à la dimension objet des équations proposés dans les chapitres 1 et 2 du Pythagore rendent possible d'une part la sélection de tâches de révision adaptées aux besoins des élèves en début de seconde et d'autre part un travail de la technique de résolution des équations de degré strictement supérieur à 1 se complexifiant progressivement. Certains de ces exercices permettent d'envisager un travail plus spécifique sur la reconnaissance de formes adéquates pour résoudre des équations ou sur la notion de solution qui peuvent contribuer à préparer l'évolution du rapport à l'algèbre nécessaire lors de la mise en jeu de celle-ci comme outil au service de l'étude des fonctions.

Après à cette étude du champ des possibles dans le Pythagore relativement au thème des équations, nous consacrons le paragraphe suivant à l'analyse des stratégies d'enseignement élaborées par Benjamin dans son deuxième chapitre de l'année.

III.2.3 - Analyse des stratégies d'enseignement :

Nous centrons ce paragraphe sur l'analyse des stratégies d'enseignement élaborées par Benjamin dans ce deuxième chapitre consacré à l'algèbre. Dans une première partie, nous présenterons les différents types de tâches que les élèves y ont rencontrés. Cette étude nous a amenée à axer notre travail sur les deux points suivants : le travail dur les techniques de résolution d'équations et la mise en équation de problèmes. L'analyse de ces deux axes fera l'objet des parties suivantes.

III.2.3.1 - Identification des types de tâches rencontrés par les élèves :

Au cours de ce chapitre, les élèves ont traité dix-sept exercices extraits du Pythagore, une activité et une fiche d'exercices supplémentaires préparées par Benjamin. Ils ont été évalués une fois, après l'étude du chapitre.

A travers les exercices traités, nous relevons sept types de tâches différents relatifs au thème étudié :

- Résoudre une équation du premier degré (quatre exercices, seize spécimens)
- Résoudre une équation du second degré (huit exercices, dix-neuf spécimens)
- Résoudre une équation dont l'inconnue est au dénominateur (un exercice, neuf spécimens)
- Résoudre une équation de la forme : $|x - a| = d$ (deux exercices, huit spécimens)
- Résoudre un problème conduisant à une équation (neuf spécimens)
- Choisir une forme appropriée d'une expression A(x) pour résoudre une équation où cette expression intervient. (un exercice, quatre spécimens)
- Déterminer si un nombre est solution d'une équation (un spécimen).

L'analyse de ces types de problèmes montre que Benjamin accorde beaucoup d'importance aux tâches de résolution d'équations tout en ayant le souci d'articuler les dimensions outil et objet puisque neuf problèmes de mise en équation sont résolus. Par ailleurs, nous notons quelques types de tâches centrés sur le choix de formes adéquates d'expressions littérales pour résoudre certaines équations et sur la notion de solution à une équation.

L'analyse de ce chapitre va être centrée autour de l'analyse de deux questions : l'étude du travail technique de la résolution d'équations et l'étude des stratégies d'enseignement de la mise en équation.

III.2.3.2 - Le travail sur les techniques de résolution d'équations :

Comme pour l'analyse du premier chapitre de Benjamin consacré à l'algèbre, nous avons fait le choix de présenter les études d'organisations mathématiques et didactiques associées à deux types de tâches spécifiques. Dans un premier temps, nous nous intéresserons au type de tâches "résoudre une équation du second degré" dont certains spécimens ont déjà été rencontrés au collège (en effet, les programmes de la classe de troisième indiquent que les élèves doivent savoir résoudre une équation mise sous la forme A.B = 0 où A et B sont des expressions du premier degré de la même variable). L'analyse de ce type de tâches et des praxéologies mathématique et didactique associées va nous permettre d'étudier la transition didactique avec le collège, le niveau de complexification des problèmes proposés, la possibilité d'évolution du rapport à cette tâche des élèves. La seconde étude présentée sera centrée sur le type de tâches "résoudre une équation avec une inconnue au dénominateur". Il s'agit très certainement d'un type de tâches que certains élèves n'ont pas rencontré au collège (il ne figure pas dans les programmes de collège). Il s'agit ici d'étudier comment est introduit ce nouveau type de problème.

Une première étude :

L'étude du thème "équations" débute par des rappels sur la résolution des équations du premier degré où Benjamin a eu la volonté de redéfinir différents objets et types de tâches (résoudre une équation, équations équivalentes, équations du premier degré) et le souci de redonner du sens aux différents gestes mis en jeu lors de la résolution d'équations du premier degré (comme nous l'avons vu dans le paragraphe consacré à la vision des difficultés des élèves, cf. page 92). Après un travail de la technique de résolution de ces équations, il aborde le problème de la résolution des équations du second degré. Nous présentons dans cette partie le travail associé à ce type de tâches, que nous noterons $T_{eq\text{-}deg2}$. L'étude de l'organisation didactique mise en place pour cette étude fait apparaître trois étapes, que nous décrivons ci-dessous :

<u>Première étape : première re-rencontre</u>

La première re-rencontre, avec des types d'équations que les élèves ont déjà étudiés au collège, a eu lieu lors des évaluations nationales (cf. l'annexe 3) où les élèves devaient résoudre deux équations du second degré : $36 - (x - 6)^2 = 0$ (les indications nécessaires étant données aux élèves) et $(10 - x)(x - 2) = 0$, soit environ deux semaines avant l'étude du type de tâches $T_{eq\text{-}deg2}$.

Avant de commencer son cours sur les équations du second degré, Benjamin choisit alors de corriger l'exercice dans lequel les élèves ont rencontré ces deux équations :

> B : J'ai rendu l'évaluation et j'ai corrigé un peu l'exercice 1. Je pense que je corrigerai de temps en temps. C'est mon conseiller pédagogique qui m'a dit de faire ça et je trouve que c'est pas mal. Bon, par exemple, la géométrie tant que tu ne la fais pas, cela ne sert pas à grand-chose de la corriger. Donc, avant de faire de la géométrie, tu leur demandes de ramener le cahier et tu corriges avec eux. Là l'exercice 1, c'était des équations, développements, factorisations. Bon c'était pile le moment.

La correction de cet exercice lui permet donc de prendre en charge les difficultés de ses élèves, en leur expliquant leurs erreurs, et de faire la transition didactique avec le collège. En outre, l'entretien montre que Benjamin est tout à fait vigilant aux difficultés rencontrées par ses élèves lors de ces évaluations, qu'il exploite clairement comme un outil pour prendre des informations sur les connaissances de ses élèves, ce que nous avions déjà pointé dans le paragraphe consacré à la vision des difficultés des élèves.

Nous notons, par ailleurs, ici une trace de l'influence du conseiller pédagogique quant à l'élaboration de stratégies d'enseignement : Benjamin a visiblement été tout à fait réceptif à un de ses conseils à propos de la correction d'exercices qui trouve sa place à certains moments et pas à d'autres.

Dans le cours consacré aux équations du second degré, Benjamin met en place différents éléments technologiques et théoriques relatifs au type de tâche $T_{eq\text{-}deg2}$. Ceci constitue une deuxième étape dans l'organisation didactique mise en place par Benjamin, que nous explicitons ci-dessous.

Deuxième étape : mise en place d'éléments technologiques et techniques

Benjamin débute la troisième séance du chapitre 2 par le paragraphe II où il donne une définition d'une équation du second degré et où il expose des éléments techniques pour la résolution d'une telle équation :

II – Equations du second degré à une inconnue

1 – Définition :

Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b ,c sont des nombres réels et $a \neq 0$.

2 – Résolution :

En seconde, on ne sait résoudre directement que les équations de la forme $x^2 = d$, où d est un nombre réel positif dont l'ensemble de solution est $S = \{\sqrt{d} ; -\sqrt{d}\}$.

Pour toutes les autres équations, on essaiera systématiquement de factoriser l'expression afin d'obtenir un produit de facteurs du premier degré.

Puis on appliquera la propriété : "Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul".

Puis le cours se termine sur deux exemples de résolution d'équations du second degré : $(2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 3) = 0$ et $36x^2 - 12x + 1 = 0$.

Dans ce second paragraphe comme dans le paragraphe consacré aux équations du premier degré, nous notons la volonté de définir les objets étudiés. Pour les équations du premier degré, l'analyse des manuels avec lesquels il travaille montre que Benjamin a construit les définitions présentées dans son cours en s'appuyant sur des énoncés tirés de ces manuels, tout en les simplifiant en partie. Ces simplifications conduisent à des définitions pas toujours satisfaisantes. Ainsi sa définition d'une équation du premier degré est "*une équation du premier degré est une équation de la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des nombres réels*"[78]. En ce qui concerne les équations du second degré, aucun des trois manuels ne fournit de

[78] Benjamin s'est ici inspiré de la définition que nous trouvons dans le Fractale : "*une équation est dite du premier degré lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme $ax + b = 0$ où a est un nombre non nul et b un nombre quelconque*".

définition. Benjamin a tout de même choisi de définir cet objet, mais fournit de nouveau une définition peu satisfaisante, selon laquelle l'équation $(2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 3) = 0$, par exemple, n'est pas une équation du second degré.

La seconde partie du cours est consacrée à la résolution de telles équations. Benjamin y distingue deux types d'équations : celles de la forme $x^2 = d$ et celles plus "complexes". Pour le premier type, il se limite au cas où d est positif et donne la forme générale des solutions. Remarquons qu'il reprend ici le schéma qu'il a mis en place dans le premier chapitre pour le travail sur les objets que les élèves ont déjà étudiés au collège : il ne justifie pas ce résultat et il ne fournit aucune technique qui permet d'y aboutir. Il semble s'inspirer ici du Pyramide où sont présentées les solutions de ce type d'équations suivant différents cas ($d > 0$, $d < 0$, $d = 0$), sans justification. Donc, de nouveau, Benjamin simplifie le texte du manuel en limitant l'étude à un seul cas. Notons, également, que, dans l'évaluation nationale, il n'y a pas de telle équation, il n'a donc pas pu s'appuyer sur la correction effectuée lors de la séance précédente pour justifier ce résultat qui semble être présenté ici comme un résultat à apprendre et à appliquer directement. Ceci explique que pour prendre en charge les difficultés rencontrées par les élèves lors de la résolution d'équation du type $x^2 = d$ avec d positif, en particulier l'oubli de la solution négative, Benjamin n'a d'autre moyen que celui qui consiste à rappeler le résultat du cours (cf. page 93).

Pour le deuxième type d'équations, Benjamin décrit à l'aide d'un discours une technique de résolution. Nous pouvons noter que cette formulation est maladroite dans la mesure où Benjamin n'y considère implicitement que des équations avec un second membre nul. Il s'agit ici clairement d'une maladresse de débutant, car un professeur plus expert, conscient que certains de ses élèves pourraient appliquer cette règle dans le cas d'un second membre non nul, aurait très certainement fait noter une étape supplémentaire dans cette démarche : la transposition de tous les termes à gauche du signe "=", par exemple, pour obtenir une équation avec un second membre nul. Pour l'élaboration de cette technique, nous pouvons faire l'hypothèse qu'il a pu s'appuyer sur les exemples d'équations de ce type présents dans l'évaluation nationale et corrigés lors de la séance précédente, mais rien n'indique que c'est effectivement le cas.

L'explicitation de cette technique est immédiatement suivie de deux exemples d'application. Notons que ces deux équations ont visiblement été choisies de manière à mettre en pratique les deux cas de factorisation étudiés dans le premier chapitre : soit on utilise une identité remarquable, soit on reconnaît un facteur commun. La fin de ce cours est donc destinée au lancement d'une troisième étape, consacrée au travail de la technique, que nous décrivons ci-dessous.

<u>Troisième étape : travail de la technique</u>

A la suite du cours, Benjamin propose immédiatement deux exercices d'application en classe :

<u>Ex n°8 p 37 :</u> Résoudre :			
a /	$(x-4)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$	*b /*	$(x-1)^2 - 3 = 0$
c /	$(x-1)^2 - 3 = 2$	*d /*	$-2 + (x-2)^2 = 0$

Ex n°14 p 38 : Aires égales

Comment choisir x pour que le carré et le trapèze aient des aires égales ?

Benjamin considère ces deux exercices comme des exercices d'application. Ils ont donc été choisis pour travailler la technique de résolution, présentée en cours, relative aux équations qui ne sont pas de la forme $x^2 = d$. Lors du premier entretien, Benjamin nous explique les critères qui l'ont poussé à choisir l'exercice 8 :

> B : Tu vois, j'avais donné celui-là, d'abord parce qu'il était détaillé : il y avait $(\sqrt{3})^2$, donc ils voyaient. Après tu n'avais plus que 3. Bon, ils l'avaient fait avant, ils avaient compris. Après, tu peux passer aux autres. J'ai trouvé que cela était pas mal fait.

Il a donc été particulièrement sensible à la forme de cet exercice qui permet de travailler cette technique de manière progressive. En revanche, il ne semble pas avoir perçu que la technique décrite ne s'applique pas directement pour l'équation $(x - 1)^2 - 3 = 2$, l'amélioration de cette technique est laissée ici à la charge des élèves. Ceci semble d'ailleurs avoir posé des problèmes à certains élèves puisque Benjamin décrit la difficulté suivante, qu'il n'avait visiblement pas anticipée et pour laquelle il n'avait pas prévu de prise en charge a priori :

> B : Alors ici il fallait appliquer une identité remarquable mais ils ne passent pas le 2 de l'autre côté. Et ensuite ils font comme si c'était égal à 0. Mais bon, quand tu leur expliques : là si tu as 2, 2 × 2 ça fait 4, c'est pas ça du tout. Ceux-là ils comprennent. Mais ils font l'erreur.

Le travail de la technique se poursuit par la suite à travers l'exercice 14, relatif au type de tâches "résoudre un problème conduisant à une équation du second degré à une inconnue". Nous notons ici le souci de Benjamin de ne pas limiter le travail des élèves à l'étude de l'objet "équation du second degré" et de présenter ce type d'équation comme un outil de résolution de problèmes.

La technique exposée dans le cours est ensuite travaillée dans les exercices 7 et 10 page 37 :

Ex n°7 p 37 : Résoudre :

a /	$(2x + 3)^2 = 16x^2$	b /	$(x - 1)^2 - 4 = 9x^2 - 4$
c /	$9(x - 3)^2 = (x + 3)^2$	d /	$7 - \frac{(x-2)^2}{5} = 2$

Ex n°10 p 37 : Résoudre :

a /	$x + (x - 2)^2 = 2$	b /	$(x - 1)^2 - 3 = -3x$
c /	$(x - 1)^2 - 4 = 2x + 2$	d /	$(x - 1)^2 = -5x + 5$

Dans ces deux exercices, les factorisations à effectuer sont plus complexes que dans l'exercice 8 et c'est ce qui a conduit Benjamin à les choisir :

> B : Ensuite, ça c'est les devoirs 7 et 10, c'est encore pour reconnaître des identités remarquables, plus ou moins difficiles des fois, il faut faire des petites manipulations pour s'en sortir.

Lors de la correction des exercices 7 et 10 page 37, Benjamin constate que certains élèves ne transposent pas forcément les seconds membres non nuls des équations étudiées et n'arrivent donc pas à factoriser pour les résoudre. Ce constat l'amène à réexpliciter la technique étudiée dans le cours, en précisant que l'on commence d'abord par transposer tous les termes dans un même membre.

Le travail de la technique se prolongera ensuite à travers des exercices de formes différentes, visant différents objectifs. Benjamin choisit ainsi de faire travailler les élèves sur l'activité préparatoire, que nous avons présentée à la page 123, qui conduit à une réflexion autour des formes adéquates (forme factorisée ou développée) d'une expression pour résoudre certaines équations. En proposant cette activité, Benjamin a la volonté de préparer ses élèves à la notation fonctionnelle A(x) :

> B : Avant de faire l'exo sur les fonctions[79], j'ai voulu leur faire faire ça. Manipuler un petit peu une fonction justement. Bon, en fait, tu ne remplaces pas de valeur, mais tu manipules une expression comme ça. [...] Ce n'est pas la même chose que l'autre exercice. Mais je préférais déjà les faire manipuler là-dessus. C'était bien détaillé pour bien leur faire remarquer que des fois avec une forme on ne peut pas s'en sortir. L'importance de factoriser ou ... Enfin tu vois.

Mais cette citation montre qu'il a également repéré cette activité comme permettant d'amener les élèves à travailler sur le choix de formes adéquates d'expressions pour la résolution d'équations. Il existe d'autres exercices de ce genre dans le Pythagore mais Benjamin ne les a pas sélectionnés. En revanche, il proposera deux problèmes conduisant à des équations qui semblent être du second degré mais, qui après simplification, s'avèrent être des équations du premier degré, puis s'apercevra que ses élèves ont "acquis le réflexe de factoriser" et qu'ils ne pensent pas à développer pour simplifier les équations, ce qui ne surprendrait pas un enseignant plus expert.

Au travers du travail sur la technique de résolution des équations du second degré, Benjamin cherche également à amener ses élèves à travailler autour de la notion de solution d'une équation et choisit un des exercices proposés par le Pythagore qui permettent d'envisager un tel travail. Nous l'avons présenté à la page 124. Lors du premier entretien, Benjamin nous explique les raisons de ce choix :

> B : Alors je leur ai donné un truc de ce genre-là pour samedi. [...] On a une équation f(x) = 0 : sans résoudre l'équation, déterminer si le nombre –1,2 est solution de cette équation. [...] Alors ça, on en avait parlé avec le formateur à l'IUFM. Là, c'est solution. Après on demande avec 4, c'est pas solution. Et après on demande de résoudre l'équation.
>
> AL : Et il vous avait dit que pour eux, ce n'est pas parce que f(-1,2)=0 que...
>
> P : Que c'est la seule solution. D'une part qu'ils sachent dire que c'est une solution et d'autre part pour ceux qui ont compris que c'est une solution, ne pas s'en contenter. Je ne sais pas : je l'ai donné pour samedi. Je vais voir ce que cela donne.

---

[79] Il s'agit de l'exercice 38 page 40 dont voici l'énoncé :

On pose $f(x) = 2(3x - 1)(x - 3) - (x - 3)^2$ a / Sans résoudre l'équation f(x) = 0, déterminer si le nombre – 0,2 est solution de cette équation. b / Même question avec le nombre 4. c / Résoudre l'équation f(x) = 0.

Visiblement Benjamin a trouvé dans son manuel un problème semblable à l'exercice n°2 de la feuille de module (cf. l'annexe 10) étudiée lors de la deuxième demi-journée de formation en didactique de l'algèbre. En donnant ce problème, il veut prendre des informations sur les connaissances de ses élèves quant à la notion de solution à une équation. Il semble vouloir aussi tester ou confirmer les informations reçues à l'IUFM. Benjamin proposera par la suite deux autres exercices de ce type. Notons qu'il propose, en fait, ici tous les exercices de ce type qu'il peut trouver dans son manuel.

Passons maintenant à la seconde étude des stratégies d'enseignement de Benjamin relativement à la résolution des équations, centrée sur le type de tâches "résoudre une équation avec une inconnue au dénominateur".

Une deuxième étude :

La deuxième organisation mathématique étudiée concerne donc le type de tâches "résoudre une équation dont l'inconnue est au dénominateur", que nous noterons $T_{eq\text{-}deno}$. Benjamin consacre une séance de module à ce type de problèmes. L'étude systématique d'un tel objet n'est pas un objectif du programme de seconde et n'est pas effectuée dans le Pythagore (seuls trois exemples sont proposés en exercice et des indications sont fournies conformément aux programmes). En revanche, dans le Pyramide, une partie du cours est consacrée à l'étude de ces équations : les auteurs présentent une méthode de résolution à travers un exemple. Benjamin s'inspire de cette partie pour préparer cette fiche de module. L'organisation didactique relative à $T_{eq\text{-}deno}$ est composée de deux étapes que nous décrivons ci-dessous.

Première étape : mise en place d'éléments techniques et technologiques

La fiche, proposée par Benjamin au cours de cette séance de module, débute donc par l'exposé d'une technique de résolution à travers un exemple résolu, que nous reprenons ci-dessous :

<u>Résolution des équations dont l'inconnue est au dénominateur</u>

<u>Exemple :</u> On veut résoudre l'équation $\frac{x+3}{x-5} = 4$

Il faut avant toute chose déterminer le domaine de validité de cette équation. Ce domaine est noté D_v.

Dans cet exemple, x ne peut prendre la valeur ... , car cette valeur annule le dénominateur (on n'a pas le droit de diviser par zéro).

On écrit alors : D_v = ... *On dit que ... est une valeur interdite.*

On peut alors résoudre l'équation. Pour cela, il existe 2 méthodes :

<u>1ère méthode :</u> "tout mettre" dans le premier membre, réduire au même dénominateur et appliquer la propriété :

"Si un quotient est nul, alors le numérateur est nul."

Ainsi, $\frac{x+3}{x-5} = 4$ *est équivalent à :*

<u>2ème méthode :</u> faire un "produit en croix"

Ainsi, $\frac{x+3}{x-5} = 4$ *est équivalent à :*

Ne pas oublier de vérifier que la solution trouvée n'est pas une valeur interdite.
L'ensemble solution de cette équation est : S =

Notons que cet exposé comporte quelques éléments d'ordre technologique ("on n'a pas le droit de diviser par 0", "si un quotient est nul, alors le numérateur est nul"). Benjamin reprend ici le schéma didactique choisi par les auteurs, tout en prenant du recul par rapport à ce qu'ils proposent puisqu'il présente deux méthodes de résolution sur un exemple plus simple que celui présenté dans le manuel.

Nous notons ici une caractéristique déjà repérée lors de l'analyse du premier chapitre, notamment en ce concerne l'étude du travail mené autour du type de tâches "factoriser une écriture littérale" : il n'y a pas de moment d'élaboration de la technique avec les élèves. En effet Benjamin ne laisse aucune responsabilité à ses élèves quant à sa construction ; en revanche, le fait qu'il propose une fiche avec des trous à remplir nous amène à penser qu'il a tout de même eu le souci de leur laisser une certaine place dans ce moment d'explicitation de technique.

Enfin, nous pouvons pointer que le problème étudié n'est pas motivé a priori et ce type de tâche ne sera réinvesti dans aucun problème de ce chapitre. Mais une analyse rapide des exercices proposés dans les trois manuels utilisés par Benjamin ne fait apparaître aucun problème susceptible de réinvestir ce type de tâches. Notons toutefois que certaines tâches au niveau des études de fonctions pourront conduire ultérieurement à la résolution de telles équations : par exemple, trouver les antécédents de 4 pour la fonction définie par $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$, pour tout x différent de 5.

La suite de cette fiche est ensuite consacrée au travail de la technique qui y est explicitée.

<u>Deuxième étape : travail de la technique</u>

La technique est alors travaillée à travers neuf équations, que nous reprenons ci-dessous :

<u>Exercice :</u> Résoudre les équations suivantes :

a /	$\frac{2x+3}{x+2} = 1$	*b /*	$\frac{-x}{x+1} = 3$	*c /*	$\frac{3x-6}{x-2} = 1$
d /	$\frac{x^2}{1-2x} = -1$	*e /*	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2$	*f /*	$\frac{2}{x-1} = \frac{3}{2x-5}$
g /	$\frac{3}{x} = \frac{x}{5}$	*h /*	$\frac{15}{x^2-1} = 1$	*i /*	$\frac{x+3}{2x-4} = \frac{2x-4}{x+3}$

L'analyse des différents manuels qu'il utilise laisse apparaître que les équations b, d, e et g sont extraites de trois exercices du Pyramide. Les autres ont visiblement été inventées par Benjamin. Leur examen montre que, comme dans le cas de la fiche proposée pour travailler la factorisation d'expressions algébriques, il a cherché à jouer sur différentes variables, par exemple la mise en jeu d'une identité remarquable pour la résolution de l'équation d ou de la somme de deux fractions pour celle de l'équation e. Lors du premier entretien, il explique, par ailleurs, qu'il a tenu en particulier à amener ses élèves à réfléchir sur la notion de "valeur interdite" :

B : Donc je leur mets de vérifier que ce n'est pas une valeur interdite. Finalement oui, ils me disent : oui ce n'est pas une valeur interdite. Mais tant qu'ils n'ont pas vu que cela pouvait en être une ils ne comprennent pas ça. Alors je m'y attendais : ils oublient systématiquement de regarder les valeurs interdites. Pour eux cela ne sert à rien. Bon je pensais : attends le petit c, tu vas voir. Et donc, dans le petit c, la valeur interdite c'était 2 et la solution c'était 2.

Benjamin exprime ensuite son souci d'amener ses élèves à donner du sens au fait qu'il n'existe pas de solution à cette équation :

B : Alors là il y en a un qui me demande : qu'est-ce qu'on dit ? Je leur ai demandé ce qu'ils en pensaient. Ils finissent par te dire que c'est impossible. Il y en a même qui connaissent le symbole vide. Et alors je n'ai pas laissé ça comme ça : ce n'est pas très parlant. Bon, ici tu peux factoriser par x-2. Je leur ai montré : vous voyez cela fait toujours 3 et on nous demande que ce soit égal à 1 donc ce n'est pas possible. Sinon, eux, ils ne savent pas ce que cela veut dire.

Nous pouvons noter ici que, malgré le discours légal qu'il porte sur les valeurs à exclure en les appelant "valeurs interdites", discours que l'on retrouve par ailleurs dans certains manuels, Benjamin est tout à fait soucieux de ne pas se limiter à un interdit et souhaite aider ses élèves à donner du sens à cette notion, en explicitant les raisons pour lesquelles cette équation n'admet pas de solution.

Passons maintenant à la deuxième question que nous nous proposons de considérer pour l'analyse de ce deuxième chapitre de Benjamin : l'étude des stratégies d'enseignement de la mise en équation de problèmes.

III.2.3.3 - La mise en équation :

Ce type de tâches, que les élèves ont déjà étudié au collège, est abordé par Benjamin lors de la première séance consacrée à l'étude du thème "Equations", pendant laquelle il distribue une fiche-méthode. Ceci constitue la première étape de l'organisation didactique associée au type de tâches "mettre un problème en équation", que nous noterons $T_{pb\text{-}eq}$, qui en comporte deux.

Première étape : mise en place d'une technique

Dans cette fiche-méthode, sont décrites quatre étapes "à respecter" (le choix de l'inconnue, la mise en équation, la résolution de l'équation et la conclusion) lors de la mise en équation d'un problème. Puis, Benjamin présente un exemple de mise en œuvre de cette technique. A ce moment, cette fiche est seulement lue en classe :

Mise en équation d'un problème

*Il y a **quatre étapes** à respecter.*

*1) **Choix de l'inconnue :** ne pas oublier les unités (mètres, secondes...), ni les conditions portant sur l'inconnue (nombre positif, entier, etc...)*

*2) **Mise en équation :** on traduit l'énoncé en "langage mathématique"*

*3) **Résolution de l'équation***

*4) **Conclusion :** on vérifie que la (ou les) solution(s) satisfait les conditions.*

Exemple :

Un père de trois enfants laisse en héritage 1600 couronnes. Le testament précise que l'aîné doit recevoir 200 couronnes de plus que le deuxième et le deuxième 100 couronnes de plus que le dernier.

1) Choix de l'inconnue : soit x (en couronnes), la part de l'aîné. C'est un nombre réel positif.

2) Mise en équation

La part du deuxième est x – 200

La part du troisième est (x – 200) – 100 = x – 300
La somme des trois parts doit donner la somme totale de l'héritage :
x + (x – 200) + (x – 300) = 1600
3x – 500 = 1600.
3) Résolution de l'équation
3x – 500 = 1600
3x = 2100
x = 700
4) Conclusion
L'aîné hérite de 700 couronnes, le deuxième de 500 couronnes et le troisième de 400 couronnes.

Pour écrire la fiche relative à la mise en équation, il s'est complètement inspiré du Pyramide, comme il nous l'explique dans le premier entretien :

B : Alors j'ai distribué cette fiche "mise en équation d'un problème" pour ne pas le faire en cours. Lue en classe et on l'appliquera en module. Je l'ai repiquée dans le Pyramide. Quatre étapes de la mise en équation pour bien mettre les choses au clair. En n'oubliant pas les unités, etc. Et puis en donnant un exemple, j'ai repris celui du Pyramide. L'exemple pas trop bébête, qu'il y ait quand même des choses.

AL : C'est à dire ?

P : Pas... Là il faut quand même réfléchir un petit peu.

La citation précédente montre la volonté d'exposer clairement cette technique ("bien mettre les choses au clair")[80] et de choisir un problème qui justifie une telle technique. Nous notons ici qu'aucune autonomie n'est laissée aux élèves face à la résolution du problème (la fiche est simplement lue en classe) alors qu'il s'agit d'un type de tâche déjà rencontré au collège.

La deuxième étape de l'organisation didactique est ensuite consacrée au travail de la technique.

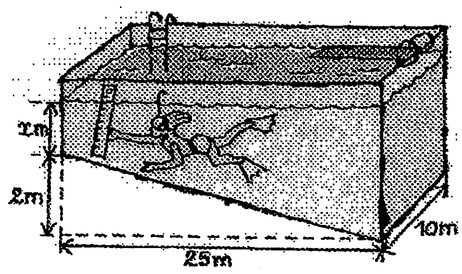
Deuxième étape : travail de la technique :

Le travail de cette technique est d'abord mené en parallèle avec le travail de la technique de résolution d'équations à travers deux problèmes, issus de la géométrie, donnés à préparer à la maison, et dont nous avons déjà présenté un exemple à la page 129. Il s'agit de problèmes qui ne sont pas trop difficiles à mettre en équation dans la mesure où, pour chacun d'entre eux, le choix de l'inconnue est imposé par l'énoncé, la mise en équation ne nécessite que la prise d'informations sur des figures géométriques et la connaissance de formules d'aires ou de volumes (la seule difficulté que les élèves peuvent rencontrer réside dans la non-connaissance de ces formules) et la phase de conclusion ne pose pas de problème puisque la solution de l'équation est la solution du problème.

Puis une séance de modules est entièrement consacrée à ce type de tâches. Benjamin propose à ses élèves de traiter les problèmes suivants :

[80] Nous retrouvons ici le souci de Benjamin de présenter des textes clairs et structurés, que nous avons déjà pointé dans l'étude du chapitre 1.

Ex n°1 p 37 : La piscine
On a versé 700 cm3 d'eau dans cette piscine.



Calculer x.

Ex n°3 p 37 : Partage
Martin, qui a autant de frères que de sœurs, partage équitablement une boîte de dragées avec eux. S'il prend sa part, chaque frère et chaque sœur recevra 12 dragées. Mais il décide de laisser sa part aux autres qui reçoivent ainsi 14 dragées chacun.
a – Combien Martin a-t-il de sœurs ?
b – Combien y avait-il de dragées dans la boîte ?

Ex n° 4 p 37 : Le carré devenu rectangle
Un terrain initialement carré a vu l'une de ses dimensions augmentée de 4 m et l'autre diminuée de 2m.
Résultat : son aire a augmenté de 78 m².
Quel était le côté de ce carré ?
Ex n°33 p 39 : Rencontre
Une voiture part de Jonzac à 7h30 et se dirige vers Montendre à 80 km.h^{-1}. Au même instant, une autre voiture part de Montendre et se dirige vers Jonzac à 64 km.h^{-1}. On suppose qu'il y a 18 km entre Jonzac et Montendre. A quelle distance de Jonzac et à quelle heure aura lieu le croisement ?

Cette séance est entièrement consacrée au type de tâches mathématiques $T_{pb\text{-}eq}$. Il s'agit pour Benjamin de proposer des problèmes pour amener les élèves à appliquer la technique exposée dans la fiche décrite ci-dessus. Quatre problèmes de difficultés diverses ont été choisis : deux problèmes (n° 1 et 4), nécessitant de nouveau des connaissances géométriques (formules de calcul de volume, d'aire) sont a priori moins difficiles que les deux autres, lesquels nécessitent la traduction de textes relativement complexes. L'entretien nous indique que Benjamin a bien conscience de la différence du niveau de difficulté de ces problèmes puisqu'il nous explique que le deuxième problème est "plus délicat". En outre, il ajoutera que le dernier est "tellement classique qu'on peut pas passer à côté".

Lors de l'étude des difficultés des élèves évoquées par Benjamin, nous avions noté qu'il n'avait pas semblé avoir été sensible aux difficultés associées à la rupture arithmétique / algèbre, en particulier celles associées aux différences de démarches de résolution de problèmes dans les deux domaines. Nous avions alors convenu d'analyser la nature des problèmes choisis et la mise en place dans la classe du travail sur la mise en équation, en particulier l'autonomie laissée aux élèves, afin d'étudier si la rencontre avec de telles difficultés était possible (cf. page 93). Une analyse rapide des problèmes proposés montre que le deuxième problème peut se résoudre assez facilement de manière arithmétique[81] ; le dernier problème peut également se résoudre arithmétiquement (résolution qui s'appuie sur la proportionnalité) ou de manière graphique. Benjamin n'a visiblement pas pris en compte cette dimension dans le choix de ces problèmes.

L'entretien nous renseigne sur la mise en place dans la classe de cette séance de module. Benjamin a traité le premier problème avec les élèves ("comme c'était le premier, je l'ai fait avec eux au tableau") en leur faisant rappeler les quatre étapes décrites dans la fiche distribuée précédemment, puis le deuxième a été résolu au tableau par un élève, mais avec l'aide de Benjamin, qui le trouvait plus délicat. Nous avons déjà repris, dans la partie consacrée aux difficultés rencontrées par les élèves lors de l'articulation de registres sémiotiques, l'extrait du premier entretien (cf. page 93) dans lequel Benjamin décrit les aides apportées. L'analyse du dispositif mis en place par Benjamin nous a alors amenée à pointer que, même s'il a le souci de laisser une place aux élèves en envoyant une personne au tableau et en faisant participer le reste de la classe, il leur facilite la tâche et leur laisse peu de responsabilités. Pour le troisième problème, qui lui paraît plus simple, Benjamin laisse les élèves travailler en autonomie. Mais pour le dernier problème, qui lui paraît, à juste titre, plus difficile, il prend le parti de le traiter lui-même avec l'aide des élèves.

Finalement pour les problèmes qui lui semblent difficiles, Benjamin ne laisse pas de responsabilité à ses élèves. Il ne les laisse, en particulier, pas chercher et les guide pas à pas à l'aide de différentes questions. Il est clair qu'avec une telle stratégie il ne pouvait pas être confronté à des élèves qui auraient tenté de résoudre de manière arithmétique ces problèmes. Ceci explique sans doute en partie la non-sensibilité à certaines difficultés liées à la rupture arithmétique / algèbre que nous avons constatées dans le paragraphe consacré à la vision des difficultés de ses élèves.

Le travail de la technique sera, par la suite, prolongé à travers trois autres problèmes : deux sont de nouveau issus du domaine géométrique et sont assez semblables à l'exercice 14 page 38 décrit précédemment (cf. page 129). Le troisième est issu du domaine numérique :

<u>Ex n°27 p 38 :</u> Trouver trois nombres
Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que la différence entre le carré du plus grand et le produit des deux autres soit égale à 520.

En conclusion, ce deuxième chapitre de Benjamin est à la fois consacré à des types de tâches relatifs à la dimension objet des équations et à d'autres relatifs à leur dimension outil. L'étude du travail mené sur la résolution des équations de degré strictement supérieur à 1 a, par ailleurs, montré le souci d'articuler ces deux dimensions.

[81] Lorsque la part de douze dragées de Martin est redistribuée, ses frères et sœurs reçoivent chacun deux dragées supplémentaires. Le nombre de frères et sœurs est donc égal à 6. Par conséquent, Martin a trois sœurs.

L'étude du travail relatif à la résolution des équations fait apparaître de réels points forts :

- la volonté de mener un travail des techniques cohérent et structuré (comme pour le premier chapitre, nous avons pu pointer la prise en compte de différentes variables didactiques pour proposer des types de tâches se complexifiant progressivement),

- le désir de revenir sur le sens de certaines manipulations (par exemple pour les équations du premier degré) ou sur celui de notions (solution d'une équation, valeur "interdite"),

- le souci d'amener les élèves à réfléchir sur les formes adéquates d'expressions algébriques pour résoudre des équations,

- l'attention portée aux élèves pour les aider à s'approprier les techniques (le travail technique est le plus souvent entamé en classe. De plus, la comparaison avec le chapitre 1 montre que ce travail est désormais plus étalé dans le temps).

Cette analyse met aussi en évidence un point sur lequel la réflexion de Benjamin mérite d'être approfondie : la place à laisser aux élèves. En effet, comme nous avons pu le repérer à plusieurs reprises dans ce chapitre, Benjamin ne laisse pas de responsabilité à ces élèves pour l'élaboration de techniques et garde à sa charge leur explicitation. Cette caractéristique apparaît également dans le travail sur la mise en équation pour lequel il choisit une gestion qui facilite fortement la tâche des élèves et qui limite alors leur responsabilité.

Enfin, nous souhaitons pointer ici l'attention particulière portée par Benjamin aux discussions avec son conseiller pédagogique et aux informations recueillies lors des journées de formation en didactique à l'IUFM, qui est apparue à plusieurs reprises lorsque ce stagiaire nous expliquait les raisons de certains choix didactiques.

Passons maintenant à l'analyse du troisième chapitre consacré à l'algèbre.

III.3 - Analyse du chapitre "Inégalités, inéquations"

Ce quatrième chapitre de l'année est consacré à l'étude de différentes propriétés relatives aux inégalités, de diverses inéquations (inéquations à une inconnue, inéquations non élémentaires[82], inéquations avec valeur absolue) et à celle de problèmes s'y ramenant. Benjamin lui a consacré douze séances (dont quatre pour les modules). Nous reprenons ci-dessous le plan de ce chapitre :

I – Opérations sur les inégalités
- 1 - Rappels
- 2 - Propriétés
- 3 - Rangements des carrés, des racines carrées et des inverses
- 4 - Comparaison de a et de a^2, pour a nombre réel positif

II – Intervalles
- 1 - Définition
- 2 - Réunions et intersections

III – Signe d'une expression
- 1 - Signe de ax + b
- 2 - Signe d'un produit
- 3 - Signe d'un quotient

[82] Dans la suite de notre travail, ce terme désignera des inéquations dont la résolution nécessite l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient d'expressions algébriques.

IV – Système de deux inéquations à une inconnue
V – Approximation d'un nombre réel
1 - Encadrement
2 - Valeur approchée
VI – Inéquations et valeurs absolues

Benjamin consacre donc une partie de ce chapitre à de nouveaux types de tâches mathématiques auxquels les élèves n'ont encore été confrontés (la comparaisons des carrés de deux nombres positifs ou la résolution d'inéquations non élémentaires, par exemple). Notre étude va, par conséquent, nous conduire à analyser, en particulier, ses stratégies pour organiser la rencontre des élèves avec ces nouveaux types de tâches.

Comme pour le chapitre précédent, nous préciserons notre questionnement sur ce chapitre. Puis, nous analyserons le champ des possibles dans le manuel de la classe relativement aux objets présents dans ce chapitre. Enfin, nous étudierons les stratégies d'enseignement de Benjamin.

III.3.1 - Notre questionnement :

L'étude des programmes de seconde en vigueur lors du suivi individuel de Benjamin montre que, comme pour les équations, les auteurs mettent l'accent sur l'articulation entre les dimensions outil et objet de l'algèbre, à travers l'étude de situations conduisant à des inéquations ou des inégalités (cf. annexe 13). La détermination de situations faisant intervenir ces objets est moins aisée que pour les équations. En effet, même s'il existe de nombreuses situations faisant intervenir des inéquations du premier degré, il est moins évident d'en trouver qui mettent en jeu des inéquations non élémentaires, par exemple. La réponse à cette attente institutionnelle risque donc d'être compliquée pour un enseignant débutant qui ne dispose pas encore d'une banque d'exercices très fournie.

Par ailleurs, nous notons également que les auteurs des programmes préconisent l'articulation du registre des écritures algébriques avec celui des représentations graphiques "afin d'éviter un formalisme purement algébrique". Etant donné la progression annuelle choisie par Benjamin, il rencontrera très certainement des difficultés pour faire vivre l'articulation souhaitée dans ce chapitre puisqu'il n'a pas encore abordé d'enseignement des fonctions.

Conformément aux instructions officielles, l'étude de ce thème donne lieu à l'introduction de nouveaux objets (nouvelles propriétés sur les inégalités, par exemple) et au travail de nouvelles tâches mathématiques (comparer les carrés de deux nombres positifs, par exemple). Notre questionnement portera donc, en particulier, sur cette introduction :

- Comment les objets nouveaux sont-ils introduits et travaillés ?

- Comment s'organise l'articulation avec les objets anciens ?

- Comment les dimensions outil et objet sont-elles articulées ?

- Existe-t-il une articulation de registres ? Si oui, comment est-elle effectuée ?

- Y a-t-il un travail mené relativement au sens des écritures algébriques ?

Parallèlement à ce questionnement spécifique à l'algèbre, nous continuerons, bien entendu, à considérer les questions didactiques plus générales que nous avons considérées pour l'étude des deux chapitres précédents.

Etudions, dans la partie suivante, le champ des possibles dans le manuel de la classe.

III.3.2 - Analyse du champ des possibles dans le manuel :

Les notions d'inégalité et d'inéquation sont abordées dans le troisième chapitre du Pythagore. Notre étude portera, tout d'abord, sur l'étude du travail proposé sur les inégalités : comment les différentes règles sur les inégalités sont-elles introduites ? Sur quels types d'exercices sont-elles travaillées ? Comment l'articulation des dimensions outil et objet, préconisée par le programme, est-elle mise en place ?

Puis, nous reprendrons ces questions pour deux types d'inéquation abordés dans le manuel : les inéquations du premier degré, déjà rencontrées au collège, pour lesquelles nous analyserons également les possibles afin de gérer la transition avec le collège et les inéquations non élémentaires pour lesquelles nous étudierons plus particulièrement la mise en place de la technique de résolution, nouvelle pour les élèves de seconde.

III.3.2.1 - Le travail sur les inégalités :

Les nouvelles règles sur les inégalités introduites en classe de seconde[83] apparaissent tout d'abord dans les activités préparatoires où les auteurs proposent un travail de preuve et d'application de ces inégalités, comme dans l'activité suivante :

> *Activité 4 p 44 :* ***Rangements de carrés, de racines, d'inverses.***
>
> ***A – Carrés***
>
> *Soit a et b deux nombres positifs.*
>
> *1 - Démontrer que $b^2 - a^2$ a le même signe que $b - a$.*
>
> *2 - En déduire que : Pour a et b positifs, a^2 et b^2 sont dans le même ordre que a et b.*
>
> *3 - Application : comparer, sans calculatrice, $5\sqrt{2}$ et 7.*
>
> *4 - Si a et b sont négatifs, est-ce que a^2 et b^2 sont dans le même ordre que a et b ?*
>
> *B – Racines carrées*
>
> *Soit a et b deux nombres positifs.*
>
> *1 – Démontrer que* $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ a le même signe que b – a.
>
> *2 – En déduire que : Pour a et b positifs, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont dans le même ordre que a et b.*
>
> *C – Inverses*
>
> *Soit a et b deux nombres strictement positifs.*
>
> *1 – Démontrer que* $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ est du signe contraire à b – a.
>
> *2 – En déduire que : Pour a et b strictement positifs, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont dans l'ordre inverse de a et b.*

Ces propriétés sont ensuite institutionnalisées dans le cours et l'utilisation de telles inégalités pour encadrer et approximer un nombre est illustrée par un exemple.

Un travail technique d'application directe de ces différentes règles est proposé dans neuf exercices de la partie "Savoir-faire" consacré à l'encadrement des nombres. Puis, dans la partie "Chercher", les auteurs proposent une série de vingt-trois exercices plus complexes visant à amener les élèves à réinvestir ces propriétés pour comparer des nombres, pour effectuer des encadrements. Les exercices sélectionnés dans cette partie permettent, par ailleurs, d'envisager une articulation entre les dimensions outil et objet de l'algèbre puisque certains exercices proposés ne concernent pas uniquement des tâches de type formel et sont

[83] Encadrement d'une somme, du produit de deux nombres positifs, passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée dans une inégalité entre deux nombres positifs.

issus de domaines divers : le numérique avec des exercices qui proposent la comparaison de nombres pour laquelle l'utilisation de la calculatrice présente des limites, la géométrie avec l'utilisation de l'inégalité triangulaire pour comparer différentes grandeurs, la vie courante.

Il nous semble également intéressant de noter que certains des exercices proposés peuvent conduire à un travail sur le sens interne des expressions algébriques et peuvent contribuer à une évolution du rapport au calcul littéral des élèves, en les amenant à développer une certaine intelligence de ce calcul. Ceci est le cas dans les exercices suivants, par exemple :

> *<u>Ex n°83 p 60 :</u>*
> *On considère deux nombres x et y strictement positifs tels que $x^2 + y^2 = 1$.*
> *Démontrer que $(x + y)^2 = 1 + 2xy$. En déduire que $x + y > 1$.*
> *<u>Ex n° 87 p 61 :</u>*
> *Soit x un nombre réel quelconque.*
> *a – Démontrer que $x^2 - 1 \geq 2(x - 1)$.*
> *b – En déduire que $x^4 - 1 \geq 4(x - 1)$.*

En conclusion, les exercices proposés relativement aux inégalités rendent donc possible de sélectionner des types de tâches conduisant à un travail de la technique adapté aux besoins des élèves et consistant. Ils permettent également de présenter des raisons d'être du travail sur de tels objets mathématiques en proposant une articulation des dimensions outil et objet. A travers certains de ces exercices, le travail sur les inégalités peut également contribuer à l'évolution du rapport à l'algèbre d'élèves de seconde. Néanmoins, notons que les allégements de programme de l'année 1999-2000[84] vont contribuer à réduire ce champ des possibles pour Benjamin, dans la mesure où un certain nombre de ces exercices mettant en jeu les encadrements sont supprimés. Par ailleurs, l'étude des fonctions n'ayant pas encore été abordée dans ce manuel, les auteurs n'ont pas les moyens de faire vivre dans ce chapitre une articulation entre le registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques qui permettrait de donner du sens aux inégalités étudiées et qui éviterait "un formalisme purement algébrique" comme le disent les auteurs des programmes de seconde.

III.3.2.2 - Le travail sur les inéquations :

Les inéquations du premier degré :

Pour cet objet, les auteurs du Pythagore organisent la transition avec le collège en proposant tout d'abord deux activités introductrices qui conduisent les élèves à retravailler la technique de résolution déjà étudiée en classe de troisième. La première de ces activités permet ainsi la reprise d'éléments technologiques qui justifient cette technique :

> *<u>Activité 1 p 42 :</u> Quelques propriétés des inégalités.*
> ***A – (Re)Trouvailles :***
> *1 – Recopier et compléter les énoncés suivants (on ne demande pas ici de les démontrer, mais il est souhaitable de vérifier sur des exemples).*
> *❶ Soit 3 nombres a, b et c.*
> *Si $a \leq b$, alors $a + c \ldots b + c$*

[84] Pendant l'année 1999-2000, des allégements de programmes ont été mis en place et les encadrements de l'opposé d'un nombre, de la somme de deux nombres, du produit de deux nombres positifs ont été supprimés.

❷ Soit 3 nombres a, b et c.

Si ($a \leq b$ et $c > 0$), alors ac ... bc.

Si ($a \leq b$ et $c < 0$), alors ac ... bc.

[...]

B – Applications

Traiter les questions suivantes en précisant à chaque fois la propriété utilisée.

1 – Résoudre $5x + 7 \leq 4x + 2$

2 – Résoudre $1 + 3x < -5$

3 – Résoudre $x \geq 7 + 5x$.

[...]

Dans la seconde activité, les auteurs proposent un travail de cette technique sur deux types d'inéquations du premier degré : celles sans dénominateur avec la résolution des deux inéquations $9x + 8 \geq 5x + 2$ et $2(x - 11) > 5(x - 8)$ et celles avec dénominateur numérique avec la résolution de $3x - \frac{x-4}{2} < \frac{5x}{3}$ et $\frac{7x}{-4} + \frac{x+1}{-4} \leq \frac{3+x}{-2} - 2x$.

Parmi les vingt et un exercices proposés pour travailler cette technique de résolution, nous distinguons deux types de tâches mathématiques : "résoudre une inéquation du premier degré" (quatorze exercices) et "résoudre un système d'inéquations du premier degré". Pour le premier type, les auteurs mettent l'accent sur la résolution d'inéquations avec dénominateurs numériques (neuf exercices). Il paraît intéressant de pointer ici que, sur les cinq équations sans dénominateur, quatre n'ont pas de solution ou admettent $\mathbb{R}$ comme ensemble de solutions. Le travail sur ce type d'inéquations peut contribuer à faire évoluer le rapport des élèves à la notion de solution à une inéquation, vis à vis de laquelle les élèves de troisième ont bien souvent des conceptions erronées. Enfin, notons que relativement aux inéquations du premier degré, les auteurs n'offrent pas la possibilité d'une articulation des dimensions outil et objet puisqu'aucun problème conduisant à de telles inéquations n'est proposé.

Les inéquations "non élémentaires" :

Aucune activité n'introduit ces nouveaux types de tâches et ne permet l'élaboration d'une technique de résolution de telles inéquations. En revanche, une méthode est institutionnalisée dans le cours :

Méthode p 51 : ***Comment résoudre une inéquation non élémentaire ?***

Suivre les quatre étapes ci-dessous :

1 – Transposer tous les termes à gauche du signe $\leq$ (par exemple, pour que le second membre soit égal à 0.

2 – Factoriser le premier membre.

3 – Faire un tableau de signes (voir Exemple 1 page 52).

4 – "Lire" sur le tableau de signes, l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Dans des exemples à la suite de ce cours, les auteurs présentent l'utilisation de tableaux de signes pour étudier le signe des deux expressions : $A(x) = (x + 2)^2 - (2x - 5)^2$ et $B(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$. Ils profitent de ces exemples pour apporter des éléments techniques et technologiques relatifs au remplissage du tableau. Puis, dans la partie "Savoir-faire", les auteurs proposent un travail sur l'interprétation de ces deux tableaux à travers deux exercices dans lesquels ils énoncent différentes affirmations que les élèves doivent confirmer ou infirmer. Nous reprenons ci-dessous quelques affirmations relatives à l'interprétation du tableau dressé pour l'étude du signe de B(x) :

> *Ex n°24 p 56 : Comprendre un tableau de signes*
> *Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*
> *a – Si $x < 2$, alors $x - 2 < 0$ et $x + 2 < 0$.*
> *c – Si $x = -3$, alors $B(x) = 0$.*
> *e – Si $B(x) < 0$, alors $x \in]-2 ; 2[$.*

Dans la suite de la partie "Exercices", les auteurs proposent vingt-trois exercices conduisant les élèves à résoudre des inéquations non élémentaires ou à étudier le signe d'expressions. L'analyse de ces exercices montre une réelle variété des tâches en ce qui concerne la nature des expressions mises en jeu (polynomiales, rationnelles) et la complexité des factorisations à effectuer : ainsi, nous trouvons des inéquations pour lesquelles les factorisations à effectuer paraissent assez simples du fait de l'existence d'un facteur commun évident, comme l'inéquation $(x + 2)(x + 1) \geq (x + 2)(2x + 3)$, mais il existe aussi des inéquations dont la résolution va mettre en jeu des factorisations sans doute plus problématiques pour un élève de seconde, comme l'inéquation $\dfrac{16x^2 - 25 - 12x + 15}{20 + 16x} \leq 0$.

L'ensemble de ces exercices permet donc la sélection de tâches adaptées aux besoins des élèves et à un travail de la technique consistant.

Par ailleurs, certains de ces exercices peuvent conduire les élèves à prendre du recul par rapport à la technique travaillée. C'est le cas dans les deux exemples suivants :

> *Ex n°32 p 56 :*
> *Résoudre sans tableau de signes*
> *a – $x^2 + 1 < 0$ b – $2x^2 + 7 > 0$*
> *c – $-8 - x^2 \geq 0$ d – $x^2 \leq 0$*
> *Ex n°67 p 59 :*
> *Résoudre les deux inéquations suivantes à l'aide d'un même tableau de signes.*
> *a – $(x - 5)(x + 3)(1 - x) \geq 0$ b – $\dfrac{(x-5)(x+3)}{1-x} \geq 0$*

Le premier de ces exercices permet également un travail sur le sens interne des expressions algébriques et sur les informations que l'on peut en tirer. D'autres exercices dans cette partie permettent aussi un tel travail, comme l'exercice suivant :

> *Ex n°74 p 60 :*
> *Indiquer, sans les résoudre, si les deux inéquations suivantes ont le même ensemble de solutions.*
> *$x + 3 \leq 5$ et $(x + 3)(x^2 + 1) \leq 5(x^2 + 1)$.*

Notons également que, dans cet ensemble d'exercices, les auteurs proposent deux exercices qui peuvent faire sentir une raison d'être des types de tâches mathématiques étudiés : déterminer le signe d'expressions pour étudier l'ensemble de définition de fonctions. Ceci apparaît dans l'exercice suivant, par exemple :

Ex n°72 p 60 :
On pose $A(x) = x^2 - 8x$.
a - Factoriser $A(x)$.
b - Déterminer les réels x pour lesquels $A(x) = 0$.
c - Déterminer les réels x pour lesquels $A(x) \geq 0$.
d - Quel est, suivant x, le signe de $A(x)$?
e - Quel est l'ensemble des réels x tels que $\frac{1}{x^2 - 8x}$ existe ?
f - Même question avec $\sqrt{x^2 - 8x}$.
g - Même question avec $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 8x}}$.

En revanche, comme pour le travail sur les équations du premier degré, les auteurs ne proposent pas de situations conduisant à ce nouveau type d'inéquations.

En conclusion, les exercices proposés dans le Pythagore sur le thème des inéquations du premier degré rendent possible un travail de révision des types de tâches étudiés au collège adapté qui permet d'envisager une certaine évolution du rapport des élèves à la notion de solution à une inéquation. Pour les inéquations non élémentaires, les exercices permettent un travail de la technique avec des possibilités de complexification et une réflexion sur les informations que l'on peut tirer d'expressions algébriques, qui vont contribuer à l'évolution du rapport à l'algèbre que l'on peut attendre d'un élève de seconde. Enfin, pour ces deux thèmes, aucune articulation des dimensions outil et objet de l'algèbre n'est présente dans ce chapitre.

III.3.3 - Analyse des stratégies d'enseignement :

Nous centrons ce paragraphe sur l'analyse des stratégies d'enseignement élaborées par Benjamin dans ce chapitre consacré aux inéquations et aux inégalités. Dans une première partie, nous présenterons les différents types de tâches que les élèves y ont rencontrés. Cette étude nous a amenée à axer notre travail sur les deux points suivant : le travail sur les inégalités et celui sur les inéquations non élémentaires. L'analyse de ces deux axes fera l'objet des deux parties suivantes.

III.3.3.1 - Identification des types de tâches rencontrés par les élèves :

Au cours de ce chapitre, les élèves traitent vingt-neuf exercices du livre et deux activités. L'analyse des tâches mathématiques abordées à travers ces exercices fait apparaître des types de tâches anciens ou s'appuyant fortement sur les connaissances anciennes des élèves : résoudre une inéquation du premier degré (douze exercices, douze spécimens) et résoudre un système de deux inéquations du premier degré à une inconnue (trois exercices, trois spécimens).

Les autres types de tâches sont nouveaux pour les élèves de seconde. Nous pouvons les classer selon quatre thèmes :

- *l'étude d'inégalités* : manipuler des inégalités pour déterminer le signe de nombres inconnus (un spécimen), encadrer la somme ou le produit de nombres (deux exercices, six spécimens), comparer a^2 et b^2 lorsque a et b sont deux nombres réels (un spécimen), démontrer des propriétés liées à des inégalités en utilisant l'algèbre (une activité, trois spécimens) ;

- l'étude d'inéquations non élémentaires et de problèmes s'y ramenant : déterminer le signe d'un produit (trois exercices, trois spécimens), résoudre une inéquation conduisant à l'étude du signe d'un produit (cinq exercices, six spécimens), résoudre une inéquation conduisant à l'étude du signe d'un quotient (deux exercices, deux spécimens), dire si une affirmation relative à un tableau de signe donné est juste ou fausse (un exercice, dix spécimens) ;

- l'étude des intervalles et des opérations portant sur ces objets : utiliser différentes représentations d'intervalles (algébriques, graphiques) (trois exercices, dix-neuf spécimens), déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles (un exercice, six spécimens)

- l'étude d'inéquations avec valeurs absolues : résoudre une inéquation de la forme $|x-a| \leq d$ ou $|x-a| \geq d$ (un exercice, deux spécimens).

En ce qui concerne le type de tâches ancien "résoudre une inéquation du premier degré", le schéma didactique choisi est très proche de ceux décrits dans nos analyses du chapitre consacré aux équations et adoptés pour d'autres types de tâches routiniers : Benjamin commence par rappeler des éléments technologiques et techniques et propose ensuite des exercices pour le travail de la technique.

Pour la résolution des systèmes d'inéquations, il propose lors d'une séance de module une méthode, extraite du manuel de la classe, à appliquer sur un certain nombre d'exemples. Se nouveau nous retrouvons donc ici un schéma déjà décrit dans le chapitre sur les équations, pour le travail sur les équations dont l'inconnue figure au dénominateur.

Il est important de noter toutefois que, contrairement à ce qui se passait dans le chapitre consacré aux équations, l'étude des inéquations du premier degré se situe uniquement dans la dimension objet et que ces objets ne sont pas utilisés pour résoudre des problèmes. Ceci s'explique très certainement par le fait que, dans le manuel de la classe, aucun exercice permettant de mettre en jeu les inéquations comme outil de résolution de problème n'est proposé.

Les schémas didactiques n'ayant pas profondément évolué, nous ne centrerons pas notre étude sur ces deux types de tâches. En ce qui concerne l'étude des inéquations avec des valeurs absolues, le travail algébrique est assez limité ; de même, pour l'étude des intervalles et des opérations portant sur ces objets, les connaissances algébriques mises en jeu sont restreintes. L'analyse de ces deux questions n'apporte donc pas d'informations nouvelles, c'est pourquoi nous faisons ici le choix de faire porter l'analyse sur l'étude d'inégalités et d'inéquations non élémentaires.

III.3.3.2 - Le travail sur les inégalités :

Le travail sur les inégalités fait l'objet du début de ce troisième chapitre consacré à l'algèbre et est essentiellement centré sur l'introduction de nouvelles propriétés : la somme et le produit d'inégalités de même sens, la comparaison des carrés et des racines carrées de deux nombres positifs, la comparaison des inverses de deux nombres non nuls. L'étude de cette introduction s'est faite suivant le questionnement suivant :

- Comment ces nouvelles propriétés sont-elles introduites et travaillées ?

- Comment s'organise l'articulation avec les objets anciens ?

- Existe-t-il une articulation de registres ? Si oui, comment est-elle effectuée ?

Nous faisons ici le choix d'étudier ces questions à travers deux types de tâches mathématiques introduits par Benjamin : "encadrer la somme ou le produit de deux nombres" et "comparer les carrés de deux nombres positifs".

Une première étude :

Il s'agit ici d'analyser les schémas didactiques mis en place pour les organisations mathématiques associées aux types de tâches mathématiques "encadrer la somme de deux nombres" (T_{encS}) et "encadrer le produit de deux nombres positifs" (T_{encP}).

L'enseignement sur ce thème débute par la mise en place d'éléments technologiques, puis il se poursuit par un travail de la technique. Nous étudions ci-dessous ces deux étapes.

Première étape : mise en place d'éléments technologiques

Benjamin débute cette première étape par la distribution d'une fiche polycopiée sur laquelle nous trouvons d'abord un rappel de propriétés sur les inégalités déjà étudiées au collège :

I – Opérations sur les inégalités :
1) Rappels :
Prop : Soient a, b et c trois nombres réels.
$a \leq b$ est équivalent à $a + c \leq b + c$.
Prop : Soient a, b et c trois nombres réels.
Si $c > 0$ alors : $a \leq b$ équivaut à $ac \leq bc$
Si $c < 0$ alors : $a \leq b$ équivaut à $ac \geq bc$

Lors du deuxième entretien, Benjamin nous explique qu'il a choisi de présenter ces résultats sur une fiche polycopiée pour gagner du temps en évitant aux élèves de les recopier, et qu'il s'est inspiré de la première activité préparatoire proposée dans ce chapitre par les auteurs du manuel de la classe (que nous avons analysée dans le paragraphe consacré à l'étude du champ des possibles, cf. page 140). Comme dans le Pythagore, Benjamin cite donc les différentes propriétés dans un cadre décontextualisé, sans exercice introductif et sans prise d'informations sur les connaissances des élèves. Mais contrairement à ce manuel, il n'amène pas les élèves à articuler le registre des écritures algébriques et celui du langage naturel, il ne fait pas démontrer ces propriétés et il ne les fait pas appliquer dans le cours (elles seront en fait réinvesties, par la suite, lors d'une séance de module consacrée à la résolution des inéquations du premier degré). Son objectif est donc uniquement de rappeler ici aux élèves des résultats déjà étudiés au collège et ce rappel est pour lui l'occasion d'effectuer une transition didactique avec le collège, puisqu'il nous explique :

AL : Quel était ton objectif ici ?

B : Puisque c'étaient des choses qu'ils connaissaient, c'était déjà de les remettre au point. Parce que j'essaie toujours de me rattacher à ce qu'ils connaissent.

Il exprime clairement ici sa volonté de se raccrocher aux connaissances anciennes de ses élèves avant d'introduire de nouveaux objets, de nouvelles tâches mathématiques. Mais il le fait le plus rapidement possible, comme une mise au point, non comme une prise d'information. Suite à ce rappel, deux nouvelles propriétés relatives à la somme et le produit d'inégalités de même sens sont introduites. Ces deux propriétés sont également présentées dans l'activité citée ci-dessus avec le même schéma que pour les deux propriétés étudiées au collège (propriétés à compléter, énoncés à produire dans le langage naturel, applications directes, démonstrations). Ces deux nouvelles propriétés sont travaillées sur le même schéma, nous présentons ci-dessous le travail mené autour de la propriété suivante, dont l'énoncé est proposé sur la fiche polycopiée distribuée aux élèves :

> *<u>Prop :</u> Soient a, b, c et d quatre nombres réels.*
> *Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$*

Sur cette fiche, Benjamin a laissé une place pour la démonstration qu'il choisit de mener avec ses élèves. Nous reproduisons ci-dessous la démonstration écrite dans le cahier de cours d'une élève :

> *<u>Démonstration :</u> Hyp : $a \leq b$ et $c \leq d$*
> *On veut montrer que $a + c \leq b + d$*
> *Pour cela, on étudie le signe de $(a + c) - (b + d)$:*
> $(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = \underbrace{a - b}_{\leq 0} + \underbrace{c - d}_{\leq 0} \leq 0$ *donc* $a + c \leq b + d$

L'objectif de Benjamin est alors double : il souhaite présenter à ses élèves une méthode pour comparer deux nombres (étude du signe de la différence entre ces deux nombres) et il veut les sensibiliser à l'utilisation de l'algèbre pour prouver une propriété. Nous avons déjà pointé ce souci dans le paragraphe consacré à sa vision des difficultés rencontrées par ses élèves.

Benjamin ne fournit pas de détails précis quant à la manière dont il a géré la classe à ce moment, mais l'analyse des traces écrites du cahier de cours reprises ci-dessus et quelques remarques de Benjamin pendant le deuxième entretien[85] nous amènent à supposer qu'il a mené lui-même cette démonstration tout en essayant de faire participer sa classe à l'aide d'un cours dialogué : il tente de cette façon de laisser une place aux élèves dans la construction de ce type de raisonnement, mais il conserve la plus grande responsabilité dans la production de cet écrit.

Il semble que, face aux démonstrations de ces deux propriétés, les élèves ont rencontré quelques difficultés que Benjamin n'avait pas prévues puisqu'il évoque lors du deuxième entretien une "petite démonstration" qu'il ne trouvait pas difficile "mais qui a eu du mal à passer quand même".

L'énoncé de ces deux propriétés est suivi de deux exemples d'application directe :

> *<u>Exemples :</u> Si $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ alors $x + y \leq 5$, $xy \leq 6$*
> *Si $x \leq -2$, $0 \leq y \leq 1$ alors $x + y \leq -1$, rien sur xy a priori.*

Ces deux exemples permettent donc à Benjamin d'amorcer un travail de la technique pour T_{encS} et T_{encP}. Ainsi, le premier exemple permet de s'approprier les deux propriétés étudiées précédemment afin d'encadrer la somme et le produit de deux nombres positifs. En

---

[85] Ainsi, dans cet entretien, il évoque des épisodes analogues à celui-ci et il nous explique : "j'essaie de détailler, de m'arrêter, d'en parler avec eux".

ce qui concerne le deuxième exemple, il nous semble particulièrement intéressant de noter que Benjamin a tenu à présenter un exemple où la propriété 2 n'est pas applicable (un des deux nombres n'est pas positif) et que nous ne trouvons une telle présentation dans aucun des trois manuels qu'il utilise. Benjamin a donc le souci d'amener ses élèves à réfléchir aux limites de certaines propriétés. En revanche, nous ne savons pas comment Benjamin a exploité cet exemple et en particulier comment il a expliqué pourquoi on ne peut rien dire sur le signe du produit xy.

Deuxième étape : travail de la technique

Le travail de la technique associée aux deux types de tâches T_{encS} et T_{encP} s'effectue à travers deux exercices du manuel :

Ex n° 40 p 57 :
Les réels x et y vérifient : $1{,}2 < x < 1{,}3$ *et* $2{,}4 < y < 2{,}5$.
Encadrer les réels suivants : $x + y$; $x - y$; $5x - 4y$; xy.

Ex n° 44 p 57 :
Encadrer $\frac{1+A}{2}$ *sachant que* $2{,}236 < A < 2{,}237$.
Encadrer $\frac{5-2B}{10}$ *sachant que* $3{,}16 < B < 3{,}17$.

Le premier exercice permet de réinvestir les connaissances du collège sur les inégalités et d'utiliser les nouvelles propriétés étudiées en cours. Le second est, quant à lui, uniquement basé sur les connaissances anciennes des élèves. Alors qu'il s'agit de types de tâches nouveaux pour les élèves, le travail technique, limité au traitement de deux exercices, est très restreint et aucune complexification de ce travail n'est mise en place. Enfin, les types de tâches T_{encS} et T_{encP} ne sont pas évalués dans le devoir surveillé consacré au chapitre 3. Nous pointons donc ici un changement de pratique par rapport aux deux chapitres étudiés précédemment : il s'agit, en fait, de la réponse de Benjamin aux attentes institutionnelles. Benjamin a choisi de traiter des points qui sont dans les allégements de programme mais en n'insistant pas trop. Sa stratégie est donc de présenter les résultats technologiques relatifs aux types de tâches concernés, de limiter le travail de la technique à quelques exercices d'application très simples et de ne pas les évaluer.

Une deuxième étude :

Il s'agit d'étudier l'organisation mathématique associée au type de tâches "comparer les carrés de deux nombres positifs" ($T_{compcarré}$) et l'organisation didactique choisies par Benjamin. L'étude de $T_{compcarré}$ se fait parallèlement à celle de deux autres types de tâches "comparer les racines carrées de deux nombres positifs" et "comparer les inverses de deux nombres strictement positifs" et nous profiterons de cette partie pour analyser également le travail relatif à ces deux types de tâches.

La stratégie choisie par Benjamin pour introduire ces nouveaux types de tâches est différente de celle mise en place pour les types de tâches "encadrer la somme ou le produit de deux nombres" : il choisit ici d'utiliser une activité préparatoire du manuel de la classe (l'activité 4 p 44, présentée à la page 139). Lors du deuxième entretien, il apparaît que Benjamin s'est posé des questions quant au type de tâches didactiques "introduire un nouvel objet, une nouvelle tâche mathématique" :

B : Moi ce qui me pose le plus problème c'est comment leur parler des choses, ce que je leur dis. Comment est-ce que je vais introduire cela ? Cela m'embête de leur dire de but en blanc : voilà c'est ça, ça et ça. Alors des fois il y a des activités qui marchent vachement bien, cela se passe bien et des fois je ne sais pas trop quoi leur dire. Cela m'embête toujours de leur balancer un truc comme ça. Donc c'est pour ça que j'essaie toujours de leur faire découvrir. Même si ce n'est pas toujours une activité formelle, un truc qu'on a pris dans le bouquin, au moins essayer de... en parlant avec eux ou se raccrocher à ce qu'ils ont fait avant.

Ce type de tâches didactiques semble donc être assez problématique pour lui. Et lors de l'introduction d'un nouvel objet ou d'une nouvelle tâche mathématique, Benjamin a le souci de ne pas commencer directement par un cours. Il essaie de trouver une activité qui lui permet de mettre en place une première rencontre. Mais, s'il ne trouve pas de telle activité, il met en place une autre stratégie : il fournit un discours introductif où il fait éventuellement référence à ce que les élèves connaissent déjà.

Pour introduire les trois types de tâches mathématiques qui font l'objet de notre étude dans cette partie, Benjamin a donc choisi une activité du manuel qui conduit les élèves à démontrer trois nouvelles propriétés. Le travail des élèves est placé d'emblée dans un cadre formel et rien, dans l'énoncé de l'activité, ne permet de motiver a priori les types de tâches "comparer les carrés, les racines carrées de deux nombres positifs, les inverses de deux nombres strictement positifs"[86]. Pour la mise en place de cette activité dans la classe, Benjamin a choisi de la reprendre telle qu'elle est présentée dans le livre, comme il nous l'explique lors du deuxième entretien :

AL : Tu as repris l'activité directement sous cette forme là ?

B : Oui je l'ai prise vraiment comme dans le bouquin. Bon moi cela ne me semblait pas vraiment... Parce que, finalement, cela n'utilise que les identités remarquables.

Lors de la préparation de son chapitre, cette activité ne lui a donc pas semblé trop compliquée car les seules connaissances qui lui semblaient alors nécessaires étaient celles liées à la transformation d'écritures littérales, les identités remarquables. Toutefois, il était conscient que ce n'est pas une activité très simple non plus, puisqu'il nous explique également :

B : Je n'aurais jamais donné ça à faire à la maison. On était en classe, je guidais l'élève.

Sa stratégie pour mettre en place cette activité dans la classe est donc d'envoyer une élève au tableau et de la guider. Lors du deuxième entretien, Benjamin nous explique comment s'est déroulé cet épisode :

B : Là une fois qu'on a lu ça, je les laisse patauger pendant quinze secondes évidemment. Et puis je dis : quand tu vois b^2-a^2, cela te fait penser à quoi ? Elle répond tout de suite : identité remarquable et elle écrit. Et après (b-a)(b+a)... Je dis : on veut que ce soit du même signe que b-a, on a déjà b-a donc on va regarder ce qui se passe avec b+a. Alors après dire comme b et a sont positifs, b+a est positif...

Benjamin guide donc l'élève à travers tout le traitement de l'activité. Mais, malgré ce guidage, les élèves rencontrent des difficultés, auxquelles il ne semblait pas forcément

---

[86] Une application numérique ("Comparer sans calculatrice $5\sqrt{2}$ et 7") permet de motiver a posteriori $T_{\text{compcarré}}$, mais rien ne permet de motiver les deux autres types de tâches.

s'attendre puisque, comme nous l'avons expliqué, cette activité ne lui semblait pas vraiment compliquée. Il n'avait visiblement a priori pas prévu les difficultés des élèves à manipuler les inégalités et, en particulier, à saisir le raisonnement : si a est positif et b positif, alors a + b est positif. Ce type de raisonnement est naturalisé pour Benjamin et il n'avait pas pris conscience que cela pouvait poser problème à ses élèves. Il est pourtant conscient qu'il s'agit d'une nouveauté pour les élèves de seconde, puisque, suite à une de nos remarques, il nous explique :

> AL : C'est sûr que ce genre de choses ils en ont sûrement peu vu en collège...
>
> B : Ah ça j'en suis conscient, bien sûr. Alors je reviens toujours à des exemples numériques : tu prends a=1, b=2, cela fait 3, c'est positif. Prenons plusieurs exemples comme ça. Ils finissent par être convaincus mais après, une fois que l'on revient à b+a positif, cela ne va plus. Il y a un blocage quand on passe de l'un à l'autre.

La prise en charge de cette nouveauté se fait donc grâce au passage dans le numérique, ce qui lui permet, comme nous l'avons déjà vu dans la partie consacrée à l'analyse des difficultés d'élèves, de raccrocher les élèves à leurs connaissances anciennes. Pourtant, il se rend compte ici des limites de cette stratégie puisque les élèves, convaincus de la propriété dans le cadre numérique, sont bloqués par le passage du numérique au littéral. Par ailleurs, nous remarquons ici que Benjamin ne fait pas appel à la propriété étudiée précédemment "Soient a, b, c, et d quatre nombres réels, si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$" qui lui permettrait de justifier que $a + b \geq 0$ dans le cadre littéral.

En outre, le nombre d'étapes nécessaires pour montrer que $b^2 - a^2$ a le même signe que $b - a$ est assez important et nécessite la connaissance du fait que le signe d'un produit est gouverné par le signe de ses facteurs, ce qui n'a rien d'évident pour un élève de seconde. Il semble que Benjamin n'ait pas eu conscience du fait que la complexité d'un raisonnement n'est pas la simple somme des complexités de ses différentes étapes.

Devant les problèmes rencontrés par sa classe face à cette démonstration, Benjamin s'est interrogé sur cet épisode et cette réflexion l'a conduit à modifier quelque peu ses pratiques lors de l'introduction d'un autre résultat relatif aux inégalités : la comparaison de a et a^2, lorsque a est un nombre positif. En effet, au lieu de guider directement les élèves dans la démonstration d'un théorème, il commence par leur demander de prévoir le résultat cherché :

> B : Et, par contre, la comparaison de a et a^2 qui dépend de $a>1$ ou $a<1$, ça, c'est passé comme une lettre à la poste. Au début je leur ai posé la question, ils m'ont dit que forcément a^2 est plus grand que a. Je leur ai donné des exemples numériques : 1/2, 1 et 2. Là tout de suite : ah oui cela change en 1. On a fait la démonstration et là cela a été. [...] Pourquoi ? Je n'en sais rien. Parce que finalement la démonstration n'est pas plus simple que ce que l'on fait là. Mais peut-être qu'avec des exemples numériques au départ... Alors que là il n'y a rien auquel se raccrocher. Alors peut-être qu'il aurait fallu commencer par demander à comparer 2^2 et 4^2. Je ne sais pas.

Au cours des analyses précédentes, nous avons pu pointer à plusieurs reprises que Benjamin est un stagiaire qui s'est posé de nombreuses questions tout au long de l'année. Nous avons, ici encore, un exemple où un incident particulier l'amène à adopter une posture réflexive par rapport à ses propres pratiques.

Pour terminer notre étude du travail autour de l'activité relative à la comparaison de nombres, nous proposons d'analyser les traces écrites dans le cahier d'une élève, pour étudier comment ont été traitées les questions de l'activité :

> *<u>A - Carrés</u>*
>
> *1)* $b^2 - a^2 = \underbrace{(b + a)}_{\geq 0}(b - a)$
>
> *Si b – a est positif, alors (b + a)(b – a) est positif, c'est-à-dire que $b^2 - a^2$ est positif.*
>
> *Si b – a est négatif, alors (b + a)(b – a) est négatif, c'est-à-dire que $b^2 - a^2$ est négatif.*
>
> *2)* *Si $a \leq b$ alors b – a est positif*
> *alors $b^2 - a^2$ est positif*
> *alors $b^2 \geq a^2$*
>
> *Si $a \geq b$ alors b – a est négatif*
> *alors $b^2 - a^2$ est négatif*
> *alors $b^2 \leq a^2$*
>
> *4)* $b^2 - a^2 = \underbrace{(b + a)}_{\leq 0}(b - a)$
>
> *Si $b \geq a$ alors b – a est positif*
> *alors $b^2 - a^2$ est négatif*
> *alors $b^2 \leq a^2$*
>
> *[...]*
>
> *<u>C – Inverses :</u>*
>
> *1)* $a > 0, b > 0, \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}$
>
> *positif*
>
> $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ est du même signe que a – b donc du signe contraire à b – a.
>
> *2)* Si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$
> alors $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq 0$
> alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
>
> *Si $a \geq b$ alors* $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$

L'analyse de ces traces écrites confirme les informations prises lors de la description de la séance par Benjamin : il semble avoir, en effet, beaucoup guidé l'élève au tableau car la rédaction est très détaillée.

Il nous semble important d'analyser la réponse fournie à la question 4 de la partie A[87] : en effet, contrairement aux autres questions, cette question est ouverte et ne guide pas les élèves vers une méthode de résolution. A une telle question, l'on peut attendre deux types de réponses : soit on utilise un contre-exemple, ce qui montre que la proposition considérée est fausse, soit on reprend un raisonnement algébrique pour étudier le signe de $b^2 - a^2$ en fonction

[87] Il s'agit de la question : "Si a et b sont négatifs, est-ce que a^2 et b^2 sont dans le même ordre que a et b ?"

du signe de b – a. Les traces écrites, ci-dessus, montrent que Benjamin a choisi le second type de réponse et n'a pas exploité ici la notion de contre-exemple. La suite de notre étude montrera qu'au cours de l'année, Benjamin a fait le choix de ne pas inciter les élèves à l'utilisation de contre-exemples par crainte qu'ils ne généralisent ensuite des propriétés à l'aide d'exemples. L'analyse des difficultés rencontrées par ses élèves, dans des types de tâches mettant en jeu l'algèbre comme outil de preuve, a montré que sa réflexion sur l'intérêt d'un travail spécifique sur la notion de contre-exemple est apparue plus tard. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

L'étude de ce type de tâches se termine par l'institutionnalisation du résultat démontré et Benjamin fait noter le résultat suivant dans le cahier de cours :

> *3) Rangement des carrés, des racines carrées et des inverses*
> *Propriété : Deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, c'est-à-dire : si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.*
> *Attention : si les nombres sont négatifs, alors l'ordre est inverse : $-3 \leq -2$ mais $(-3)^2 \geq (-2)^2$*
> *[...]*

Ce type de tâches ne sera pas réinvesti dans la suite du chapitre. Il existe toutefois quelques exercices dans le manuel de la classe, conduisant à des problèmes de comparaison (par exemple, comparer sans calculatrice 7 et $\sqrt{50}$), mais Benjamin n'a pas choisi de mener un travail technique autour de ce type de tâches. Et lors du deuxième entretien, il nous expliquera que ses élèves savent appliquer ces propriétés au niveau numérique. Par ailleurs, son interprétation des allégements de programme l'a amené à penser que le travail technique associé à ce type de tâches devait également être restreint :

AL : Ces comparaisons avec les carrés, les racines, tu les as réinvesties dans des exercices ?

P : Pas tellement finalement. Parce que, quand on regarde les allégements, bon...

Par ailleurs, comme nous l'avions prévu au début de cette étude du chapitre "Inégalités, inéquations", l'analyse de l'organisation mathématique associée au type de tâches $T_{compcarrés}$ fait apparaître qu'aucune interprétation graphique n'a été proposée. Il était bien entendu que Benjamin ne pouvait le faire à ce stade de sa progression dans l'année, puisque l'étude des fonctions n'a pas encore été menée. Il sera donc particulièrement pertinent d'étudier si une telle articulation sera proposée dans le chapitre consacré à l'étude des fonctions.

III.3.3.3 - Le travail sur les inéquations non élémentaires :

L'étude de ces nouvelles inéquations, introduites en classe de seconde, est menée parallèlement à l'étude du signe d'expressions algébriques, avec l'introduction de la méthode du tableau de signes. Pour ce faire, Benjamin choisit d'organiser le travail en deux temps : l'étude du signe d'une expression de la forme ax + b, puis du signe d'un produit ou d'un quotient.

Afin de répondre à nos questions initiales, nous proposons d'analyser d'abord les organisations mathématique et didactique associées au type de tâches "étudier le signe d'une expression de la forme ax + b", puis nous centrerons sur l'étude du signe de produits.

Etude du signe d'une expression de la forme ax + b :

L'étude de ce type de tâches se fait en deux temps : la mise en place d'une technique et d'éléments technologiques, puis le travail de cette technique.

Première étape : mise en place d'une technique et d'éléments technologiques :

Cette mise en place se fait lors d'une séance de cours, où Benjamin expose une technique permettant d'étudier le signe de telles expressions. Cette technique est présentée dans le cas général en distinguant les trois possibilités : a > 0, a < 0, a = 0. Nous présentons ci-dessous les traces écrites dans le cahier de cours d'une élève :

III – Signe d'une expression

1 – Signe de ax + b

On veut connaître le signe de l'expression ax + b avec a et b, nombres réels, en fonction de x.

On va chercher les réels x tels que $ax + b \geq 0$.

1^er^ cas : $a > 0$

$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$ $\qquad -\frac{b}{a} \qquad$ $+\infty$
Signe de ax + b	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

2^ème^ cas : $a < 0$

$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$ $\qquad -\frac{b}{a} \qquad$ $+\infty$
Signe de ax + b	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$

3^ème^ cas : $a = 0$

$ax + b = 0 \times x + b = b$

Le signe de ax + b est celui de b !

Lors de cette étude, Benjamin est confronté très rapidement à deux problèmes : tout d'abord, certains élèves rencontrent, de nouveau, des difficultés pour suivre les différents calculs algébriques menés par lui-même et il rencontre de grosses difficultés pour les convaincre, puis de nombreux élèves ne comprennent pas l'utilité du tableau de signes :

> B : Et, bon, ils se demandaient pourquoi on faisait un tableau de signes. Alors c'est vrai que faire un tableau de signes pour ax+b, c'est un peu nul, je suis d'accord. Donc il y a une élève qui m'a dit que cela ne servait à rien. Alors là je lui ai dit que cela servira pour ce que l'on fera après.

Pour pallier ces difficultés, Benjamin décide alors de traiter sur-le-champ avec les élèves un exemple numérique dans le cours :

Exemples : étudier le signe de 2x + 3

Pour connaître le signe de 2x + 3, il suffit de connaître l'ensemble des nombres x tels que cette expression soit positive. On résout $2x + 3 \geq 0$.

$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{3}{2} \quad$ $+\infty$
Signe de 2x + 3	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

Malgré cet exemple de nouvelles difficultés apparaissent, les élèves ne comprenant pas la technique utilisée :

> B : Aussi ce qui les gênait, je crois, c'est que pour connaître le signe de ax+b ou de 2x+1 par exemple, il suffit de savoir quand c'est positif et après on sait quand c'est négatif. Ça j'ai l'impression que cela les a beaucoup gênés aussi. Moi, comme je considérais que c'était évident, je leur ai dit au départ : il suffit de voir quand c'est positif. Je n'ai étudié que le cas positif et après dans le tableau on mettait un moins. Pourquoi on met moins ici, etc. ?

Devant ces différentes difficultés, il décide de préparer pour la séance suivante une fiche présentant plus clairement cette technique, où il justifie notamment pourquoi dans une étude de ce type il est possible de se limiter à l'étude du cas $ax + b \geq 0$ et où il propose un exercice d'application directe de cette technique :

Signe de ax + b

Etude d'un exemple :

On veut connaître le signe de 2x +1 en fonction de x

$2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$	$2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$
(1)	*(2)*

On consigne ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad -\frac{1}{2} \quad$ $+\infty$
Signe de 2x+1	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

On remarquera qu'une des études (1) ou (2) est superflue : en effet, lorsqu'on connaît les réels x tels que $2x + 1 \geq 0$, on déduit facilement l'ensemble des réels x tels que $2x + 1 \leq 0$. Il suffit donc de résoudre l'une des deux inéquations, au choix, et d'en déduire le tableau de signes.

Exercice : étudier le signe de $-3x + 2$.

Benjamin poursuit ensuite l'étude du signe d'expressions par la mise en place d'une deuxième organisation mathématique consacrée à l'étude du signe d'un produit.

Etude du signe d'un produit :

Le travail relatif à l'organisation mathématique associée au type de tâches mathématiques "étudier le signe d'un produit" (que nous noterons maintenant $T_{sgn(\pi)}$se fait en deux temps : la mise en place d'une technique, puis le travail de cette technique. Nous analysons ci-dessous ces deux phases.

<u>Première étape : la mise en place d'une technique</u>

L'étude du signe d'un produit débute directement par un cours où Benjamin expose une méthode, une "recette" à appliquer :

> <u>*2 – Signe d'un produit :*</u>
> *Lorsque l'on doit étudier le signe d'une expression "plus compliquée", on va factoriser cette expression pour obtenir un produit de facteurs de la forme ax + b.*
> *On construira alors un tableau récapitulatif qui permettra de lire le signe de l'expression.*

Cette méthode est immédiatement appliquée sur un exemple traité dans le cahier de cours et, lors de cette résolution, un élève est envoyé au tableau pour remplir le tableau de signes :

> <u>*Exemple :*</u> *étudier le signe de* $x(x-1)(-3x+5)$
> *Signe de x : pas d'étude !*
> *Signe de* $x-1$: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
> *Signe de* $-3x+5$: $-3x+5 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$

x	$-\infty$		*0*		*1*		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe de x		–	0	+		+		+	
signe de x – 1		–		–	0	+		+	
signe de –3x + 5		+		+		+	0	–	
signe de l'expression		+	0	–	0	+	0	–	

> $x(x-1)(-3x+5)$ *est positif lorsque* $x \in [1 ; \frac{5}{3}] \cup]-\infty ; 0]$
> $x(x-1)(-3x+5)$ *est négatif lorsque* $x \in [0 ; 1] \cup [\frac{5}{3} ; +\infty[$

L'analyse de cette phase de mise en place de $\tau_{sgn(\pi)}$ nous amène à formuler différentes remarques. La première est qu'aucune raison d'être de l'étude du signe d'une telle expression n'apparaît. En effet, que ce soit dans l'analyse des traces écrites du cahier de cours ou du cahier d'exercices, dans les entretiens ou dans le cahier de bord de Benjamin, rien n'indique que la question justifiant l'étude de ce signe n'a été évoquée et rien ne peut permettre aux élèves de prendre conscience qu'une telle expression peut changer plusieurs fois de signe contrairement aux seules expressions déjà étudiées (celles de la forme ax + b) ;

Nous notons ensuite que, comme pour les chapitres précédents, Benjamin a fait le choix de présenter une méthode, illustrée immédiatement à travers la résolution d'un exercice, toujours avec le souci sous-jacent d'expliquer "proprement" la démarche à suivre et de faire participer les élèves à la résolution de l'exercice par l'envoi d'un élève au tableau et par un jeu de questions-réponses avec le reste de la classe, comme il nous l'explique lors du deuxième entretien :

> B : Bon ce qu'il faut voir aussi, c'est que j'écris ça mais je leur dis aussi pas mal de choses à côté. Je pose des questions. J'essaie de rendre ça un peu vivant. Cela ne suffit pas. Souvent j'écris un graffiti au tableau : regardez moins un fois moins deux cela fait un truc positif. Pour expliquer la démarche qu'on va employer...

Par ailleurs nous remarquons que, comme dans les chapitres précédents, les élèves ne participent pas à l'élaboration de cette technique : ils n'ont qu'à suivre la "recette" proposée par Benjamin. Il ne laisse pas les élèves réfléchir au problème posé et ne leur laisse aucune autonomie quant à la conception de la technique, qui n'est, par ailleurs, pas complètement justifiée : le seul élément technologique évoqué avec les élèves lors du remplissage du tableau est la règle des signes lors de la multiplication de nombres relatifs qui est évoquée oralement (Benjamin nous le précise lors du deuxième entretien) et qui n'apparaît pas dans le cahier de cours.

En outre, à travers le cours de Benjamin, nous ne trouvons pas de réponse aux deux questions suivantes : pourquoi commencer par factoriser ? Pourquoi utiliser un tableau ? Ceci induit qu'une réflexion sur les formes adéquates n'est pas menée au moment de l'introduction de cette technique. Par suite, le tableau apparaît ici comme une nécessité et pas comme un moyen de faciliter la tâche. Relativement à cette remarque, nous notons que, dans les trois manuels utilisés par Benjamin, il n'existe pas d'activités ou de commentaires amenant les élèves à comprendre l'intérêt d'un tel tableau. De plus, lors de la préparation de son cours, Benjamin n'a pas vu l'utilité d'une quelconque activité pour introduire ces tableaux, comme il nous l'explique lors du deuxième entretien :

> B : . Je n'ai pas regardé ce qu'il y avait mais je ne sais pas ce qu'il y a sur les tableaux de signes...Parce que pour moi, c'est le genre de choses où, en parlant un petit peu, en expliquant que deux nombres négatifs en les multipliant cela fait un nombre positif, etc., en mettant ça au point, comme c'est des choses qu'ils font assez bien, ça, moi je pense que je pouvais me dispenser d'activité là-dessus.

Benjamin reste complètement centré sur la technique de remplissage du tableau. L'utilisation du tableau de signes est pour lui un geste naturel et il ne perçoit pas la nécessité d'en justifier l'usage.

Enfin la démarche quelque peu directive de Benjamin empêche les élèves de prendre conscience que certains raisonnements envisageables lors de la résolution de tels problèmes peuvent être incorrects, comme par exemple celui qui consisterait à utiliser la propriété fausse "le produit de deux termes est positif si et seulement si chacun de ses termes est positif".

<u>Deuxième étape : le travail de la technique</u>

Après ce cours, Benjamin poursuit sa séance par un exercice d'application :

> *<u>Ex n° 25 p 56 :</u>*
> *On pose* $f(x) = (2x-1)^2 - 3(2x-1)(x+2)$
> *Factoriser f(x) et étudier son signe.*

Nous retrouvons ici le souci de Benjamin de complexifier progressivement le travail de la technique : alors que dans l'exemple du cours, la seule sous-tâche était le remplissage du tableau, dans l'exercice 25 s'ajoute une sous-tâche "factoriser une expression algébrique".

Puis il propose un exercice à traiter à la maison :

> *Ex n 27 p 56 :*
> *On considère $f(x) = (x-2)(2x+7) - (x^2 - 4)$*
> *a - Développer f(x).*
> *b - Factoriser f(x)*
> *c - Résoudre l'équation $f(x) = 0$.*
> *d - Faire un tableau de signe de f(x). En déduire l'ensemble S1 des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ et l'ensemble S2 des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.*

Il s'agit du premier exercice traité par les élèves où le tableau de signes est utilisé pour résoudre une inéquation et les commentaires relevés dans le cahier de bord indiquent que Benjamin l'a choisi pour cette raison. Par ailleurs, nous pointons que cet exercice reprend différents types de tâches algébriques déjà étudiés (développer et factoriser une expression algébrique, résoudre une équation produit) et il pourrait être envisageable d'exploiter un tel exercice afin de mener avec les élèves une réflexion sur le choix de formes appropriées pour résoudre une telle inéquation. Mais cela n'a visiblement pas fait l'objet d'une étude dans la classe de Benjamin.

La séance décrite ci-dessus est suivie d'une séance de modules où deux exercices ont été traités :

> *Ex n°23 p 56 :*
> *Examiner le tableau de signes de l'exemple 1a) page 52[88]. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*
> *a - Si $x < 1$, alors $-x + 7 > 0$*
> *b - Si $x > 1$, alors $-x + 7 > 0$*
> *c - Si $x = 7$, alors $-x + 7 = 0$*
> *d - Si $x > 7$, alors $-x + 7 < 0$*
> *e - Si $x = 1$, alors $-x + 7 = 0$*
> *f- Si $-x + 7 > 0$, alors $x \in]1 ; 7[$*
> *g - Si $-x + 7 > 0$, alors $x \in]-\infty ; 7[$*
> *h - Si $x \in [1 ; 7]$, alors $-x + 7 > 0$*
> *i - Si $x \in]1 ; 7[$, alors $A(x) > 0$*
> *j - Si $x \in]-\infty ; 1] \cup [7 ; +\infty[$ alors $A(x) \leq 0$*

[88] Exemple 1a) page 52 : étude du signe de $A(x) = (x+2)^2 - (2x-5)^2 = (-x+7)(3x-3)$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
signe de $-x+7$		+		+	0	−	
signe de $3x-3$		−	0	+		+	
signe de A(x)		−	0	+	0	−	

Ex n° 29 p 56 :
Résoudre $(x + 2)(x + 1) \geq (x + 2)(2x + 3)$

A travers ces deux exercices, le travail sur la technique se prolonge donc. Nous remarquons que l'exercice 23 présente une nouvelle tâche "lire, interpréter un tableau de signes déjà dressé" ; un tel travail contribue à donner du sens à aux tableaux de signes. Quant à l'exercice 29, il s'agit à nouveau de résoudre une inéquation, mais nous pointons une nouvelle complexification de la tâche (il faut ici commencer par transposer l'un des termes de l'inéquation). Cette complexification contribue à améliorer la technique présentée dans le cours et nous notons le souci de Benjamin d'accompagner ses élèves dans cette amélioration puisqu'il leur propose cet exercice lors d'une séance de module où il peut plus facilement les épauler.

Le travail de la technique sera repris quelques jours plus tard à travers un dernier exercice :

Ex n°72 p 60 :
On pose $A(x) = x^2 - 8x$.
a - Factoriser $A(x)$.
b - Déterminer les réels x pour lesquels $A(x) = 0$.
c - Déterminer les réels x pour lesquels $A(x) \geq 0$.
d - Quel est, suivant x, le signe de $A(x)$?
e - Quel est l'ensemble des réels x tels que $\frac{1}{x^2 - 8x}$ existe ?
f - Même question avec $\sqrt{x^2 - 8x}$.
g - Même question avec $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 8x}}$.

Cet exercice permet de travailler à nouveau les résolutions d'équations produits et d'inéquations non élémentaires. Il s'agit en fait du seul exercice choisi par Benjamin qui présente l'utilité de la question "étudier le signe d'expressions" : la détermination du domaine de définition d'une fonction.

Suite à ce travail de la technique associée au type de tâches $T_{sgn(\pi)}$, Benjamin met en place une nouvelle organisation mathématique associée au type de tâches "étudier le signe d'un quotient", avec le même schéma didactique que pour le type de tâches $T_{sgn(\pi)}$, nous ne l'analyserons donc pas ici.

Troisième étape : l'évaluation

Les types de tâches "étudier le signe d'une expression de la forme ax + b" et "étudier le signe d'un produit ou d'un quotient" ont été évaluées lors du troisième devoir surveillé constitué de trois exercices de géométrie et de deux exercices d'algèbre :

Exercice 1 : Résoudre les inéquations suivantes en donnant les résultats sous forme d'intervalles (on pourra s'aider d'un dessin) :
a - $3x + 2 \leq 0$
b - $2x - 1 > 7x + 11$
Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'un tableau de signes :
a - $(x - 1)(4x + 1) \geq 0$
b - $(2x + 1)(x + 6) > 2x(x + 1)$

c- $\frac{(x-3)(3x+1)}{x+4} \geq 0$

Seul l'exercice 2 permet d'évaluer les types de tâches que nous avons analysés dans cette partie. Les inéquations a et c nécessitent uniquement le remplissage d'un tableau de signes. L'inéquation b est un peu plus difficile puisqu'elle nécessite la transposition d'un des termes et une factorisation, qui n'est cependant pas trop complexe puisqu'il y a un facteur commun évident. Lors du deuxième entretien, Benjamin nous expliquera qu'il a volontairement choisi des inéquations assez simples afin de tester si les élèves savaient effectivement utiliser les tableaux de signes :

AL : Comment as-tu choisi ces exercices ?

B : Pour que ce soit raisonnable et pour que je me rende compte s'ils ont compris ce que c'est qu'un tableau de signes. Parce que si je leur donne des choses plus difficiles à factoriser, il faut déjà franchir l'obstacle de la factorisation et ensuite construire le tableau de signes. S'ils n'arrivent pas à franchir l'obstacle de la factorisation, on ne sait pas s'ils ont compris les tableaux de signes. alors que là c'est tellement simple que celui qui a compris le tableau de signes, il sait faire.

Notons que, plus tard dans l'année, Benjamin a souhaité revenir sur ce type de tâches afin de proposer l'étude du signe d'expressions nécessitant des compétences plus poussées en terme de factorisation.

Enfin, nous pouvons pointer que le fait de donner deux exercices distincts comprenant chacun des inéquations de natures différentes (premier degré, inéquations non élémentaires) ne permet pas d'évaluer si les élèves anticipent sur le choix de la méthode à appliquer pour résoudre une inéquation donnée.

En conclusion, ce chapitre est à la fois consacré à un travail sur des notions que les élèves ont déjà rencontrées au collège et sur des objets nouveaux uniquement centré sur la dimension objet de l'algèbre, la non-articulation avec la dimension outil s'expliquant certainement par la pauvreté du Pythagore sur ce point.

Le travail des objets anciens se fait sur le même schéma que ceux mis en place dans les deux premiers chapitres consacrés à l'algèbre : une reprise, sans justification, des différentes règles déjà étudiées en classe de troisième sans prise d'information a priori sur les connaissances des élèves, puis un travail de la technique cohérent et structuré. Cette caractéristique du travail des techniques se retrouve également pour l'étude de types de tâches nouveaux.

L'introduction des objets nouveaux fait, quant à elle, apparaître un schéma didactique qui diffère du précédent car Benjamin y organise d'abord une phase préliminaire pour amener les élèves à construire du sens à ces nouvelles notions et à prouver de nouveaux résultats. Nous avions déjà pointé un schéma relativement semblable lors de l'introduction de la valeur absolue dans le premier chapitre.

L'analyse de cette première phase fait apparaître que Benjamin n'a pas cherché, dans ce chapitre, à motiver l'étude des nouvelles règles relatives aux inégalités ou celle d'inéquations non élémentaires. Pourtant certains exercices du manuel pouvaient être exploités pour justifier l'étude de la comparaison des carrés, des racines carrées ou des inverses de nombres strictement positifs. En revanche, nous pouvons noter une pauvreté du

Pythagore en ce qui concerne la motivation de l'étude d'inéquations non élémentaires. En fait, une recherche, non encore publiée, menée conjointement par l'IREM de Paris 7 et l'IREM de Poitiers sur la technique des tableaux de signes et, plus généralement, sur l'étude du signe d'une expression polynomiale met bien en évidence la difficulté de motiver ces questions. En effet, un travail de type épistémologique fait apparaître qu'historiquement l'étude du signe d'une telle expression a été motivée par la localisation des racines de polynômes. Puis, avec les travaux de Cauchy et ses cours à l'Ecole Polytechnique, cette étude des signes est entrée dans un cadre fonctionnel en servant à l'étude du signe de la dérivée pour déterminer les variations d'une fonction. L'écologie de cet objet dans l'enseignement actuel apparaît, ainsi, tout à fait artificiel et ce d'autant plus que, lorsque la notion de dérivée sera introduite en classe de première, la limitation de complexité des fonctions étudiées ne rendra généralement pas les tableaux de signes nécessaires (le plus souvent, les élèves auront à déterminer le signe d'un polynôme du second degré, or ils auront à leur disposition un théorème qui leur fournira directement le résultat cherché). La motivation, en classe de seconde, de l'étude d'inéquations non élémentaires semble donc particulièrement difficile.

L'étude de la première phase du schéma didactique mis en place sur ce chapitre pour l'étude des questions nouvelles fait, de nouveau, apparaître que Benjamin est soucieux de laisser une place à ses élèves, en les faisant notamment participer. Mais la gestion choisie laisse encore peu de responsabilités aux élèves.

Consacrons, enfin, la partie suivante à l'étude du dernier chapitre consacré à l'algèbre.

III.4 - Analyse du chapitre "Fonctions"

Pour terminer l'étude des stratégies d'enseignement de Benjamin, nous centrons ici notre analyse sur le chapitre consacré aux fonctions. Comme c'est le cas dans le Pythagore, Benjamin consacre un seul chapitre à l'étude des fonctions. Le travail sur cette notion se déroulera sur douze séances (trois séances sont réservées aux modules et une à un contrôle) pendant la période du 29/02 au 8/04/2000. Nous reprenons ci-dessous le plan de ce chapitre :

I – Définitions
II – Représentation graphique d'une fonction
III – Propriétés d'une fonction
- 1) Maximum, minimum
- 2) Sens de variation
- 3) Parité d'une fonction
- 4) Périodicité

IV – Etudes de fonctions usuelles
- 1) Les fonctions affines
- 2) La fonction carré
- 3) La fonction racine
- 4) La fonction inverse

Notre travail sur ce chapitre va nous conduire à analyser comment Benjamin organise l'utilisation de l'algèbre lors de l'étude des fonctions. Nous préciserons, dans un premier paragraphe, le questionnement spécifique que nous nous proposons de développer pour ce faire. Puis, comme pour les trois chapitres analysés précédemment, nous analyserons le champ des possibles dans le manuel de la classe avant de considérer certaines stratégies d'enseignement de Benjamin.

Avant de débuter ces analyses, nous voulons préciser que la séance filmée dans la classe de Benjamin est relative à l'étude de la fonction carré qui a fait l'objet du paragraphe IV.2 du cours dont le plan est présenté ci-dessus. Pour l'étude des stratégies d'enseignement mises en place sur ce chapitre, nous faisons donc le choix de limiter notre étude à celles relatives au travail sur les généralités sur les fonctions abordées dans les trois premiers paragraphes du cours. L'analyse de la séance filmée, dans le chapitre 7, permettra d'étudier la vision de Benjamin relativement à l'étude des fonctions usuelles.

III.4.1 - Notre questionnement :

L'étude des fonctions est l'occasion de rencontrer une nouvelle facette de l'algèbre élémentaire : un outil au service des fonctions. L'étude de certaines questions est, en effet, l'occasion de réinvestir des types de tâches ou de questions algébriques déjà rencontrés essentiellement en tant qu'objets et qui vont devenir ici des outils. De tels réinvestissements vont intervenir dans différents types de tâches mathématiques :

- le calcul de l'image d'un nombre par une fonction conduit à réinvestir les connaissances relatives à la substitution numérique dans des expressions algébriques,

- le calcul d'antécédents et la résolution d'équations du type $f(x) = \lambda$ ou $f(x) = g(x)$ permettent le réinvestissement de connaissances relatives à la résolution d'équations,

- l'étude des propriétés de fonctions figurant au programme de la classe de seconde (étude des variations, de la parité, de la périodicité) est l'occasion de mettre en œuvre différentes manipulations d'écritures algébriques (la factorisation d'expressions pour déterminer le signe de $f(b) - f(a)$ dans l'étude des variations d'une fonction f, le calcul de $f(-x)$ ou $f(x + T)$ pour étudier la parité ou la périodicité d'une fonction),

- l'étude des variations d'une fonction peut également conduire à réinvestir les connaissances relatives aux inégalités,

- certains problèmes liés à l'étude des fonctions peuvent conduire à une réflexion sur les écritures algébriques adéquates pour traiter certains types de tâches : pour déterminer les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x - 3$, il est ainsi possible d'écrire f sous la forme $x \longmapsto (x - 1)^2 - 4$, afin de pouvoir utiliser les connaissances sur les variations de la fonction $x \longmapsto x^2$ et sur les inégalités,

- l'étude de certaines questions, par exemple l'étude de la parité et de la périodicité, va également permettre de poursuivre le travail autour de l'algèbre comme outil de preuve.

Par ailleurs, l'étude des fonctions conduit à l'articulation de différents registres sémiotiques. L'articulation entre le registre des écritures algébriques et le registre des représentations graphiques prend, en particulier ici, une importance nouvelle lors de l'illustration graphique ou de l'étude de certaines propriétés de fonctions.

Le programme précise également que les fonctions doivent être présentées comme des outils d'étude de situations diverses et la modélisation de telles situations va conduire elle aussi à l'articulation entre registres sémiotiques, tout en ne s'y réduisant pas.

Néanmoins, dans les programmes de seconde, la place laissée au travail algébrique lors de l'étude de fonctions reste relativement restreinte (les exemples d'études de comportement de fonctions doivent rester simples, dès que l'on sort de l'ensemble des fonctions de référence) et l'autonomie des élèves est limitée (toutes les indications utiles doivent être fournies).

Relativement à ces différents types de tâches, notre analyse porte sur le réinvestissement des connaissances algébriques :

- quelle place est laissée à ce réinvestissement ?
- quels sont les types de connaissances réinvesties ?
- quel est le degré d'autonomie laissé aux élèves ?
- comment le travail sur la modélisation de situations est-il mené ?
- l'articulation entre registres est-elle exploitée ?

Dans le paragraphe suivant, nous analysons le champ des possibles dans le Pythagore.

III.4.2 - Analyse du champ des possibles dans les manuels :

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier d'un point de vue algébrique les choix des auteurs du manuel utilisé dans la classe relativement au chapitre sur les fonctions. Cette analyse nous permettra ensuite de situer les choix de Benjamin par rapport à ceux effectués dans le manuel de la classe.

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, il existe un certain nombre de tâches mathématiques spécifiques à l'étude des fonctions qui peuvent mettre en jeu différentes connaissances algébriques. Dans cette étude, afin d'éviter l'éparpillement du travail, nous avons choisi de regrouper ces types de tâches en trois catégories :

- la détermination d'images et d'antécédents, la résolution d'équations du type $f(x) = \lambda$ ou $f(x) = g(x)$[89] : les connaissances mises en jeu dans ces types de tâches sont différentes, mais certains liens apparaissent. Les notions d'images et d'antécédents sont ainsi liées par définition, il paraît donc intéressant de comparer la place du travail algébrique pour les tâches liées au calcul d'images et d'antécédents. Par ailleurs, la détermination d'antécédents met en jeu la résolution d'équations du type $f(x) = \lambda$ et nous ne pouvons donc dissocier les analyses des deux types de tâches,

- l'étude des propriétés des fonctions,

- l'utilisation de l'algèbre pour modéliser des situations et pour étudier les fonctions obtenues.

Pour chacun de ces trois types de tâches, notre analyse a porté sur la place laissée au travail algébrique, sur les connaissances algébriques réinvesties et sur l'articulation entre registres.

III.4.2.1 - Détermination d'images et d'antécédents, résolution d'équations :

Nous présentons, ci-dessous, l'étude menée pour la notion d'image, puis nous donnerons les conclusions des études similaires menées autour des types de tâches "déterminer un ou des antécédents, "résoudre une équation du type $f(x) = \lambda$ ou $f(x) = g(x)$[90]"

[89] Ou d'inéquations du type $f(x) \geq \lambda$, $f(x) \geq g(x)$...

[90] Ou d'inéquations du type $f(x) \geq \lambda$, $f(x) \geq g(x)$...

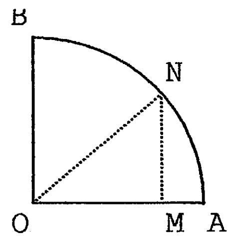
L'introduction de la notion d'image s'effectue lors de la première activité préparatoire du chapitre, dans laquelle les auteurs fournissent la représentation graphique d'une fonction décrivant une situation de la vie courante (hauteur de la mer dans un port en fonction du temps). A l'aide de ce graphique les élèves doivent déterminer l'image de trois nombres, via les questions suivantes :

Quelle est la hauteur de la mer à 2 h ? Quelle est l'image de 6 par f ? Indiquer la valeur de f(8).

Ces questions sont visiblement posées de manière à amener les élèves à donner progressivement du sens au type de tâches mathématiques en jeu, au vocabulaire et à la notation fonctionnelle. Notons toutefois que cette progression nous apparaît plutôt brutale quand on connaît les difficultés des élèves à s'approprier cette nouvelle notation.

A travers les activités suivantes, la détermination d'images apparaît sous différentes formes : détermination graphique, calcul à l'aide d'une calculatrice[91], calcul à l'aide de l'expression algébrique d'une fonction[92], détermination à partir de mesures faites sur une figure géométrique comme dans l'exemple ci-dessous.

Activité 4 p 84 :



OA = 8cm
M ∈ [OA]
On pose x = OM
La perpendiculaire à (OA) en M coupe l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ en N.
On note A(x) l'aire du triangle OMN

A - Tableau de valeurs

1 – Construire ce dessin avec OA = 8 cm.

2 – Quelles valeurs peut prendre le nombre x ?

3 – Compléter ce tableau de valeurs.

On mesure MN puis on calcule A(x)

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
MN									
A(x)									

[...]

Dans le cours, les auteurs définissent la notion d'image et institutionnalisent deux techniques (algébrique et graphique) permettant la détermination de l'image d'un nombre. La technique algébrique est exposée à travers un exemple de calculs d'images pour la fonction $f : x \longmapsto 2x^2 - 1$. Quant à la technique graphique, elle est mise en mots dans le cas général et est reprise pour cette fonction f.

Cinq exercices de la partie "Savoir-faire" ont pour objectif d'amener les élèves à calculer l'image d'un nombre à partir de l'écriture algébrique d'une fonction (quatorze

[91] Dans l'activité 2 p 83, les élèves sont amenés à déterminer avec une calculatrice l'image de nombres par la fonction $x \longmapsto \ln(x + 1)\times 4$

[92] Les natures de ces fonctions sont diverses : fonction polynomiale du second degré, différentes fonctions usuelles ($x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$).

spécimens). L'analyse de ces spécimens fait apparaître la volonté des auteurs de varier la nature des fonctions (fonctions affines, fonction associée à la fonction carré, fonction rationnelle, fonction définie par morceaux) et de varier la nature des nombres en jeu (calcul de l'image de nombres entiers, rationnels et irrationnels). Par ailleurs, ce type de tâches est mis en jeu à travers d'autres exercices, principalement ceux où les élèves sont amenés à tracer la représentation graphique d'une fonction définie par une expression algébrique (trente trois spécimens). L'analyse des ces différents spécimens confirme le souci des auteurs de varier la nature des fonctions considérées.

Un autre type d'exercices, mettant en jeu la détermination d'images à partir de l'expression algébrique d'une fonction, est présent dans le manuel à travers deux exercices dans lesquels les élèves doivent déterminer si des points donnés appartiennent à la courbe représentative d'une fonction définie par une expression algébrique. Nous reproduisons ci-dessous un tel exercice :

> *Ex n°11 p 98 :*
> *On considère la fonction définie sur* $]-1\,;+\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}$.
> *Les points suivants sont-ils sur la courbe représentative de f :* $O(0\,;0)$, $A(0\,;1)$; $B(-1\,;2)$, $C(3\,;5)$?

La détermination graphique d'images n'apparaît pas explicitement dans les exercices présentés à l'intérieur de ce manuel. En revanche, ce type de tâches est mis en jeu dans divers exercices : des exercices où les élèves doivent donner le tableau de variations d'une fonction, dont on connaît la représentation graphique, ou des exercices où ils doivent donner une expression algébrique de fonctions affines par morceaux, dont on connaît la représentation graphique.

Dans ce manuel, la détermination d'images est donc abordée sous différents points de vue, les points de vue graphique et algébrique étant toutefois privilégiés. Les exercices choisis par les auteurs du manuel offrent une place au réinvestissement de la substitution numérique dans des expressions algébriques de natures diverses comportant également des nombres de natures diverses.

Comme pour la notion d'image, la détermination graphique d'antécédents est abordée dans la première activité préparatoire, puis intervient comme type de sous-tâches dans des exercices conduisant à la résolution graphique d'équations ou d'inéquations faisant intervenir des fonctions. La détermination algébrique d'antécédents est, quant à elle, mise en jeu dans dix exercices pour lesquels les auteurs ont eu encore une fois le souci de varier la nature des fonctions et des nombres en jeu.

Enfin, les activités et les exercices présentés dans le Pythagore offrent la possibilité d'envisager un travail graphique et algébrique autour de la résolution des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions. Nous y trouvons le souci des auteurs de proposer des exercices permettant, en particulier, d'articuler les deux registres sémiotiques[93] et leur volonté de varier la nature des fonctions considérées, ce qui permet un travail de la technique qui peut se complexifier progressivement.

---

[93] Il s'agit, par exemple, d'exercices dans lesquels les élèves doivent rechercher les points fixes de fonctions de natures diverses d'une part dans le registre des représentations, d'autre part dans celui des écritures algébriques.

Passons maintenant à l'étude du champ des possibles dans le Pythagore relativement à l'étude de propriétés de fonctions.

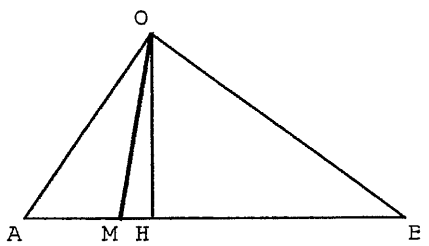
III.4.2.2 - Etude des propriétés :

Dans cette partie, nous nous sommes centrée sur l'analyse des possibles proposés par les auteurs du Pythagore pour l'étude de trois propriétés : l'étude des variations d'une fonction, de sa parité et de sa périodicité éventuelle. Pour chacune de ces propriétés, notre analyse a porté sur la place laissée au travail algébrique, sur les connaissances algébriques réinvesties et sur l'articulation entre registres. Nous présentons, ci-dessous, l'analyse menée pour l'étude des variations, puis nous donnerons les conclusions des analyses similaires conduites autour de la parité et de la périodicité.

Quatre activités[94] abordent l'étude des variations d'une fonction. La première a pour objectif d'introduire la définition de "fonction croissante" et "fonction décroissante" : à partir de l'observation de la représentation graphique d'une fonction croissante modélisant une situation concrète, les élèves sont amenés à comparer f(a) et f(b) lorsque $a < b$ et à compléter la définition d'une fonction croissante (la démarche est la même pour la définition d'une fonction décroissante).

Dans la deuxième activité, les auteurs présentent une situation géométrique avec différentes fonctions modélisant des longueurs ou une aire :

<u>*Activité n°6 p 85 :*</u>



(OH) ⊥ (AB)
OH = 3, AB = 6, HB = 4
M ∈ [AB], on pose x = AM

On considère les trois fonctions f, g et définies sur [0 , 6] :
f(x) est l'aire du triangle OAM
g(x) = OM
h(x) est l'aire du triangle OMH

[...]

Dans cette activité, les élèves doivent étudier les variations des trois fonctions par simple observation de la figure, puis ils doivent démontrer le résultat obtenu pour la fonction f (une fonction linéaire). Par ailleurs, les auteurs profitent de cette activité pour introduire la notion de tableau de variation.

Enfin, les deux autres activités abordent l'étude de fonctions usuelles ($x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$). L'étude des variations de ces fonctions se fait d'abord en utilisant leur représentation graphique, que les élèves ont au préalable tracée "point par point", puis les élèves doivent démontrer les résultats obtenus. Aucune indication n'est donnée quant à la technique à utiliser.

---

[94] Activités n° 5, 6, 10 et 11 pp.84-88.

Dans la partie "outil" du cours, les auteurs institutionnalisent la définition d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante et illustrent ces définitions par des exemples graphiques. Ils présentent également un tableau de variation dressé à partir d'un exemple de représentation graphique d'une fonction. Dans cette partie, aucun exemple d'étude de variations utilisant le calcul algébrique n'est présenté et aucune technique n'est institutionnalisée.

Dans la partie "exemples", les auteurs présentent trois études de fonctions (fonction affine définie par morceaux, fonctions associées aux fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$). Pour ces trois fonctions, les auteurs présentent une étude algébrique des variations. Pour la première, ils s'appuient sur les propriétés des fonctions affines institutionnalisées dans le cours. En revanche, pour les deux suivantes, les auteurs institutionnalisent une technique. Il s'agit de la technique qui consiste à manipuler des inégalités afin d'obtenir une comparaison de f(a) et f(b) lorsque $a \leq b$.

Dix-huit exercices de la partie "savoir-faire" sont consacrés à l'étude de la notion de variation d'une fonction. Trois de ces exercices sont du type vrai/faux pour tester les connaissances des élèves quant aux variations des fonctions usuelles.

Nous regroupons les quinze autres exercices selon trois catégories :

- des exercices relatifs à l'étude graphique de fonctions (neuf exercices). Dans cette catégorie différents types de tâches mathématiques apparaissent : déterminer les variations de fonctions à partir de leur représentation graphique (donnée a priori ou à construire à partir d'une expression algébrique), dessiner la courbe d'une fonction dont le tableau de variation est donné, associer des représentations graphiques aux tableaux de variation correspondants ;

- des exercices où l'étude des variations se fait par observation de figures géométriques (deux exercices) : il s'agit d'exercices semblables à l'activité n°6 page 85 décrite ci-dessus. Pour ces deux exercices, il s'agit d'étudier les variations de fonctions modélisant des situations géométriques (ces fonctions désignent des aires, des périmètres, des longueurs) sans effectuer de calculs ;

- des exercices relatifs à l'étude des variations de fonctions à partir de leurs expressions algébriques (quatre exercices) : pour deux de ces exercices, les élèves doivent déterminer l'expression algébrique de fonctions modélisant des situations géométriques et en donner les variations, mais ces deux fonctions sont constantes donc l'étude des variations ne met pas en jeu la technique institutionnalisée dans le cours. Les deux autres exercices abordent l'étude des variations des fonctions $x \longmapsto x^4$ et $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$, il s'agit donc ici de mettre en jeu cette technique sur deux exemples assez simples.

Dans la partie "chercher", nous retrouvons deux des trois catégories décrites ci-dessus :

- des exercices relatifs à l'étude graphique des variations (trois exercices), où les élèves doivent commencer par tracer point par point la représentation graphique d'une fonction définie par une expression algébrique et doivent ensuite dresser un tableau de variation ;

- des exercices relatifs à l'étude algébrique des variations (trois exercices) : dans deux de ces exercices, il s'agit d'étudier les variations de $x \longmapsto \sqrt{|x|}$ et d'une fonction affine définie par morceaux. Il s'agit donc ici de réinvestir les connaissances sur les fonctions usuelles et la technique institutionnalisée dans le cours n'est pas nécessaire. Seule l'étude d'une fonction plus complexe (A : $x \longmapsto x(12 - x)$) conduit à l'utilisation de cette technique après transformation de l'écriture algébrique de cette fonction (les élèves doivent d'abord montrer que, pour tout élément x de [0 ; 12], $A(x) = -(x - 6)^2 + 36$).

En conclusion, l'analyse des choix des auteurs du manuel pour l'étude des variations d'une fonction fait apparaître plusieurs points :

- les notions de croissance et décroissance vont prendre du sens à travers différentes situations contextualisées,

- le registre des représentations graphiques est privilégié pour introduire, définir ces notions et pour amener les élèves à conjecturer les variations des fonctions usuelles,

- les activités et les exercices choisis offrent une place à un travail algébrique, mais la comparaison du nombre d'exercices mettant en jeu une étude algébrique et du nombre de ceux mettant en jeu une étude graphique montre que cette place est relativement restreinte.

L'analyse relative à l'étude de la parité d'une fonction montre que, comme pour l'étude des variations, le registre des représentations graphiques est privilégié pour l'introduction de cette notion nouvelle. L'étude des différents exercices proposés montre la volonté des auteurs du Pythagore de proposer diverses études de parité, à la fois dans le registre des représentations graphiques et celui des écritures algébriques.

Le travail sur la périodicité est quant à lui plus réduit dans ce manuel : les auteurs ont le souci de proposer une activité préparatoire pour introduire cette notion à travers une situation contextualisée, d'origine géométrique. Puis, trois exercices sont présentés dans lesquels les élèves doivent calculer l'image d'un nombre par une fonction périodique et compléter la représentation graphique d'une telle fonction.

III.4.2.3 - La modélisation de situations à l'aide de fonctions :

L'étude des activités préparatoires proposées dans le manuel met en évidence que les auteurs du Pythagore ont clairement la volonté d'introduire la notion de fonction et différentes notions associées à travers des situations modélisées à l'aide d'une fonction issues de différents domaines (la géométrie avec l'étude de fonctions modélisant des aires, la vie courante, la physique ou la chimie).

La partie "Exercices" est, quant à elle, davantage centrée sur la dimension objet des fonctions puisque nous relevons uniquement seize exercices mettant en jeu les fonctions comme outil de modélisation de situations sur les cent dix exercices proposés. Les situations considérées sont issues de deux domaines : la géométrie (onze exercices) et la vie courante (cinq exercices). Comme pour les problèmes proposés pour travailler la mise en équation dans le deuxième chapitre de ce manuel, nous relevons donc une prédominance de la géométrie.

Ces exercices permettent d'aborder des fonctions de natures diverses (fonctions affines, rationnelles ou polynomiales) et de travailler différents types de tâches spécifiques aux fonctions (étude des variations, de la périodicité, calcul d'images, d'antécédents).

En conclusion, le travail proposé dans ce manuel sur des situations modélisées par des fonctions est réduit, mais permet d'envisager l'introduction des principales notions que les élèves doivent travailler en classe de seconde et le travail relatif à un certain nombre de types de tâches spécifiques aux fonctions.

III.4.3 - Analyse des stratégies d'enseignement :

III.4.3.1 - Identification des types de tâches rencontrés par les élèves :

Au cours de ce chapitre, les élèves traitent vingt-trois exercices du livre et deux activités. Notons que le travail proposé par Benjamin est essentiellement centré autour de la dimension objet des fonctions, puisque seuls une activité et deux exercices abordent la dimension outil.

A travers ces exercices, un nombre important de types de tâches mathématiques distincts sont abordés. Pour éviter l'éparpillement, nous avons fait le choix les de regrouper en catégories :

- les types de tâches relatifs à un travail autour de la notion de représentation graphique de fonctions reconnaître la représentation graphique d'une fonction (un exercice, quatre spécimens), tracer la représentation graphique d'une fonction à partir d'une expression algébrique (trois exercices, quatre spécimens), déterminer si des points appartiennent à la représentation graphique d'une fonction dont une expression algébrique est donnée (un exercice, quatre spécimens) ;

- les types de tâches mathématiques relatifs à un travail autour des notions d'images et antécédents : calculer l'image d'un nombre (un exercice, trois spécimens), calculer les antécédents éventuels d'un nombre à partir de l'écriture algébrique d'une fonction (deux exercices, cinq spécimens) ;

- les types de tâches mathématiques relatifs à un travail autour de la résolution d'équations de la forme $f(x) = \lambda$ ou $f(x) = g(x)$, ou d'inéquations de la forme $f(x) \geq g(x)$: résoudre graphiquement de telles équations ou inéquations (trois exercices, dix spécimens);

- les types de tâches mathématiques relatifs à un travail autour de la notion de variation d'une fonction : tracer la courbe représentative d'une fonction dont on connaît le tableau de variation (un exercice, deux spécimens), dresser le tableau de variation d'une fonction dont on connaît la représentation graphique (deux exercices, trois spécimens) ;

- les types de tâches mathématiques relatifs à un travail autour de la parité d'une fonction : compléter la courbe représentative d'une fonction impaire (un exercice, un spécimen), compléter le tableau de variations d'une fonction paire ou impaire (deux exercices, deux spécimens), étudier la parité de fonctions définies par une expression algébrique (deux exercices, trois spécimens), déterminer l'expression d'une fonction à la fois paire et impaire (un exercice, un spécimen),

- les types de tâches mathématiques relatifs à un travail autour de la notion de périodicité d'une fonction.

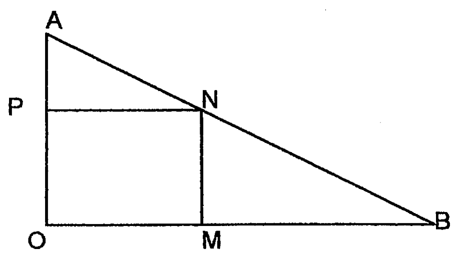
L'analyse des types de tâches mathématiques rencontrés lors du travail centré sur la notion de représentation graphique d'une fonction montre que la seule connaissance algébrique mise en jeu est la substitution numérique dans des expressions algébriques. En outre, le travail sur la notion de variation ne nécessite ici aucune connaissance algébrique.

Nous choisissons donc de faire porter notre analyse d'une part sur le travail autour des notions d'image et d'antécédent et autour de la résolution d'équations ou d'inéquations, d'autre part sur l'étude de la parité d'une fonction. Avant d'entamer ces études, nous voulons pointer que nous retrouvons, pour ce chapitre, la volonté, comme dans le chapitre "Inégalités, inéquations", d'organiser un moment pour amener les élèves à construire du sens autour de la nouvelle notion de fonction. Nous commencerons donc l'étude des stratégies d'enseignement par l'analyse de ce moment.

III.4.3.2 - L'introduction de la notion de fonction :

Pour préparer le cours sur les fonctions, Benjamin choisit de faire travailler ses élèves sur une activité préparatoire du livre :

Activité 3 p 83 :



$\begin{cases} OA = 3cm \\ OB = 4cm \\ M \in [OB] \\ \text{On pose } x = OM \end{cases}$

La perpendiculaire à (OB) passant par M coupe (AB) en N.
P est la projection orthogonale de N sur (OA)

A – L'aire du rectangle OMNP

1 – Quelles valeurs peut prendre le nombre x ?

2 – Calculer MN en fonction de x.

3 – Calculer l'aire A(x) du rectangle OMNP.

B – La représentation graphique de A

1 – Etablir un tableau de valeurs pour la fonction A.

2 – Dans un plan muni d'un repère orthonormé (unités : 3 cm en abscisse et en ordonnée), tracer à main levée la courbe représentant la fonction A (cette courbe est régulière).

3 – L'aire du rectangle OMNP est maximum pour une certaine valeur de x. Préciser cette valeur ainsi que l'aire correspondante.

Comme nous l'avons vu lors de l'analyse du champ des possibles dans le Pythagore, Benjamin avait le choix entre quatre activités conduisant à l'introduction de la notion de fonction et permettant des modes de définition différents. Benjamin a choisi ici une des deux activités qui conduisent à la modélisation d'une situation géométrique à l'aide d'une fonction. Lors du troisième entretien, Benjamin nous expliquera les raisons de son choix : dans un premier temps cette activité lui semble classique (" Au départ j'ai fait un truc assez classique : un rectangle qui est dans le triangle et qui varie. "). De plus elle lui permet d'introduire la notion de variable (" Donc j'ai voulu commencer par ça pour qu'on sente quelque chose qui bouge en fonction de x."). Benjamin considère donc qu'une telle situation géométrique constitue un bon support pour répondre au but qu'il exprime dans la citation précédente, un des objectifs visés par cette activité étant, en effet, d'amener ses élèves à visualiser les variations de l'aire du rectangle en fonction de x, à l'aide de différents dessins :

B : Et là j'ai regretté après coup de n'avoir pas prévu un rétroprojecteur[95] par exemple, parce qu'au tableau j'ai recopié le dessin et puis après pour leur montrer que quand x bouge, le rectangle s'allonge dans un sens ou dans l'autre, il fallait refaire un dessin. Et une fois que tu as fait trois rectangles, on ne voit plus rien. Et ils ont eu énormément de mal à comprendre ce qui se passait. Moi je vois bien la variation du rectangle mais je ne suis pas sûr qu'eux l'avaient vu. C'est dommage parce que c'était la clef de l'activité.

Lors du travail sur cette activité, Benjamin est donc confronté à des difficultés matérielles et il pense alors ne pas avoir entièrement atteint l'objectif visé. Par ailleurs les difficultés des élèves à visualiser les variations de l'aire du rectangle le confortent dans l'interprétation qu'il propose des difficultés à utiliser les lettres (cf. page 85) : les élèves ont du mal à percevoir les changements de statut des lettres (" Pour eux, x c'est celui qui est écrit là et s'il y en a un autre tant mieux mais... x c'est un peu la lettre magique, cela désigne un truc mais là...").

Benjamin profite également de cette activité pour introduire du vocabulaire (" L'aire varie en fonction de x. ") et la notation fonctionnelle, pour définir la notion de "tableau de valeurs" ("Après, sur le tableau de valeurs, il y en a plein qui ne savaient pas ce que c'était. Bon je pense qu'ils en avaient déjà fait, peut-être pas sous ce nom-là, cela a permis de mettre les choses au point."), afin d'expliquer la construction de la représentation graphique d'une fonction. Lors de cette construction, des élèves veulent joindre les différents points obtenus par des segments et Benjamin est alors confronté à une difficulté didactique (comment justifier que cette procédure n'est pas correcte ?), qu'il nous raconte dans ces termes :

B : [...] Non c'est pas une droite et il faut me croire sur parole. Ça c'est pas évident. Tu vois : cette courbe est régulière. Qu'est-ce que ça veut dire ? C'est sûr qu'on va pas lui dire que la dérivée est continue, je suis d'accord mais... Moi ça me pose un vrai problème. Je suis obligé de leur dire : croyez-moi, cela fait une belle cloche comme ça. [...] Cela reprend ce que j'ai dit dans mon mémoire, on leur dit parfois : croyez-moi. Alors qu'en maths on est obligé de tout justifier. Et, nous, on leur balance des trucs comme ça. Il y a des moments ils doivent se dire : qu'est-ce qu'il nous raconte ? C'est le décalage qui me... Mais d'un autre côté quand je pense à ce que je ressentais en tant qu'élève, cela ne me gênait pas. Mais en réfléchissant, c'est sûr qu'un jour il y en a un qui va me le dire, c'est pas possible.

Les justifications perçues par Benjamin sont hors de portée des élèves de seconde et il ne voit pas d'autres arguments que ceux d'autorité ("croyez-moi") qui ne le satisfont pas. Il existe pourtant d'autres moyens pour prendre en charge la difficulté rencontrée par ses élèves : on peut, par exemple, leur faire placer d'autres points entre les deux points qu'ils veulent joindre par un segment et leur faire constater que ces nouveaux points n'appartiennent pas au segment.

Suite au travail sur cette activité, Benjamin commence le premier paragraphe du cours sur les fonctions. Cette partie est consacrée à la définition de différentes notions, dont certaines ont été rencontrées dans l'activité introductrice, et à l'institutionnalisation de la notation fonctionnelle :

[95] Notons que Benjamin n'envisage pas ici la possibilité d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique. Or il utilise, à titre personnel, les nouvelles technologies : emploi d'un traitement de texte pour produire différentes fiches distribuées aux élèves, utilisation d'internet. Ceci confirme une hypothèse faite précédemment : l'introduction des NTIC en classe n'est pas évidente pour des professeurs débutants.

I – Définitions :

Définition : Soit I un intervalle, une fonction définie sur I associe à tout élément x de I un unique réel, noté f(x).

Notations : $f : I \longrightarrow IR$
$x \longmapsto f(x)$

Exemples :

Activité 3 p 83 : $A : [0 ; 4] \longrightarrow IR$
$x \longmapsto A(x) = \frac{3}{4} x (4 - x)$

Fonctions affines : $f : IR \longrightarrow IR$
$x \longmapsto ax + b$

Vocabulaire :

f(x) est appelé image de x par f.

Si a = f(x), alors on dit que x est un antécédent de a par f.

Exemple :

Image de 1,5 par A : A(1,5) = 2,8125

Les antécédents de 2,8125 par A : 1,5 et 2,5.

Un élément x de I n'a qu'une seule image par f. Par contre, un nombre réel peut avoir plusieurs antécédents.

La comparaison de ce paragraphe avec la partie "cours" du Pythagore montre que Benjamin a repris certains choix des auteurs du manuel : la définition de la notion de fonction, des notions d'image et d'antécédent, l'introduction de la notation fonctionnelle, la présentation d'exemples. Mais Benjamin prend un certain recul par rapport au manuel notamment en ce qui concerne le choix des exemples. Ainsi, pour illustrer la notion de fonction, il s'appuie à la fois sur les connaissances anciennes des élèves (fonctions affines) et sur l'exemple de fonction mis en évidence dans l'activité traitée auparavant. De même, pour les notions d'image et d'antécédent, il fait référence au travail mené dans l'activité. Lors du troisième entretien, Benjamin nous décrit le déroulement dans la classe de ce cours et nous expose qu'il a choisi une telle activité, en particulier, pour amener ses élèves à donner du sens à la notation fonctionnelle :

> B : Je commence par la notation comme ça parce qu'il faut bien le dire à un moment ou un autre. Et là ils m'ont regardé avec des yeux énormes. Et le but, en faisant cette activité, c'était de pouvoir s'y raccrocher dans le cours et là ça va mieux. Quand tu dis : regardez, on va prendre l'exemple qu'on a vu dans l'activité, ça va mieux.

Suite à ce cours, Benjamin proposera deux exercices à préparer à la maison. Dans le premier les élèves doivent modéliser une situation issue de la vie courante, le second est consacré à la détermination d'images et d'antécédents pour une fonction définie de manière algébrique :

Ex n°6 p 98 :

Le taux de TVA est 18,6 %.

Déterminer la fonction qui, à un prix hors taxe x, associe le prix toutes taxes comprises f(x). Que dire de cette fonction ?

Ex n°16 p 99 :
Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{1}{5}$
a – Calculer l'image de 0, de 3/2 et de $-\frac{5}{2}$.

Nous retrouvons ici un schéma didactique plusieurs fois repéré chez Benjamin : donner des exercices d'application aussitôt après le cours. Nous retrouvons également le souci d'articuler[96] immédiatement les dimensions outil et objet des fonctions, ce que nous avions déjà repéré lors du chapitre consacré aux équations.

En conclusion, nous retrouvons bien ici la volonté de Benjamin d'amener ses élèves à donner du sens aux objets nouveaux, pointée lors de l'étude du premier chapitre avec l'introduction de la valeur absolue et dans le chapitre "Inéquations, inégalités" avec le travail sur les nouvelles inégalités.

III.4.3.3 - Le travail autour des notions d'images et d'antécédents et la résolution d'équations ou d'inéquations :

Dans cette partie, nous étudions le travail relatif à différents types de tâches mathématiques axés sur les notions d'images et d'antécédents et sur la résolution d'équations ou inéquations mettant en jeu des fonctions. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les définitions des notions d'images et d'antécédents ont été institutionnalisées dans le premier paragraphe du cours. Mais le travail autour de ces notions a débuté dans l'activité introductrice où les élèves devaient établir le tableau de valeurs d'une fonction définie de manière algébrique et où ils devaient déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction étudiée admettait un maximum. Mais visiblement aucun vocabulaire n'a alors été introduit. En revanche, la technique de calcul d'images à partir de l'expression algébrique d'une fonction a été rencontrée lors de cette activité. Quant au calcul d'antécédents, la recherche se faisait dans le registre graphique. Dans le cours, Benjamin propose une définition de ces notions et des exemples tirés de l'activité. Mais aucune technique de calcul à partir d'une expression algébrique n'est alors institutionnalisée.

Suite à ce cours, Benjamin propose un exercice d'application à préparer à la maison :

---

[96] En fait, cette articulation sera limitée puisque, dans la suite de ce chapitre, il ne proposera plus qu'un seul exercice mettant en jeu la dimension outil des fonctions :

Ex 108 p 107 : A l'usine
Une usine fabriquant des magnétophones de poche a des frais s'élevant annuellement à 3 000 000 F. Chaque magnétophone fabriqué revient à 150 F.
a – Déterminer f(x), coût de fabrication de x magnétophones dans une année. Que dire de cette fonction ?
b – A quel prix minimum m(x) doit-on vendre un magnétophone pour ne pas avoir de perte ? (On suppose que tout objet est vendu).
c – Compte tenu de la concurrence, on décide de vendre chaque magnétophone 300 F. Combien doit-on en vendre dans l'année pour être bénéficiaire ?
d – Quel bénéfice obtient-on en vendant 30000 magnétophones à 300 F ?

Ex n°16 p 99 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{1}{5}$

a – Calculer l'image de 0, de 3/2 et de $-\frac{5}{2}$.

b – Calculer les antécédents éventuels de $\frac{5}{3}$.

Benjamin choisit ici un exercice qui met en jeu deux types de tâches mathématiques : calculer l'image d'un nombre ($T_{imag\text{-}alg}$) et déterminer les antécédents éventuels d'un nombre ($T_{ant\text{-}alg}$) à partir de l'expression algébrique d'une fonction. Dans le manuel, il s'agit d'un des exercices les plus simples mettant en jeu ce type de tâches : les connaissances algébriques nécessaires ne vont pas poser a priori de problèmes aux élèves (substitution numérique de nombres entiers et rationnels dans une expression linéaire du premier degré, résolution d'une équation du type ax + b = c), et le problème de l'existence d'un antécédent pour le nombre 5/3 ne se pose pas. Cet exercice constitue donc a priori un bon exercice d'application du cours. Toutefois l'élaboration d'une technique pour le type de tâches $T_{ant\text{-}alg}$ reste ici à la charge des élèves qui risquent de rencontrer des difficultés avec la deuxième question. Ce qui est effectivement arrivé, comme le montre l'extrait suivant du troisième entretien :

> B : Images, il n'y pas de problème. Antécédents, il y a déjà plus de difficultés. Tu vois, là c'est pareil : x est une variable et cela va devenir une inconnue pour la recherche d'antécédents. Là, je leur faisais noter une phrase : chercher les antécédents de 5/3, c'est chercher les nombres x tels que f(x)=5/3 et après on remplace. Une fois qu'on a dit ça, ça va parce qu'on arrive sur une équation qu'ils savent résoudre.

Face à cette difficulté, Benjamin ne se limite pas à un simple constat. Il propose ici un essai d'analyse : ces difficultés découlent du changement de statut de la lettre qui apparaît avec ce type de tâches. Cette analyse le conduit à percevoir qu'il existe une dissymétrie entre deux types de tâches qui semblent pourtant a priori assez proches. La prise en charge de cette difficulté se fait ici par la mise en mots d'une technique de recherche d'antécédents à partir de l'expression algébrique d'une fonction.

Suite à la correction de cet exercice, Benjamin reprend le cours avec le paragraphe II consacré à la définition de la représentation graphique d'une fonction. Il profitera de ce cours pour répondre à différentes questions d'élèves relativement aux notions d'image et antécédent ("Là j'ai eu beaucoup de questions sur la différence entre image et antécédent.") et à la résolution de certaines équations ("Finalement on en est arrivé à se poser la question : comment résoudre graphiquement f(x)=0 ? Je ne pensais pas le faire mais au fil de leurs questions on en est arrivés là."). Cette mise au point semble avoir permis à Benjamin d'aider les élèves à donner du sens aux notions introduites dans la première partie du cours à partir du registre graphique et à aborder des techniques de détermination graphique d'images, d'antécédents et de solutions d'équations du type $f(x) = \lambda$.

A travers l'étude des exercices proposés par Benjamin pour amener ses élèves à déterminer des images, des antécédents ou à résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir des fonctions, nous retrouvons sa volonté de proposer un travail de la technique se complexifiant progressivement. Relativement à ce point, il a su exploiter le champ des possibles du manuel en proposant l'étude de ces types de tâches pour des fonctions de natures diverses qui permettent de réinvestir différentes connaissances algébriques. En début de ce travail technique, il propose ainsi des exercices faisant intervenir des fonctions affines dans lesquels les élèves rencontrent des types de tâches qu'ils ont déjà étudiées au collège, comme dans l'exercice suivant :

> *Ex n°3 p 98 :*
> *On considère les fonctions f et g définies par* $f(x) = 3x + 2$ *et* $g(x) = \frac{x-3}{4}$.
> *a – Sur un même dessin, tracer les représentations graphiques de f et g.*
> *b – Résoudre graphiquement* $f(x) = g(x)$ *puis* $f(x) < g(x)$.

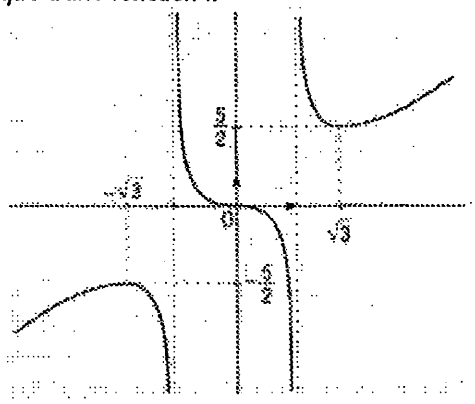
Puis, il complexifie le travail de la technique en proposant le traitement des types de tâches "déterminer des images, des antécédents" ou "résoudre des équations et des inéquations" pour des fonctions affines par morceaux, des fonctions irrationnelles ou des fonctions polynomiales dont l'étude nécessite la transformation de l'expression algébrique pour obtenir une forme appropriée pour traiter les tâches en jeu :

> *Ex n°24 p 99 :*
> *On considère la fonction f définie sur IR par :*
> $$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x \in]\,0\,,\,2[\\ x - 1 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$
> *a – Construire la courbe représentative de f.*
> *b – Résoudre graphiquement les équations* $f(x) = 0$ *et* $f(x) = 1$.
>
> *Ex n°11 p 98 :*
> *On considère la fonction définie sur* $]-1\,;+\infty\,[$ *par* $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}$.
> *Les points suivants sont-ils sur la courbe représentative de f : O (0 ; 0), A(0 ; 1); B(–1 ; 2), C(3 ; 5) ?*
>
> *Ex 106 p 107 :*
> *Soit la fonction f définie sur IR par* $f(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.
> *a – Ecrire f(x) sous la forme d'une différence de deux termes.*
> *b – Ecrire f(x) sous la forme d'un produit de trois facteurs.*
> *c – Résoudre l'équation* $f(x) = 0$.
> *d – Calculer* $f(\sqrt{2})$ *et déterminer les antécédents éventuels de 15.*

Le choix des exercices effectué par Benjamin nous conduit également à pointer sa volonté d'amener ses élèves travailler dans le registre des représentations graphiques, comme dans l'exercice repris ci-dessous, et de proposer une articulation entre ce registre et celui des expressions algébriques, comme dans l'exercice 11 p 98, repris ci-dessus :

Ex 81 p 105 :

Voici la représentation graphique d'une fonction f.



Dans chacun des cas suivants, indiquer le nombre de solutions de l'équation proposée :

a) f(x) = 3 b) f(x) = −2,5 c) f(x) = 1 d) f(x) = 0 e) f(x) = −x f) f(x) = 3x.

III.4.3.4 - Etude de la parité d'une fonction :

Benjamin ne ressent pas la nécessité d'introduire cette nouvelle notion à travers une activité introductive : les élèves la rencontrent directement dans le cours qui débute par différentes définitions et dans lequel Benjamin les amène à découvrir les propriétés graphiques des courbes représentatives de fonctions paires ou impaires ("J'ai dû leur donner le morceau positif, placer le point (x ; f(x)) et leur demander : si je place le point −x ici qu'est-ce qui va se passer ? Ils ont fini par me sortir ça et on a terminé. C'était à la limite de l'oral et de l'écrit."). Nous reprenons ci-dessous la partie du cours consacrée à la notion de fonction paire :

3 – Parité d'une fonction

Définition : On dit qu'un intervalle I est symétrique par rapport à O si, pour tout x ∈ I, on a − x ∈ I.

Exemple : [-3 ; 3] ;]-3 ; 3[

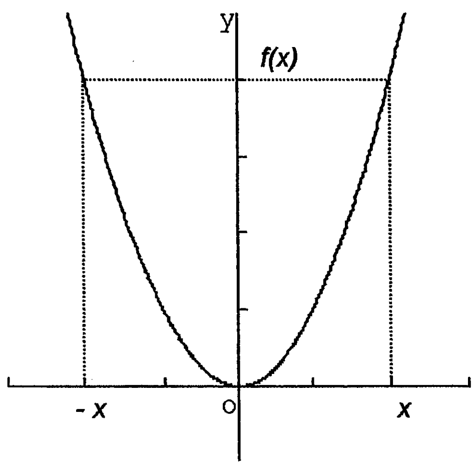
]-3 ; 3] n'est pas symétrique.

Définition : Soit f une fonction définie sur I.

On dit que f est une fonction paire si et seulement si :

- *I est symétrique par rapport à 0*
- *pour tout x ∈ I, on a f(-x) = f(x).*

Représentation graphique :



Propriété : La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Suite à ce cours, Benjamin donne deux exercices à préparer à la maison. Dans le premier, plusieurs domaines de $\mathbb{R}$ sont proposés et les élèves doivent déterminer ceux qui sont symétriques par rapport à zéro. Dans le deuxième, ils doivent compléter la courbe d'une fonction impaire.

Puis, Benjamin consacre la séance de module suivante à l'étude de la parité de fonctions et propose trois exercices. Dans le premier, les élèves doivent compléter le tableau de variation d'une fonction impaire. Dans les deux autres, les élèves doivent étudier la parité de fonctions définies de manière algébrique :

Ex 67 p 103 : *Etudier la parité des fonctions f et g définies sur IR par* $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ *et* $g(x) = \frac{\lvert x\rvert}{x^2+1}$. *Ex 70 p 103 :* *Etudier la parité de la fonction f définie sur* $f(x) = 2x^2 + x$.

Comme nous l'avons vu dans l'analyse du cours, il s'agit ici de la première rencontre avec le type de tâches : étudier algébriquement la parité d'une fonction. Les commentaires du cahier de bord nous amènent à penser que Benjamin a laissé un petit temps aux élèves pour commencer l'exercice n°67. Il laisse donc à ce moment une certaine responsabilité à ses élèves quant à l'élaboration d'une technique pour ce nouveau type de tâches. Devant les difficultés de ses élèves à démarrer, il reprend la main et leur indique en s'appuyant sur la définition vue dans le cours que la technique consiste d'abord à calculer f(-x). Le choix de traiter ce type d'exercices en classe est donc significatif : il profite de ces exercices pour expliciter une technique d'étude de la parité d'une fonction utilisant l'algèbre.

Benjamin a choisi ici deux exercices de la partie "savoir-faire", qui sont parmi les plus simples du manuel consacré à ce thème. L'analyse de ces deux exercices nous montre que Benjamin a d'abord choisi un exercice qui amène les élèves à rencontrer un exemple de fonction paire et un exemple de fonction impaire, puis un exercice où la fonction n'est ni paire, ni impaire. Benjamin a donc la volonté ici de présenter, à travers ces exercices, tous les types possibles. Par ailleurs, l'exercice n°70 est le seul exercice qui présente l'étude de la parité une fonction ni paire, ni impaire. Benjamin a donc le souci ici d'amener ses élèves à rencontrer une telle fonction. Le cahier de bord nous renseigne sur le traitement de l'exercice n°70 : les élèves ont calculé f(-x) et "ont vu" que f n'est ni paire, ni impaire. Or, dans le manuel, les auteurs propose la correction suivante : "f n'est ni paire ni impaire. En effet $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$". La méthode de résolution choisie par Benjamin, basée sur l'expression générale de f et non sur un contre-exemple, est donc différente de celle proposée dans le manuel. Nous verrons dans l'analyse de la séance filmée que ce choix est pensé par Benjamin.

En conclusion, ce chapitre est fortement centré autour de la dimension objet des fonctions. Comme pour le chapitre précédent, son étude fait apparaître un schéma didactique global dans lequel une première phase est consacrée à l'introduction d'une nouvelle notion, afin notamment d'amener les élèves à construire du sens à l'utilisation de la lettre en tant que variable. Et, de nouveau, nous pointons, dans ce chapitre, une réflexion avancée sur le choix d'exercices qui contribuent à proposer un travail de la technique cohérent.

L'étude de l'enseignement consacré aux fonctions montre bien, par ailleurs, la volonté de Benjamin de proposer à la fois un travail dans le cadre algébrique, qui permet par exemple le réinvestissement des connaissances des élèves relatives à la résolution d'équations, et un travail dans le cadre graphique.

Les différents analyses menées sur les pratiques de Benjamin, que nous avons présentées dans ce cinquième chapitre, font apparaître différentes caractéristiques du rapport professionnel à l'algèbre de Benjamin. Nous les synthétisons sous la forme d'un profil dynamique dans la partie suivante.

IV - LE PROFIL DE BENJAMIN

La synthèse des différents éléments obtenus suite à l'analyse des pratiques de Benjamin relativement à son enseignement de l'algèbre nous a amenée à dégager, dans un premier temps, que Benjamin est un stagiaire qui se place rapidement dans une posture d'enseignant réflexif, qui porte une attention particulière à ses élèves, mais qui a du mal à laisser de réelles responsabilités à sa classe. Nous développons ci-dessous chacun de ces trois points.

- *Un stagiaire qui se place immédiatement dans une posture d'enseignant réflexif :*

Benjamin est curieux et très ouvert. Ceci apparaît d'abord à travers l'attention qu'il porte à l'expertise d'autres enseignants, ce qui se traduit par une prise en compte effective des divers conseils ou informations que peuvent lui apporter son conseiller pédagogique ou les formateurs de l'IUFM, ainsi que par sa volonté de vérifier ces informations. Nous avons également ressenti cette ouverture d'esprit à travers les différents entretiens que nous avons eus avec lui : parmi tous les stagiaires que nous avons suivis, c'est celui avec qui les rencontres ont été les plus longues et qui s'est montré le plus coopératif, notamment pour le remplissage du cahier de bord. En effet, alors que, pour la majorité des stagiaires suivis, ce cahier semblait être une contrainte et s'est transformé rapidement en un cahier de textes amélioré, Benjamin se l'est approprié comme un outil de réflexion sur sa pratique dans lequel il a noté, tout au long de l'année, les questions qu'il se posait, les difficultés qu'il rencontrait dans la conception de ses cours, dans le choix de ses activités, les erreurs repérées chez ses élèves... L'étude de ce cahier de bord et les réflexions de Benjamin sur ses pratiques montrent aussi un souci de structure et de rigueur dans l'exercice de son métier. Nous retrouvons donc là un de ses traits de caractère que nous avions déjà relevé lors de l'étude de son rapport aux mathématiques, où nous avions noté que, lors de ses études, il avait plus particulièrement apprécié des domaines dans lesquels il pouvait s'exercer à faire des démonstrations propres, structurées et rigoureuses.

La première rencontre avec Benjamin montre que, dès le début de l'année, il se place dans une position d'enseignant. Ceci est particulièrement révélé par sa vision de l'algèbre, qui passe très rapidement d'une vision centrée sur l'algèbre étudiée à l'université à une vision dans laquelle il intègre les objets de l'algèbre élémentaire étudiée dans le secondaire. Il adopte aussi, dès le début d'année, une posture réflexive et se pose diverses questions concernant ses propres responsabilités envers les élèves, le rôle d'un enseignant de mathématiques, la construction d'un cours, les problèmes que rencontrent ses élèves, le choix de stratégies adaptées pour les prendre en charge... Et il intègre à cette réflexion divers éléments obtenus lors de discussions avec son conseiller pédagogique ou avec les formateurs. Ce positionnement rapide dans une posture d'enseignant se repère également à travers une cohérence, qui émerge dès le début d'année, dans les stratégies didactiques adoptées et dans les gestes professionnels.

En ce qui concerne les stratégies didactiques, dès les premières séances Benjamin met en place deux types de schémas didactiques, suivant qu'il propose de travailler sur des objets anciens ou nouveaux. Pour le travail sur les objets anciens, il rappelle d'abord, sans les motiver, ni les justifier, des définitions, des règles ou des propriétés déjà étudiées au collège, puis il organise un travail des techniques. Ce schéma a été mis en place à plusieurs reprises dans le premier chapitre et nous l'avons déjà évoqué lors du travail sur les fractions dans le cadre algébrique (cf. partie III.1.4.2.2) ou lors du travail sur la factorisation (cf. partie III.1.4.2.3). Il sera repris au cours de l'année, notamment lors du travail sur les inéquations du premier degré. Lors du travail sur le nouveau, la première phase de ce schéma est modifiée puisque Benjamin organise d'abord un moment pour construire du sens aux objets qu'il introduit. Ce deuxième schéma apparaît également dès le premier chapitre avec l'introduction de la valeur absolue, pour laquelle Benjamin organise une activité contextualisée afin d'aider les élèves à donner du sens à cette nouvelle notion. Ce schéma réapparaîtra plusieurs fois dans l'année, notamment lors de l'introduction de nouvelles inégalités (le rangement de carrés de nombres positifs, par exemple, partie III.3.2.1) ou des fonctions (partie III.4.3.2).

Notre étude a montré également une réflexion intéressante, dès le début de l'année, relativement aux deux gestes professionnels "choisir des exercices pour travailler une technique" et "prendre en charge les difficultés des élèves". Pour le premier de ces gestes, l'étude des pratiques de Benjamin a montré sa rigueur lors de l'organisation du travail de techniques et une cohérence certaine lors du choix des exercices (prise en compte des difficultés d'élèves, ainsi que de diverses variables didactiques). L'existence de cette cohérence dès le début de l'année (cf. notre étude du travail sur les fractions) semble montrer qu'une réflexion sur le geste professionnel "choisir des exercices" était déjà en germe avant la rentrée. Enfin, une cohérence apparaît également rapidement au niveau des stratégies de prise en charge des difficultés des élèves. En effet, dès le début de l'année, il met en place deux grandes stratégies : la réexplication en cas de problème et le passage au numérique. Ces stratégies sont restées privilégiées jusqu'à la fin de l'année, même si la première a montré des limites, notamment lors du travail sur les valeurs absolues, et même si l'évolution de sa vision quant aux difficultés des élèves a contribué à l'évolution de ses systèmes de prise en charge, comme nous le verrons plus loin.

- *Une attention particulière portée aux élèves :*

En début d'année, Benjamin a l'impression que l'algèbre paraît plus simple aux élèves que d'autres domaines des mathématiques, notamment la géométrie, qui demande plus de logique. Pour lui la simplicité de l'algèbre réside dans le fait que c'est un domaine situé dans la continuité du numérique, sur lequel les élèves travaillent depuis longtemps et qu'ils maîtrisent. Cette vision de l'algèbre peut sans doute aussi s'expliquer par son propre vécu d'élève et par les difficultés qu'il a connues lui-même en géométrie. Par ailleurs, il estime qu'il est facile de montrer l'utilité de l'algèbre à travers la résolution de problèmes simples. Ces deux points le conduisent à penser que l'algèbre est un domaine plus facile à enseigner.

Il est certes tout à fait conscient, lors du premier entretien, que ses élèves peuvent rencontrer en algèbre des difficultés qu'il doit prendre en compte, mais cela ne change pas sa vision globale sur l'enseignement de ce domaine.

Il est, en particulier, sensible au fait que, même si l'algèbre peut paraître plus simple que d'autres domaines, il doit aider ses élèves à donner du sens aux notions étudiées, à se les approprier. Les aides qu'il apporte sont alors différentes selon que le travail porte sur de l'ancien ou du nouveau. Pour les objets anciens, Benjamin ne prévoit pas de reconstruction a priori du sens, mais il prend en charge au fur et à mesure les problèmes que ses élèves rencontrent. En revanche, pour les objets nouveaux, il a la volonté d'organiser d'abord un moment consacré à la construction du sens, comme nous l'avons pointé précédemment. Cette différence de pratiques pour le travail sur l'ancien et le nouveau s'explique très certainement par sa vision de simplicité le conduisant sans doute à penser que la question de construction a priori du sens se pose uniquement pour les nouvelles notions introduites.

Pour Benjamin, l'aide à l'appropriation des notions passe aussi par un enseignement de l'algèbre plus concret que ce qu'il a connu à l'université, en restituant l'utilité de ce domaine des mathématiques. Les fonctionnalités de l'algèbre repérées en début d'année sont : l'algèbre comme outil de résolution de problèmes à l'aide d'équations et comme outil au service des fonctions. L'enseignement de ces notions donnera effectivement lieu à une articulation des dimensions outil et objet de l'algèbre.

D'une manière plus générale, Benjamin se montre, dès le début de l'année, très sensible aux difficultés que ses élèves rencontrent en algèbre et, lors du premier entretien, il décrit déjà très précisément certaines d'entre elles. Le cahier de bord semble avoir favorisé ce repérage puisque Benjamin nous explique, au cours de l'année, que, lors des séances de modules, il s'efforce de repérer les erreurs commises par ses élèves pour les noter ensuite dans ce cahier, avec l'objectif de réutiliser ces notes ultérieurement. Par ailleurs, il réinvestit certains aspects de la formation en algèbre pour prévoir ou analyser certaines difficultés. Cette attitude s'explique en partie par le fait que Benjamin n'aime pas improviser et qu'il préfère prévoir les problèmes plutôt que les découvrir en classe.

Son attention particulière aux élèves apparaît aussi dans le souci qu'il a d'aider les élèves à disposer de méthodes, à acquérir des réflexes. En effet, comme nous l'avons vu lors de l'étude du premier chapitre consacré à l'algèbre, Benjamin y met en place une stratégie d'enseignement consistant à écrire des "fiches-méthodes" sur lesquelles sont explicitées des techniques que les élèves vont ensuite appliquer sur différents spécimens de tâches. Cette stratégie sera ensuite reprise lors des différents chapitres consacrés à l'algèbre : résolution d'équations (partie III.2.3.2.2), résolution d'inéquations (partie III.3.3.3.2), plan d'étude d'une fonction comme nous le verrons dans l'analyse de la séance filmée. Or l'étude du rapport aux mathématiques de Benjamin a montré son goût pour les démonstrations structurées et son besoin de méthodes pour réussir certains examens à l'université. Ces deux aspects de sa logique personnelle expliquent certainement le développement de cette vision sur l'enseignement de l'algèbre.

Enfin, le travail des techniques traduit également bien cette attention qu'il porte aux élèves. En effet, le choix des exercices montre un réel souci de les aider à s'approprier les techniques étudiées. De plus, le travail est bien souvent commencé en classe. Ce dispositif est un moyen pour Benjamin d'être présent pour les aider à s'approprier les règles ou les techniques à appliquer. Dans les cas où les premiers exercices d'application sont donnés à préparer à la maison, Benjamin choisit des exercices simples qui ne devraient pas susciter trop de difficultés chez les élèves.

- *Une certaine place laissée aux élèves, mais peu de responsabilités :*

L'attention qu'il porte à ses élèves et le souci qu'il a de les aider à s'approprier les notions et les techniques étudiées se traduisent donc, en particulier, par des moments de travail technique, pendant lesquels Benjamin a la volonté de laisser une réelle place à ses élèves : il leur laisse du temps pour chercher, il les envoie au tableau, il prend en compte leurs réponses et leurs difficultés et il leur laisse quelques responsabilités relativement à l'amélioration de techniques. Notons que ce dispositif de travail lui permet de disposer d'un observatoire des difficultés des élèves et donc de les prendre en charge. En revanche, il leur laisse peu de responsabilité à propos de l'élaboration des fiches-méthodes que nous avons évoquées ci-dessus. L'explicitation des méthodes à appliquer reste complètement à sa charge, qu'il s'agisse de méthodes déjà rencontrées par les élèves ou de méthodes nouvelles, et il ne ressent pas le besoin de les amener à travailler sur l'élaboration de techniques. Cette caractéristique de l'enseignement de Benjamin se retrouve tout au long de l'année . C'est seulement au cours du dernier chapitre mettant en jeu de l'algèbre, celui sur les fonctions, qu'émergera un questionnement tardif sur le sens que les élèves peuvent donner à ses méthodes. Nous reviendrons sur ce point lors de l'analyse de la séance filmée.

Lors d'activités qui lui semblent plus difficiles, Benjamin choisit une gestion qui laisse également peu de responsabilité aux élèves : soit il prend lui-même en charge la résolution du problème en veillant à les faire participer, soit il envoie un élève au tableau et le guide par un ensemble de questions. Ce dispositif permet de faciliter la tâche des élèves et nous y retrouvons le souci qu'a Benjamin de leur laisser une place. Notons que la mise en place d'un tel dispositif va empêcher la prise de conscience de certaines difficultés que les élèves peuvent rencontrer en algèbre : la résolution arithmétique de certains problèmes choisis pour travailler la mise en équation, des difficultés rencontrées par les élèves lors de l'utilisation de l'algèbre pour prouver certaines propriétés, comme nous le verrons lors de l'analyse de la séance filmée.

Benjamin est donc un stagiaire qui enseigne dans de bonnes conditions et qui a su mettre en place, dès le début de l'année, une atmosphère de travail qui lui convient bien. Dès les premiers jours, il a développé des stratégies qui font que sa classe tourne. L'étude de ses pratiques a montré de vrais points forts en ce qui concerne la prise en compte des élèves et de leurs difficultés, ainsi que l'organisation du travail de la technique. Mais elle fait également apparaître des points faibles notamment en ce qui concerne la place laissée aux élèves lors de l'élaboration de techniques, le traitement de types de tâches plus complexes, la motivation de certaines études. Néanmoins, ces points faibles ne viennent pas bouleverser le bon déroulement de la classe et accentuent, bien au contraire, le sentiment de confort que doivent avoir les élèves.

Benjamin a donc trouvé assez rapidement un équilibre professionnel pouvant conduire à faire l'hypothèse qu'il n'y a pas de grands bouleversements à attendre relativement à ses pratiques. Mais, de par son attitude réflexive, son ouverture d'esprit envers les pratiques de son conseiller pédagogique comme envers la formation, de par l'attention particulière qu'il porte aux élèves favorisée par des stratégies de travail qui lui permettent de voir des choses, Benjamin se questionne régulièrement à propos de ses propres pratiques et, en particulier, à propos des problèmes que ses élèves rencontrent. Ce questionnement va conduire Benjamin à quelques évolutions dans ses pratiques, que nous développons ci-dessous.

- *Une évolution dans l'interprétation des difficultés des élèves :*

L'évolution la plus flagrante concerne l'interprétation des difficultés de ses élèves. En effet, lors du premier entretien, Benjamin semble parfois désemparé devant certaines d'entre elles et ne semble pas avoir de moyens pour les interpréter, les comprendre. Puis, au cours de l'année, son regard va évoluer pour aboutir à un système explicatif relativement expert. L'exemple de la compréhension des difficultés des élèves à utiliser les lettres en algèbre nous semble tout à fait révélateur de cette évolution. En effet, au début de l'année, Benjamin tient un discours relativement vague sur le blocage des élèves face à l'utilisation des lettres qu'il interprète comme un manque d'habitude. Mais la résistance de certains problèmes à ses stratégies de prise en charge, notamment lors du travail sur la valeur absolue, le pousse à se questionner davantage. Pendant le travail sur les équations de droites, Benjamin va repérer que ses élèves rencontrent des difficultés liées aux changements de statut de la lettre suivant les différentes tâches algébriques. Il intègre donc cette dimension dans son système explicatif. Il la prendra également en compte pour l'introduction des fonctions, où il choisira une activité qui lui semble favoriser l'appréhension de la notion de variable.

- *Une évolution dans l'organisation du travail des techniques :*

Une deuxième évolution plus subtile marque l'un des points forts des pratiques de Benjamin : l'organisation du travail technique. Comme nous l'avons vu précédemment, sa stratégie de choix des exercices n'a jamais changé, mais nous notons une évolution en ce qui concerne la gestion de ce travail. En effet, lors de l'étude du premier chapitre, nous avions repéré que le travail technique associé à un type de tâches spécifique était peu étalé dans le temps. Dès le deuxième chapitre, le travail technique devient beaucoup plus étalé.

- *L'émergence de deux nouveaux questionnements :*

Les réflexions de Benjamin sur ses pratiques vont également favoriser, en fin d'année, l'émergence d'un questionnement concernant l'apprentissage des méthodes et l'apprentissage de la notion de contre-exemple en algèbre, comme nous le verrons lors de l'analyse de la séance filmée. Pour le premier de ces points, comme nous l'avons vu précédemment, Benjamin a toujours pris à sa charge l'explicitation des techniques et n'a jamais conduit ses élèves à élaborer des méthodes. Or, à la fin du chapitre sur les fonctions, Benjamin s'est rendu compte que certains élèves ne donnaient pas de sens au plan d'étude d'une fonction qu'il avait institutionnalisé. Suite à cet incident, Benjamin s'est interrogé sur sa stratégie de donner des "recettes" à ses élèves et sur le sens que les élèves donnaient à ces méthodes. Mais ce questionnement est resté ouvert et n'a pas eu d'influence immédiate, dans la mesure où l'enseignement en algèbre était fini.

Le questionnement relatif au second point est également né à la suite d'un incident survenu lors de l'étude de la fonction carré, pendant laquelle Benjamin s'est aperçu que des élèves utilisaient un exemple pour prouver un résultat général sur la parité de la fonction. La réflexion de Benjamin l'a conduit à s'interroger sur l'intérêt et la possibilité d'enseigner la notion de contre-exemple aux élèves. Ce questionnement restera également ouvert.

Ce profil de Benjamin met donc en évidence une cohérence de fonctionnement stable, qui se met rapidement en place dès le début de son stage, avec des points forts, mais aussi des points faibles, notamment en ce qui concerne les responsabilités laissées aux élèves. Nous avons expliqué cette stabilité par le fait que Benjamin a su rapidement faire "tourner" sa classe (Robert, 1996). Mais, certains aspects de sa logique personnelle, en particulier son ouverture d'esprit et sa posture réflexive, vont le conduire à quelques subtiles évolutions. L'on peut alors se demander si un stagiaire ayant les mêmes conditions de travail que Benjamin évoluerait de la même manière et s'interroger sur la constitution du rapport professionnel à l'algèbre pour un stagiaire travaillant dans un milieu moins favorable. C'est, en partie, ce que nous nous proposons d'étudier dans le chapitre suivant consacré à l'établissement des profils pour les trois autres PLC2 considérés dans cette recherche.

CHAPITRE 6

LES PROFILS DE TROIS AUTRES STAGIAIRES

Comme nous l'avons précisé dans notre chapitre 3 consacré à la méthodologie, nous avons choisi d'étudier la construction de la constitution et de l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre de quatre professeurs stagiaires, effectuant leur stage en responsabilité dans une classe de seconde. Nous avons présenté dans le chapitre précédent une étude détaillée des pratiques d'un de ces PLC2, Benjamin, et de leur évolution, ce qui nous a amenée à expliciter notre méthode de travail pour analyser les différentes données recueillies lors du suivi individuel. Nous avons ensuite synthétisé l'ensemble des analyses concernant Benjamin sous la forme d'un profil.

C'est cette notion de profil que nous exploitons dans ce chapitre 6 pour rendre compte des analyses analogues menées sur les trois autres stagiaires considérés dans cette thèse : Claire, Marie et Julien, sans rentrer de façon aussi détaillée dans les méandres de leur élaboration, pour des raisons évidentes de lisibilité. Nous chercherons à mettre tout particulièrement en évidence les régularités identifiées dans la constitution et l'évolution de ces quatre rapports professionnels à l'algèbre, mais aussi la diversité existante dans les évolutions, en essayant d'en faire percevoir des causes possibles.

La sélection de ces quatre stagiaires parmi les différentes personnes que nous avons suivies individuellement lors de la partie expérimentale de la thèse, pendant les années 1998/1999 et 1999/2000, s'est effectuée sur la base de deux variables :

- il nous a semblé nécessaire de prendre en compte un changement au sein de l'équipe des formateurs entre ces deux années : Marie et Julien ont ainsi suivi leur formation en 1998/1999, Claire et Benjamin l'année suivante,
- nous avons également choisi des stagiaires avec des conditions de travail différentes, afin d'en mesurer les éventuels effets sur l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre des enseignants débutants : Marie et Benjamin ont ainsi effectué leur stage en responsabilité dans des lycées au centre de grandes villes, Claire et Julien ont enseigné dans des lycées techniques.

Dans ce chapitre, nous étudierons, dans un premier temps, le profil de Marie qui exerce dans un milieu relativement semblable à celui de Benjamin et nous le comparerons au profil de ce dernier établi dans le chapitre 5. Puis, dans un deuxième paragraphe, nous analyserons le rapport professionnel à l'algèbre de Julien qui, lui, travaille dans d'autres conditions et qui a connu un début de stage difficile. Enfin, nous nous centrerons sur le profil de Claire qui enseigne dans un milieu assez semblable à celui de Julien, mais a rencontré d'emblée beaucoup moins de problèmes.

I - LE PROFIL DE MARIE :

Marie est stagiaire en 1998/1999 dans un lycée situé au centre d'une grande ville. Tout comme Benjamin, elle exerce dans un milieu favorable et ne rencontre pas de problèmes particuliers dans sa classe. En début d'année, elle estime ainsi qu'il s'agit d'une bonne classe comparée aux autres classes de seconde[97] qu'elle a pu observer. Elle trouve que ses élèves sont dociles, gentils et qu'ils font ce qu'on leur demande de faire.

L'étude des pratiques de Marie montre qu'elle a développé, en début d'année, des stratégies didactiques présentant des points communs avec celles élaborées par Benjamin et que les profils dynamiques de ces deux stagiaires ont des caractéristiques communes. Nous les étudierons dans la partie I.1. Une analyse comparative des deux profils met cependant en évidence des différences que nous détaillerons dans la partie I.2. Tout comme pour Benjamin, l'étude du rapport professionnel à l'algèbre de Marie fait apparaître certaines évolutions, que nous préciserons dans la partie I.3. Enfin, nous synthétiserons les différents résultats obtenus en soulignant d'une part les similarités avec le profil de Benjamin, d'autre part les différences, en particulier au niveau des évolutions repérées ; nous essaierons d'en donner des raisons.

Etudions donc, dans un premier temps, quelques caractéristiques du profil de Marie qui le rapprochent du profil de Benjamin.

I.1 - Une certaine similarité avec le profil de Benjamin :

Tout comme Benjamin, Marie se positionne dès le début d'année dans une posture d'enseignante et met en place, dès les premières séances, des stratégies didactiques qui font que sa classe tourne. Ces stratégies resteront, tout comme celles de Benjamin, relativement stables tout au long de l'année. L'étude des gestes professionnels de Marie : "construire un cours" et "choisir des exercices" montre ainsi une réelle cohérence qui apparaît d'emblée. Nous en rendrons compte dans les deux parties suivantes. L'analyse des pratiques de Marie lors de l'enseignement de l'algèbre fait également apparaître un comportement proche de celui de Benjamin en ce qui concerne l'aide à l'étude des élèves. Nous y consacrerons la troisième partie.

I.1.1 - Une cohérence dans la construction des cours :

Dès le début de l'année, Marie adopte un schéma pour le travail sur des objets anciens qui est assez semblable à celui développé par Benjamin pour le même type de travail : pour chacune des notions étudiées, elle commence par un cours sans prendre au préalable d'information sur les connaissances de ses élèves et propose ensuite des exercices d'application.

Dès les premières séances[98], Marie a des objectifs bien précis en ce qui concerne la conception de son cours : elle souhaite, ainsi, d'abord "bien" reprendre les différentes règles de calcul déjà étudiées au collège pour remettre en place les connaissances anciennes et pour que les élèves aient les bases nécessaires pour la suite du travail algébrique en seconde. Cet objectif se traduit par un retour sur la définition de notions et de certains types de tâches,

[97] Son conseiller pédagogique a, lui aussi, une classe de seconde dans laquelle elle est allée l'observer. Par ailleurs, dans le cadre de l'opération séance (cf. la partie II du chapitre 4), elle a observé un de ses collègues stagiaires qui travaillait dans le lycée technique de la ville et qui avait bien des difficultés avec sa classe.

[98] Précisons la progression annuelle choisie par Marie pour l'enseignement de l'algèbre : chapitre 1 "Activités numériques" (période du 14/09/98 au 4/10/98), chapitre 2 "Inégalités, inéquations" (du 5/10 au 25/10), chapitre 3 "Systèmes d'équations linéaires" (du 4/01/99 au 15/01/99), chapitre 4 "Valeur absolue, encadrements" (du 18/01 au 1/02), chapitre 5 "Fonctions, généralités" (du 22/02 au 5/03), chapitre 6 "Fonctions usuelles" (du 15/03 au 30/03).

comme dans l'exemple ci-dessous extrait du premier chapitre dans lequel elle redéfinit les types de tâches "résoudre une équation" et la notion de solution :

Résoudre dans IR l'équation $x^2 - x = 0$, c'est trouver tous les réels x tels que $x^2 - x = 0$.
Or $x^2 - x = x(x-1)$ donc $x^2 - x = 0$ équivaut à $x(x-1) = 0$ c'est à dire $x = 0$ ou $x = 1$
L'équation admet donc pour solution 0 et 1. On note $S = \{ 0 ; 1 \}$

Cet objectif de Marie se traduit également par un rappel systématique des différentes règles de calculs déjà étudiées au collège. Elle ne justifie aucun résultat mais se montre attentive à l'aide qu'elle peut apporter aux élèves pour qu'ils s'approprient les propriétés et les techniques retravaillées dans ce chapitre : elle fournit, pour ce faire, dans le cours de nombreux exemples d'utilisation et laisse du temps à ses élèves pour qu'ils les étudient. Nous reprenons ci-dessous les exemples d'utilisation des identités remarquables qu'elle propose dans le premier chapitre :

a – Les égalités remarquables servent à développer, c'est à dire à transformer un produit en somme :
$(3x-1)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1 = 9x^2 - 6x + 1$
$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 9 = x^2 + 6x + 9$
$(2x-5)(2x+5) = (2x)^2 - (5)^2) = 4x^2 - 25$
b – Elles servent aussi à factoriser, c'est à dire transformer une somme en produit :
$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x-3)^2$
$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

Dans les chapitres suivants au cours desquels Marie alterne un travail sur des objets anciens[99] et un travail sur des objets nouveaux[100], nous retrouvons un grand nombre de définitions, très peu de justifications des résultats énoncés et beaucoup d'illustrations de ces derniers.

Le souci de définition apparaît, par exemple, clairement dans le chapitre sur les généralités sur les fonctions, en particulier dans le paragraphe consacré au sens de variation. Après avoir proposé à ses élèves de traiter une activité extraite du manuel de la classe[101] dans laquelle sont introduites les notions d'extremum, de sens de variation et de tableau à partir d'une situation concrète (le relevé d'une température en fonction du temps) décrite par la représentation graphique d'une fonction, Marie débute son cours. Elle fait le choix de donner à la suite neuf définitions[102], sans motivation, accompagnées de différentes remarques relatives au sens de variation d'une fonction. Elle manifeste un souci évident d'être exhaustive quant au

[99] Par exemple les inéquations du premier degré, les systèmes d'équations linéaires.

[100] Par exemple la valeur absolue, les fonctions.

[101] Le manuel de la classe est l'ouvrage "Dimathème 2[e]" élaboré par N.Nakatani, F.Nassiet, J.C.Perrinaud, D.Porté et L.Rivoallan, édité en 1994 par Didier. Marie travaille également avec les trois manuels suivants :
ANTIBI A., BARRA R. (1995). *Math 2de*, Nouveau Transmath. Editions Nathan.
BONTEMPS G., BRABANT P., CARNEC H., GARDES D., KCZACZKOWSKI M., NOUET M., SEROUX R. (1994). *Mathématiques seconde avec modules*, Collection Fractale. Editions Bordas.
TERRACHER P.H., FERRACHOGLOU R. (1994). *Math seconde*, Collection Terracher. Editions Hachette éducation.

[102] Fonction croissante, fonction strictement croissante, fonction décroissante, fonction strictement décroissante, fonction croissante, fonction monotone, maximum, minimum, définition du type de tâches "étudier le sens de variation d'une fonction".

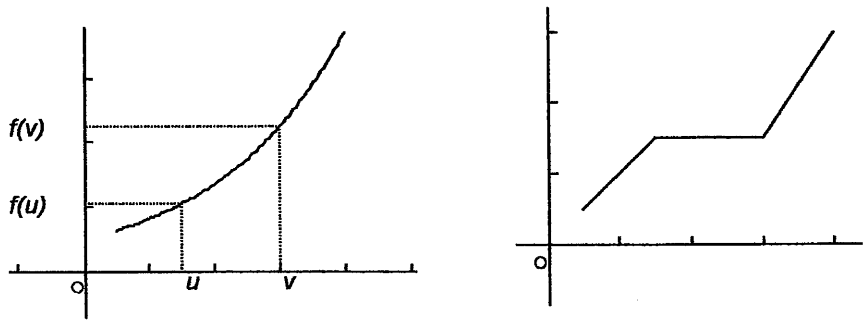
vocabulaire à introduire, comme le montre l'extrait suivant relatif à la notion de fonction croissante :

IV – Sens de variation d'une fonction

1 – Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est croissante sur I lorsque pour tous réels u et v dans I, si u < v alors f(u) ≤ f(v).



La courbe "monte" de la gauche vers la droite et elle peut comporter des segments horizontaux.

Remarque : Si on remplace l'inégalité f(u) ≤ f(v) par l'inégalité stricte f(u) < f(v), on dira que la fonction est strictement croissante sur I.

Dans le manuel de la classe, nous ne trouvons pas autant de définitions[103] et il semble que Marie se soit davantage appuyée ici sur le Transmath dans lequel les auteurs fournissent les définitions de fonction croissante, strictement croissante, décroissante et strictement croissante. Mais, elle a ajouté à ces quatre définitions celle d'une fonction constante (peut-être inspirée du Dimathème) et celle d'une fonction monotone, que nous ne trouvons dans aucun des quatre manuels avec lesquels elle travaille. Cette stratégie qui consiste à repérer, dans les différents manuels qu'elle utilise, les diverses définitions possibles et à en dresser, ensuite, une liste exhaustive fait bien apparaître sa volonté de définir rigoureusement les différents objets (anciens ou nouveaux introduits).

Le souci de proposer des exemples restera, également, présent tout au long de l'année : pour chacune des notions étudiées, le cours est le lieu de la mise en place, sur des exemples, de techniques destinées à traiter des types de tâches relatifs à ces notions. Pour certaines notions[104], son objectif est alors de présenter un catalogue le plus exhaustif possible des types de tâches que les élèves peuvent rencontrer. Illustrons ceci par la citation suivante extraite du premier entretien :

M : En général, j'essaie de faire une panoplie de toutes les formes qu'ils peuvent trouver. Par exemple, pour les équations, essayer de varier le plus possible toutes les formes d'équations.

[103] Les auteurs définissent uniquement les notions de fonction croissante, décroissante et constante.

[104] Ceci est le cas pour les développements et les factorisations d'expressions algébriques, la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations.

Ceci apparaît, par exemple, dans le chapitre relatif aux inéquations où, après l'introduction, à travers l'étude d'exemples, des techniques pour étudier le signe d'un produit et d'un quotient, Marie donne dans le cours les quatre inéquations suivantes à résoudre : $(-3x+5)(7x-9) > 0$, $\frac{-3x+5}{7x-9} \leq 0$, $x^3 > 4x$, $\frac{x-1}{x-2} < 4$. L'analyse des manuels avec lesquels elle travaille montre que Marie ne les a pas repris textuellement dans les exemples d'application fournis par les différents auteurs. Ils correspondent donc à sa propre vision des choix à effectuer lors de l'illustration des techniques introduites dans le cours. Nous pouvons ainsi pointer qu'elle a choisi de représenter les différents cas que les élèves pourront rencontrer (des inéquations avec un second membre nul ou non nul, des inéquations qui nécessitent une factorisation préliminaire, des inéquations avec une inconnue au dénominateur qui nécessitent une réduction au même dénominateur), uniquement à partir de quatre spécimens, ce qui nous amène à penser que Marie a aussi la volonté de sélectionner des exemples particulièrement pertinents pour économiser le nombre de spécimens à traiter en cours.

L'étude des cours élaborés par Marie fait apparaître une troisième caractéristique : sa non-sensibilité à l'apport d'éléments technologiques. Comme nous l'avons déjà signalé précédemment, aucune règle ou propriété déjà étudiée au collège n'est justifiée. Et, contrairement à Benjamin, elle ne justifie pas systématiquement les nouveaux résultats énoncés : ceci est le cas, par exemple, dans le travail sur les théorèmes relatifs au rangement des carrés, des inverses et des racines carrées de deux nombres positifs, qu'elle introduit dans son deuxième chapitre consacré à l'algèbre, sans aucune justification. L'étude des champs des possibles dans les différents manuels avec lesquels elle travaille nous a amenée à pointer que, pour construire le cours relatif à ce chapitre, elle s'est totalement inspirée de ce qui est proposé dans le Transmath. Or, dans cet ouvrage, tous les résultats présentés sont justifiés de manière théorique.

Par ailleurs, lorsque Marie justifie des résultats, elle ne le fait jamais de manière théorique, mais elle généralise à partir d'exemples. C'est le cas, par exemple, lors de l'étude du signe de ax +b pour laquelle elle commence par faire étudier le signe des deux expressions 2x +5 et – 3x + 6 avant de généraliser le résultat[105]. De nouveau, elle s'est très clairement inspirée d'une activité préparatoire du Transmath dans laquelle les élèves doivent étudier le signe de six expressions du type ax + b (dont les binômes 2x + 5 et – 3x + 6), puis établir une règle générale donnant le signe de ax + b dans le cas où a est positif et dans celui où il est négatif. Ce résultat est alors démontré de manière théorique dans la partie consacrée au cours. L'exploitation faite par Marie de ce qui est proposé dans le Transmath montre bien qu'elle ne souhaite pas justifier de manière théorique les résultats énoncés.

Une dernière caractéristique des cours de Marie est l'utilisation d'activités pour introduire certaines notions ou types de tâches qui paraissent emblématiques du programme de seconde à un certain nombre de stagiaires enseignant en classe de seconde : étude du signe de ax + b, définition de la valeur absolue à partir de la notion de distance et l'introduction de la notion de fonction à partir d'une situation concrète. Nous reviendrons ultérieurement sur une analyse plus précise de l'exploitation de ces activités.

---

[105] Nous retrouvons ici le souci d'économie que nous venons de pointer.

Après avoir exposé les cohérences mises en évidence par l'analyse des cours élaborés par Marie, penchons nous sur l'organisation du travail des techniques, pour lequel une réelle cohérence apparaît également dès le début de l'année.

I.1.2 - Une cohérence dans le travail des techniques :

La volonté de Marie d'aider ses élèves à s'approprier les règles de calcul étudiées, repérée dans ses stratégies d'élaboration d'un cours, apparaît aussi dans sa façon de structurer ses séances : après le rappel de règles associées à une notion particulière, Marie propose aussitôt un travail de la technique à travers un ensemble d'exercices. Ce travail est le plus souvent débuté en classe, ce qui permet à Marie d'être présente pour aider les élèves à s'approprier les techniques en jeu. Si ce travail débute en dehors de la classe, Marie propose des exercices simples où les élèves ne devraient pas rencontrer trop de difficultés ou bien donne des indications à ses élèves.

L'objectif de Marie pour ce travail technique est de présenter, comme dans le cours, une panoplie de toutes les variantes que les élèves peuvent rencontrer. Pour un type de tâche donné, le travail technique se fait alors sur un nombre important de spécimens (contrairement à ce qui est proposé dans le cours) et elle choisit des exercices qui conduisent à une complexification progressive de ce travail. Cette technique de choix des exercices semble avoir été en germe avant même que Marie ne prenne une classe en responsabilité puisque cette caractéristique est particulièrement frappante dans une fiche relative à des calculs sur les fractions que Marie a distribuée dès la première séance de l'année. Nous en reprenons deux exercices ci-dessous :

Exercice n°2 : Donner les résultats sous forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}$ $\quad \frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ $\quad \frac{5}{12}-\frac{5}{8}$; $\quad 1-\frac{5}{8}$ $\quad -3+\frac{2}{7}$

$3-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$ $\quad \frac{7}{8}\times\frac{6}{13}$ $\quad \frac{7}{4}\times\frac{2}{21}$ $\quad -\frac{1}{3}:\frac{4}{5}$ $\quad -\frac{1}{3}:3$

$\frac{10}{3}\times\frac{27}{45}$ $\quad \frac{4-\frac{2}{3}}{5}$ $\quad \frac{\frac{2}{5}-\frac{7}{2}}{\frac{4}{3}+\frac{2}{5}}$ $\quad (\frac{1}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1}{2}+1)$

$(\frac{2}{3}-\frac{3}{4})+3(\frac{4}{5}-\frac{5}{6})$

Exercice n°3 : Ecrire plus simplement chacun des nombres suivants :

$A=-\frac{6}{35}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$ $\qquad B=\frac{20}{28}+\frac{3}{14}\times\frac{4}{9}$

$C=\dfrac{6-\frac{5}{2}+\frac{3}{8}}{3-\frac{5}{2}-\frac{7}{4}}$ $\qquad D=13\times\frac{43}{45}\times\frac{72}{91}$

$E=3+5\times\dfrac{\frac{7}{2}-2}{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}}$ $\qquad F=(\frac{3}{4}-\frac{5}{3})\times\dfrac{2-\frac{4}{7}}{3}\times\dfrac{1}{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}$

$G=(\frac{1}{2}+\frac{5}{3})\times(3+\frac{7}{4}):(\frac{1}{2}-\frac{5}{6})$ $\qquad H=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3+1}}{\frac{3-2}{5-4}+\frac{1}{5-1}}$

Dans cette fiche, Marie propose d'abord des calculs très simples qui se complexifient progressivement et qui mettent en jeu les différentes opérations. Puis les calculs proposés mettent en jeu plusieurs opérations et deviennent de plus en plus complexes. Le travail de la technique relative au type de tâches "mener un calcul sur des fractions" est ainsi très structuré. Une analyse comparative de cette fiche et du Dimathème, montre que Marie a pioché les spécimens les plus simples dans le manuel et qu'elle en a fabriqué d'autres pour compléter sa fiche par des types de calculs plus complexes qui apparaissent à la fin de l'exercice 2 et dans l'exercice 3.

Ce souci de faire travailler les élèves sur les différentes formes qu'ils peuvent rencontrer et de leur proposer un nombre important de spécimens choisis, avec la volonté de proposer une complexification progressive, est présent dans chacun des chapitres traités dans l'année. Il apparaît aussi, par exemple, lors du travail de la technique pour le type de tâches "déterminer l'ensemble de définition d'une fonction"[106]. Ainsi, après avoir étudié l'ensemble de définition de la fonction inverse dans le cours, Marie propose à ses élèves de traiter en classe l'exercice suivant :

> *<u>Ex n°1 p 137 :</u>*
> *Justifier que D est l'ensemble de définition de la fonction f.*
> a – $f : x \longmapsto 2x^2 - 3x + 9$; $D = IR$ b – $f : x \longmapsto x^3 - 6x + 1$; $D = IR$
> c – $f : x \longmapsto \sqrt{x-1}$; $D = [1 ; +\infty[$ d – $f : x \longmapsto \sqrt{x-3}$; $D =]-\infty ; 3]$

Marie accompagne ici ses élèves dans l'appropriation de la nouvelle notion introduite dans le cours, à travers un premier exercice traité en classe. Elle propose ensuite deux exercices à préparer à la maison. Le premier est extrait du manuel et le second est inventé par Marie :

> *<u>Ex n°3 p 137 :</u>*
> *Trouver l'ensemble de définition D des fonctions suivantes :*
> a – $f : x \longmapsto (x-1)(x-2)$ b – $f : x \longmapsto 0$
> c – $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+9}$ d – $f : x \longmapsto \sqrt{2x+3} \times \sqrt{2x-3}$
> e – $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ f – $f : x \longmapsto \dfrac{3x+2}{x^2+1}$
> g – $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{x+1}$ h – $f : x \longmapsto \dfrac{4x}{x^2-4}$
> *<u>Exercice supplémentaire :</u>*
> *Déterminer les ensembles de définition de* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ *et* $f : x \longmapsto \dfrac{3}{-\sqrt{x^2+7}}$

Le souci de complexification apparaît bien ici puisque, contrairement à ce qui était fait dans l'exercice 1, l'ensemble de définition n'est plus donné et que les élèves doivent le déterminer eux-mêmes ce qui rend la tâche plus difficile. Par ailleurs, certaines expressions sont plus complexes que celles étudiées dans le premier exercice. Enfin, nous pouvons noter ici le souci d'exhaustivité technique de Marie qui complète cet exercice par deux fonctions qui illustrent le cas où les radicaux sont situés au dénominateur qui n'était pas présent dans l'exercice 3. Le travail de la technique sera ensuite repris à deux reprises à travers des

---

[106] Cette étude a lieu à la fin du mois de février lors de l'étude du chapitre "Fonctions, généralités", l'avant dernier chapitre mettant en jeu de l'algèbre. Notons, par ailleurs, que ce type de tâches est à la marge du programme de seconde en vigueur au cours de l'année 1998/1999 et que c'est certainement son expérience d'élève qui l'a conduite à le considérer comme un type de tâches à faire travailler de manière systématique à sa classe.

exercices écrits par Marie : quelques jours après la correction des deux exercices précédents, elle proposera à ses élèves de déterminer l'ensemble de définition des fonctions : $x \longmapsto \sqrt{x}\sqrt{x+3}$ et $x \longmapsto \sqrt{x(x+3)}$, puis une semaine plus tard elle demandera aux élèves d'étudier l'ensemble de définition des fonctions $x \longmapsto |3x+7|-2$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2-x}$, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$ et $x \longmapsto \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-9}$. Ceci illustre deux autres caractéristiques du travail technique proposé par Marie : en général, une technique associée à une tâche particulière n'est pas uniquement travaillée sur un seul spécimen et le travail technique proposé est relativement étalé dans le temps. Notons toutefois que, pour ce type de tâches, ce travail systématique et important de la technique est totalement en rupture avec l'esprit des programmes de seconde.

Une comparaison du travail technique proposé par Marie et de celui proposé par Benjamin montre, donc, le même souci de proposer un nombre non négligeable de spécimens pour chacun des types de tâches étudiés et de proposer une complexification progressive de ce travail en jouant sur différentes variables didactiques. Cette comparaison fait aussi apparaître des différences : d'une manière générale, le nombre de spécimens travaillés est plus important chez Marie que chez Benjamin et elle recherche une exhaustivité technique ce qui se traduit, en particulier, par une proposition pour chacun des types de tâches étudiés d'exemples de spécimens particulièrement complexes pour un élève de seconde, ce que Benjamin ne fait pas.

L'étude comparative des profils de Benjamin et Marie met également en évidence des comportements proches lorsqu'il s'agit d'aider les élèves à s'approprier les techniques étudiées. Nous précisons cette similarité dans la partie suivante.

I.1.3 - L'aide à l'étude des techniques :

A travers l'étude de ce travail technique, nous trouvons donc chez Marie, comme chez Benjamin, le désir d'aider les élèves à s'approprier les différentes techniques étudiées, en débutant le travail technique lors de séances d'exercices en classe. Dans le cas où ce travail débute à la maison, elle a, comme Benjamin, le souci de choisir des exercices simples ou donne des indications pour aider les élèves.

Par ailleurs, comme Benjamin, Marie ne laisse pas de responsabilités aux élèves pour l'élaboration des techniques, mais fonctionne par ostension. Cette caractéristique apparaît notamment lors du travail sur l'étude du signe d'un produit où, après avoir introduit un tableau de signes pour résumer l'étude du signe d'expressions du type ax +b, Marie fait travailler les élèves sur l'étude du signe du produit $(2x + 5)(- x + 3)$ en faisant appliquer une méthode qu'elle leur a fait noter au préalable :

> *Méthode : On détermine dans un même tableau le signe de chaque facteur, puis on applique la règle des signes.*

Nous avions pointé exactement la même démarche lors de l'analyse du chapitre de Benjamin consacré aux inéquations et aux inégalités.

Benjamin et Marie sont donc deux stagiaires exerçant dans des milieux favorables et qui ne rencontrent pas de difficultés particulières avec leurs élèves. Ils ont tous les deux développé, très vite, des stratégies didactiques qui ont des points communs évidents : des cohérences dans l'élaboration des cours ou le travail des techniques qui apparaissent dès le début de l'année, la volonté de proposer un travail de la technique structuré et progressif, le peu de responsabilité laissé aux élèves lors de l'élaboration des techniques. Cependant, ce sont des stagiaires dont les profils présentent également des différences, que nous précisons dans le paragraphe suivant.

I.2 - Des différences entre Marie et Benjamin :

L'étude de la logique personnelle de Marie met en évidence un premier niveau de différence entre son profil et celui de Benjamin : il apparaît, d'une manière générale, que Marie se questionne beaucoup moins que Benjamin. Nous étudierons cette caractéristique dans les parties I.2.1 et I.2.2.

Par ailleurs, les rapports professionnels à l'algèbre de ces deux stagiaires diffèrent dans la vision des difficultés rencontrées par les élèves (cf. partie I.2.3), dans la réflexion menée sur la question du sens (I.2.4) et dans le développement de l'algèbre en tant qu'outil (I.2.5).

I.2.1 - De plus grandes certitudes :

Marie semble, dès le début de l'année, avoir plus de certitudes que Benjamin. Dès le premier entretien, elle semble ainsi assez sûre d'elle : par exemple, elle nous y explique qu'elle ne se pose pas particulièrement de questions relativement à l'enseignement de l'algèbre. Ceci apparaît, aussi, dans la construction de sa progression annuelle pour laquelle, contrairement à la majorité des stagiaires suivis, elle se détache du manuel de la classe en choisissant une progression différente et ne s'appuie visiblement pas non plus sur celle de son conseiller pédagogique. Pour cette élaboration, Marie ne le rencontrera que pour lui poser des questions précises au sujet de son projet déjà défini (elle avait besoin d'aide pour déterminer le temps à passer sur chaque partie de la progression).

Par ailleurs, au début de l'année, Marie se montre plus autonome par rapport à la formation didactique dispensée à l'IUFM. Elle n'est pas convaincue que certains aspects de la formation soient vraiment utiles pour enseigner. Et, même si elle nous dit que ce qui a été fait dans la deuxième séance, consacrée à l'étude d'un ensemble d'exercices d'algèbre pouvant être proposés en module, lui a semblé plus adapté que le reste de la formation didactique en général, elle prend visiblement ses décisions en dehors de ce qui est travaillé en formation. En effet, elle n'a pas pris en compte ce qui a été étudié au cours de cette séance dans l'organisation de son enseignement en algèbre, comme nous le verrons par la suite. De plus, rappelons qu'à la fin de cette séance, les formateurs ont demandé aux stagiaires d'écrire une fiche de modules qu'ils proposeraient à leur classe. L'étude de la fiche et du cahier de bord de Marie montre que cette fiche a juste été fabriquée pour être rendue aux formateurs et qu'elle ne l'a pas utilisée dans sa classe. Donc, tout comme ses élèves, Marie se montre docile vis-à-vis de la formation, même si elle n'en perçoit pas bien l'utilité. Mais elle ne cherche pas à en tirer parti dans son enseignement.

I.2.2 - Une posture moins réflexive :

Au cours des entretiens, Marie se montre en fait beaucoup plus discrète que Benjamin et est nettement moins loquace que lui. En outre, contrairement à Benjamin, elle ne s'approprie pas le cahier de bord comme un outil de réflexion sur ses pratiques : nous n'y trouvons que le déroulement temporel de chaque séance et les références des exercices proposés aux élèves. D'une manière générale, elle semble d'ailleurs se poser moins de questions que lui et paraît moins encline que lui à réfléchir sur ses pratiques : nous avons pu constater, à travers les trois entretiens, que, dès que nos questions dépassaient la simple description de ses pratiques et nécessitaient plus de réflexion, elle restait souvent bloquée.

Passons maintenant à la vision des difficultés des élèves que Marie a développée au cours de sa première année d'enseignement.

I.2.3 - Une moins grande sensibilité aux difficultés des élèves :

Une différence peut être notée quant à l'attention portée aux difficultés des élèves qui semble moins grande chez Marie : dans les trois entretiens, elle ne sera jamais aussi précise que Benjamin dans ses descriptions. Certes, elle signale dès le premier entretien que certains de ses élèves rencontrent des difficultés en algèbre, mais cela ne semble pas avoir trop perturbé son enseignement puisqu'elle nous expliquera à la fin de l'entretien qu'elle est globalement satisfaite de ce qui s'est passé lors du travail en algèbre et qu'il n'y a que de "petites choses" qui n'ont pas marché. Tout au long des trois entretiens, Marie signalera quelques difficultés que ses élèves ont rencontré (difficultés à conclure lorsqu'ils aboutissent à une équation du type $0x = a$, difficultés à interpréter un tableau de signes, difficultés avec les valeurs absolues...), mais cela ne semble concerner qu'une minorité de ses élèves et c'est peut-être pour cette raison que Marie ne se questionne pas plus profondément sur l'interprétation et la prise en charge de ces difficultés. Elle interprète, ainsi, les quelques difficultés de manipulation qu'elle signale lors du premier entretien comme des difficultés dues au fait que ses élèves ne connaissent pas les formules à appliquer. La stratégie de prise en charge qu'elle met en place en début d'année est alors de reprendre les formules, de redonner une tâche semblable à exécuter ou de réexpliquer.

Néanmoins, au cours de l'année, Marie va repérer deux difficultés particulières qui la poussent à s'interroger sur ses pratiques. Elle rencontre la première dans le premier chapitre consacré à l'algèbre, lors du travail sur des équations avec des inconnues au dénominateur du type : $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x}$, pour lesquelles les élèves doivent réduire au même dénominateur des expressions rationnelles ; elle repère alors que les élèves ne distribuent pas le signe moins quand il se trouve devant un trait de fraction. Lors du premier entretien, elle nous explique que ses élèves faisaient toujours l'erreur même après qu'elle ait "rabâché" la règle à appliquer et nous fait part de son impuissance devant cette difficulté :

> M : Je crois que je pourrais en faire dix, il y aurait toujours les mêmes erreurs de toute façon. Pour ceux qui font cette erreur, je ne sais pas comment faire...

Or, lors de la séance de formation IUFM sur les modules en algèbre, les stagiaires avaient analysé un exercice où étaient présentés des exemples d'erreurs lors de manipulation d'expressions rationnelles :

Quelles sont les expressions égales à $a - \frac{b-c}{b}$ *?*				
1) $\frac{ab-b-c}{b}$	2) $a+c$	3) $\frac{ab-b+c}{b}$	4) $ab-(b-c)$	5) $a-1+\frac{c}{b}$

Rappelons que, lors de cette analyse, les stagiaires avaient identifié différentes difficultés susceptibles d'être rencontrées par un élève de seconde (dont celle mentionnée par Marie) et qu'ils avaient, alors, abordé la gestion possible de cet exercice et les moyens de vérification à la disposition des élèves. Lors de la discussion sur ce dernier point, ils avaient alors évoqué, entre autres possibilités, celle de faire des substitutions numériques pour tester les égalités.

La séance de formation avait eu lieu avant que Marie ne rencontre la difficulté mentionnée ci-dessus, mais ce travail n'a visiblement pas eu d'influence sur elle, lorsque elle a dû prendre en charge ce problème. Lors du premier entretien, nous l'avons alors conduite à évoquer cette séance de formation, à la discussion liée à l'exercice ci-dessus, aux moyens alors envisagés pour prendre en charge ce type d'erreur et, en particulier, au fait que la substitution numérique permet parfois d'aider les élèves à donner du sens aux écritures algébriques.

Il semble que c'est suite à cette discussion que Marie développera une nouvelle stratégie de prise en charge des difficultés des élèves qui consiste à donner des exemples numériques, comme elle nous l'explique lors du troisième entretien :

> M : Finalement on se rend compte que pour ça[107] ou pour d'autres domaines, souvent il faut leur donner un exemple numérique. Cela, au début, je ne l'ai pas fait. Je l'ai fait après. C'est vrai que cela avait bien marché.

La deuxième difficulté a été rencontrée lors du travail sur les valeurs absolues : lors du devoir surveillé portant sur cette notion, Marie se rend compte que des élèves manipulent la notation comme s'il s'agissait de parenthèses et elle les soupçonne de ne pas donner de sens à la notion, comme elle nous l'explique lors du deuxième entretien :

> M : Je crois qu'ils ne se rendent pas vraiment compte de ce qu'est la valeur absolue, finalement. Sur des exercices techniques, comme on fait souvent les mêmes, ils reprennent la méthode, ça va. Mais, dans le fond, est-ce qu'ils ont vraiment compris le sens ? Je ne sais pas.

Une telle constatation aurait pu l'amener, à ce moment de l'année, à s'interroger sur les limites du travail technique qu'elle propose, sur le sens que les élèves donnent aux écritures algébriques et sur le travail à mener pour les aider à le construire. Mais elle ne semble pas pousser plus loin cette réflexion car elle paraît rassurée par le fait que même des enseignants experts rencontrent également des difficultés lors de l'enseignement de cette notion :

> M : J'en parlais avec les autres professeurs du lycée. C'est un peu ce qu'ils disaient aussi. La notion de valeur absolue, c'est quelque chose de difficile pour eux.

Par ailleurs, son conseiller pédagogique ne traite ce chapitre que s'il en a le temps parce qu'il considère que les élèves n'utilisent jamais cette notion. De ce fait, elle ne semble pas considérer ce chapitre comme crucial.

Il apparaît donc dans cette partie que Marie s'est visiblement moins interrogée que Benjamin sur les difficultés rencontrées par ses élèves et les prises en charge envisageables. Cette différence de posture se retrouve en ce qui concerne la réflexion sur la question du sens en algèbre. Nous étudions ce point dans la partie suivante.

I.2.4 - Une moins grande sensibilité à la question du sens en algèbre :

La discussion autour de la notion de valeur absolue est, en fait, le seul moment de l'année où Marie évoque explicitement une réflexion relative au sens que ses élèves peuvent

---

[107] Marie fait ici référence aux tableaux de signes.

donner à des écritures algébriques. Pourtant, comme chez Benjamin, nous notons dans la pratique de Marie des gestes qui pourraient contribuer à aider les élèves à donner du sens aux notions étudiées, mais sa sensibilité à l'aide qu'elle peut apporter aux élèves pour la construction du sens pour les notions étudiées est moindre que celle de Benjamin.

Certes, comme nous l'avons pointé ci-dessus, elle semble avoir le souci d'aider ses élèves à donner du sens à certaines notions nouvelles en organisant, comme Benjamin, des activités introductrices, ou encore à s'approprier les règles de calcul en proposant immédiatement des études de tâches mathématiques les mettant en jeu. Elle a également la volonté de revenir sur les définitions de notions déjà rencontrées (solution d'une équation, système d'équations par exemple) ou de types de tâches anciens (factoriser une expression littérale, par exemple). Mais, contrairement à Benjamin[108], tout ceci reste au niveau du discours. En effet, le travail algébrique est quasiment exclusivement axé sur l'application de règles de calcul et Marie ne semble pas s'interroger sur le sens que les élèves peuvent donner aux notions travaillées. En fait, au cours de l'année, elle ne proposera qu'un seul exercice qui pourrait aider les élèves à travailler sur le sens des écritures algébriques à travers une réflexion sur l'utilité des différentes formes d'une telle écriture :

> *Ex n°87 p 46 :*
>
> *On considère la fonction P définie sur IR par $P(x) = (2x + 7)(x - 1) - 4(x - 1)$.*
>
> *1 – Factoriser P(x).*
>
> *2 – Développer P(x).*
>
> *3 – On dispose désormais de trois expressions différentes pour P(x). Indiquer l'expression utilisée pour répondre aux questions suivantes :*
>
> *a – Résoudre l'équation $P(x) = 0$.*
>
> *b - Calculer P(x) pour $x = 0$*
>
> *c - Calculer P(x) pour $x = -\frac{3}{2}$*
>
> *d - Calculer P(x) pour $x = \sqrt{3}$*
>
> *e - Résoudre $P(x) = -4x + 4$*

Rappelons qu'au cours de la deuxième demi-journée de formation didactique consacrée à l'algèbre, les stagiaires du sous-groupe ont analysé un exercice semblable à celui-ci (cf. l'annexe 10). Dans la mesure où Marie a proposé un exercice de ce type dans la fiche de module rendue aux formateurs suite à cette séance, nous pouvons faire l'hypothèse d'une relative influence de la formation sur le choix de cet exercice. Mais elle ne suffira pas à amener Marie à réfléchir davantage sur la question du sens en algèbre.

L'étude des stratégies d'enseignement élaborées par Marie montre bien la prédominance d'exercices mettant en jeu l'algèbre dans sa dimension objet. Il s'avère que cette stagiaire ne voit visiblement pas l'intérêt de proposer des problèmes faisant intervenir sa dimension outil. Nous le précisons dans le paragraphe suivant.

I.2.5 - Une vision de l'algèbre centrée sur sa dimension objet :

Comme nous l'avons souligné lors de l'analyse de ses pratiques, Benjamin considère, en début d'année, que l'appropriation des notions en algèbre passe par un enseignement de

---

[108] Par exemple pour la notion de solution d'une équation, Benjamin a proposé à ses élèves des exercices pouvant contribuer à un changement de rapport des élèves à cette notion.

l'algèbre comme outil de résolution de certains problèmes. Malgré cette conception, nous avons pu relever qu'en dehors de la résolution de problèmes à l'aide d'équations il n'a pas su vraiment faire vivre dans sa classe une articulation entre les dimensions outil et objet de l'algèbre.

La vision initiale de Marie sur l'utilisation de l'algèbre est différente : elle pense, au contraire, que le travail sur des problèmes complexifie le travail de l'élève et que l'on ne peut envisager de tels problèmes avant une réelle maîtrise des techniques de calculs, comme elle nous l'explique au sujet des systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues, lors du deuxième entretien :

> M : Je n'ai pas fait de problèmes.[...] Je ne voulais pas ajouter une difficulté supplémentaire. En général, sur les systèmes d'équations simples ce n'est pas tellement gênant, ils ont la technique. Mais là, déjà, la technique n'était pas bien comprise. Donc je trouvais que rajouter une difficulté supplémentaire, c'était pas judicieux...

Tout au long de l'année, elle ne proposera que dix problèmes (placés en fin de chapitre, après le travail des techniques) où l'algèbre apparaîtra en tant qu'outil, dans lesquels la principale fonctionnalité mise en jeu sera l'utilisation d'équations ou d'inéquations pour la résolution[109]. Par ailleurs, lors du chapitre sur les fonctions, Marie ne fera rencontrer qu'une seule situation géométrique à modéliser à l'aide de fonctions affines. Nous avons réellement la sensation que Marie ne trouve pas un grand intérêt à la résolution de tels problèmes, mais qu'elle en propose pour être en concordance avec les programmes.

En conclusion de cette première partie, nous pouvons pointer que Marie est une stagiaire qui évolue dans un contexte favorable et qui, dès la rentrée, s'est installée dans une posture d'enseignante. L'étude de ses pratiques en algèbre montre la mise en place très rapide de stratégies cohérentes qui conduisent visiblement à une atmosphère de travail agréable et qui ont l'adhésion de la classe. Ses stratégies possèdent des points forts comme l'organisation du travail technique, le temps laissé aux élèves pour ce travail. Mais, elles présentent aussi des faiblesses évidentes : le travail algébrique quasiment uniquement centré sur l'application de techniques avec peu de réflexion sur le sens que les élèves peuvent donner à ce type de travail, le peu de questionnement sur les difficultés qu'ils peuvent rencontrer en algèbre, le peu de responsabilités laissées aux élèves en ce qui concerne l'élaboration de techniques, le déséquilibre entre l'attention portée respectivement aux dimensions outil et objet de l'algèbre.

Nous avons noté, dans le chapitre précédent, que l'attitude réflexive de Benjamin l'avait conduit à différents questionnements, même s'ils n'avaient pas tous influé sur ses pratiques. Tout en étant moins encline que Benjamin à s'interroger sur ses pratiques, Marie va, elle aussi, questionner certains gestes professionnels, ce qui va conduire à quelques évolutions décrites dans le paragraphe suivant.

---

[109] En fait lors du premier entretien et du dernier, nous l'avons interrogée sur sa vision relative aux fonctionnalités de l'algèbre et il s'est avéré que cette vision est restée centrée autour de l'utilisation des équations pour résoudre des problèmes.

I.3 - Les évolutions repérées :

L'étude des stratégies d'enseignement de Marie fait apparaître deux évolutions dans l'année : la première relative à l'introduction d'activités préparatoires pour l'introduction de notions nouvelles, la seconde relative à l'organisation du travail des techniques. Nous les présenterons dans les parties I.3.1 et I.3.2.

L'analyse des entretiens de suivis met en évidence, quant à elle, deux questionnements (l'un sur texte du savoir, l'autre sur les exercices à proposer) qui, en fait, n'influeront pas sur les pratiques de Marie, comme nous le verrons dans les paragraphes I.3.3 et I.3.4.

I.3.1 - L'introduction d'activités préparatoires :

Comme nous l'avons pointé précédemment, en début d'année, Marie n'a jamais proposé d'activité préparatoire pour le travail sur les objets anciens : elle abordait toute étude directement à partir d'un cours. Puis, progressivement, elle a commencé à proposer des activités de découverte pour l'introduction de notions nouvelles. C'est visiblement la prise en compte d'un conseil de son tuteur qui l'a conduite à choisir cette nouvelle stratégie, comme elle nous l'explique dans le troisième entretien :

> M : En fait, au début de l'année, je ne faisais pas d'activités préparatoires. Et là, c'est un conseil de mon tuteur. Ce n'était pas en algèbre, c'était en géométrie. Il m'avait dit que c'était beaucoup mieux d'essayer d'amener les élèves à la notion. Et c'est vrai que je l'ai fait après le mois de décembre ou janvier, parce qu'il est venu assez tard. C'est quelque chose que je ferai plus facilement.

L'introduction des activités semble donc se faire ici par contrat et, même si Marie explique qu'elle en proposera plus facilement, elle ne semble pas convaincue du bénéfice que ce type de stratégie apporte :

> M : Le problème des activités préparatoires c'est... Enfin, j'ai l'impression que cela prend beaucoup de temps à mettre en place et j'ai l'impression de perdre du temps.

Ce sentiment de perte de temps s'explique sans doute aussi par le fait que Marie ne semble pas s'être interrogée suffisamment sur l'articulation entre le cours et les activités. En effet, lorsque Marie introduit une activité préparatoire, le lien entre cette activité et le cours est rarement visible. Ce phénomène apparaît clairement au début du chapitre de généralités sur les fonctions. En effet, pour introduire la notion de fonction, Marie s'est appuyée sur une activité tirée de son manuel dans laquelle une situation concrète est décrite par un graphique qui représente l'altitude d'un deltaplane en fonction du temps. Les types de tâches rencontrés dans cette activité : la détermination d'images et d'antécédents, sont donc traités uniquement dans le cadre graphique. Suite à cette activité, Marie commence son cours par la définition de la notion de fonction, d'image et d'antécédent et présente des exemples de fonctions et des spécimens des types de tâches "déterminer une image, un antécédent". Or, dans le cours, contrairement à ce qui a été fait dans l'activité, les exemples se placent dans le cadre algébrique. Marie n'y fera aucune allusion à l'activité traitée auparavant et ne proposera aucune illustration graphique des notions d'image et d'antécédent. Il apparaît donc clairement ici une non-articulation entre l'activité et le cours[110].

[110] Notons que cette caractéristique apparaît également dans le cours sur les valeurs absolues.

I.3.2 - Une évolution subtile dans l'organisation du travail technique :

Tout comme pour Benjamin, nous notons également une évolution subtile en ce qui concerne l'étalement dans le temps du travail technique associé à un type de tâches particulier. Alors qu'en début d'année, il était centralisé sur quelques jours, en fin d'année, ce travail est plus étalé et un type de tâches particulier peut être repris plusieurs fois dans le chapitre où il a été étudié. Ceci est, par exemple, le cas pour le type de tâches "déterminer l'ensemble de définition d'une fonction", que nous avons déjà évoqué dans la partie I.1.2., et qui sera repris plusieurs fois au cours du chapitre sur les généralités sur les fonctions.

Venons-en maintenant à deux points sur lesquels Marie s'est interrogée au cours de son stage en responsabilité.

I.3.3 - Un questionnement sur le texte du savoir :

Un questionnement relatif à sa façon de concevoir les cours émergera lors du deuxième entretien lors duquel Marie regrette que le début de son cours sur les systèmes d'équations linéaires soit trop théorique. Pour ce chapitre, Marie commence, en fait, directement par un cours dans lequel elle consacre un premier paragraphe à la redéfinition des notions d'équation à deux inconnues, de système linéaire de deux équations à deux inconnues, de solution d'un tel système et le type de tâches "résoudre un système de deux équations à deux inconnues". Au cours de ce paragraphe, elle ne fournit qu'un seul exemple : un couple de nombres solution d'un système donné. Puis, elle aborde dans un deuxième paragraphe la question de l'interprétation graphique et le théorème concernant l'existence et l'unicité des solutions de tels systèmes. Pour cette partie, tout se fait également de manière théorique sans aucun exemple comme le montre l'extrait de son cours ci-dessous :

II – Etude graphique :

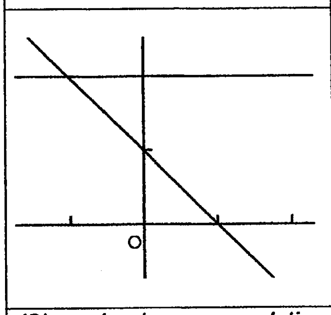
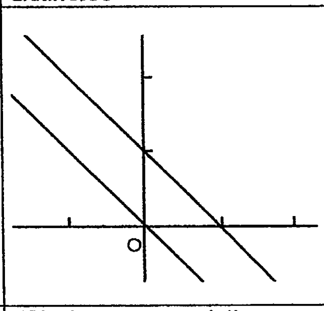
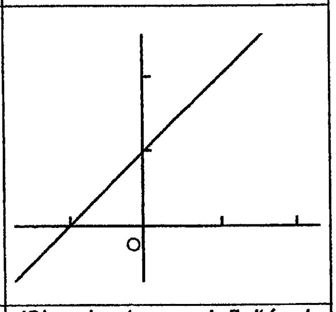
Soit (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Soit d la droite d'équation $ax + by - c = 0$

Soit d' la droite d'équation $a'x + b'y - c' = 0$

Dire qu'un couple (x ; y) est solution de (S) signifie que le point M(x ; y) appartient à la fois à la droite d et à la droite d'.

3 cas sont possibles :

d et d' sont sécantes	*d et d' sont parallèles et distinctes*	*d et d' sont confondues*
		
(S) admet une solution unique	*(S) n'a aucune solution*	*(S) admet une infinité de solutions*
$ab' - a'b \neq 0$	$ab' - a'b = 0$	$ab' - a'b = 0$

Pour résoudre un système, on commence par calculer le réel ab' – a'b, appelé déterminant du système (S), on le note $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

<u>Théorème :</u> Soit (S) le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Si ab' – a'b ≠ 0, (S) admet une unique solution.

Si ab' – a'b = 0, (S) n'a pas de solution ou (S) admet une infinité de solutions.

Au cours du deuxième entretien, Marie nous explique qu'après avoir traité ce chapitre, elle s'est interrogée sur l'intérêt d'un tel cours pour ses élèves :

M : Mais si cela était à refaire, je pense que je ferais un cours moins théorique, plus ciblé sur des exemples. Disons que quand j'ai écrit tout ça... Bon, ils sont gentils parce qu'ils recopient ce que je fais. Mais je n'ai pas eu l'impression que cela serve à grand-chose. Est-ce qu'ils ont vraiment compris ce qu'on a fait ? Je ne sais pas non plus.

Malgré cette interrogation, nous retrouvons la même caractéristique dans certains paragraphes du cours sur les fonctions qui a lieu pratiquement deux mois après celui sur les systèmes, notamment dans le paragraphe consacré au sens de variation d'une fonction (que nous avons déjà évoqué dans la partie I.1.1.) où Marie propose une accumulation de définitions qu'il n'est pas forcément nécessaire d'institutionnaliser, sans motivation, en classe de seconde. Mais, comme le montre la citation précédente, le comportement de ses élèves ("ils sont gentils") ne contribue pas à la pousser à modifier ses pratiques.

Marie est tout à fait consciente de cette caractéristique de ses pratiques puisque, dans le deuxième entretien, elle nous expliquera aussi :

M : Là, j'ai refait l'erreur finalement. Tout ce qui est notion de croissance, décroissance, cela parait... Même si je m'étais fort appuyée sur l'activité où je leur avais fait déduire que là cela montait donc la fonction était croissante. On avait pris deux réels dans un intervalle, on voyait que leurs images étaient rangées dans le même ordre et donc on a écrit cela dans le cours. Finalement dans le cours c'est finalement assez théorique, cela a été assez long.[...] Mais je ne voyais pas comment l'amener autrement. Pour moi il fallait quand même que ces définitions soient écrites quelque part.

Nous voyons bien ici l'importance qu'elle accorde au fait de proposer à ses élèves un texte du savoir rigoureux et complet. Et même si elle s'est interrogée sur l'intérêt d'un tel texte, le comportement de la classe dans laquelle elle exerce ne l'a pas amenée à évoluer au cours de l'année.

L'analyse des pratiques de Marie nous a également conduite à pointer un deuxième questionnement, qui n'a également pas influé sur ses pratiques. Nous le présentons ci-après.

I.3.4 - Un questionnement sur le type d'exercices à proposer :

Cette année de stage va également la conduire à un questionnement sur le choix des exercices à proposer. Il apparaît dès le premier entretien pendant lequel Marie s'interroge sur la forme des exercices proposés jusqu'alors en algèbre :

M : Dans les exercices que je donne, c'est souvent un petit peu la même chose. Des exercices d'application. Il faudrait peut-être que je varie un peu plus. Et puis, éventuellement, donner des exercices un peu plus de recherche.

Le seul moment où elle a l'impression d'avoir donné un autre type d'exercices se situe lors d'une séance de module consacrée à la mise en équation de problèmes.

Malgré cette interrogation qui est présente assez tôt dans l'année et l'existence d'au moins un moment dans l'année qui aurait pu conduire à une réflexion sur le sens que les élèves peuvent construire à travers un travail algébrique centré sur la technique (cf. les interrogations de Marie sur le sens que les élèves donnent à la notation de la valeur absolue, page 193), le type d'exercices restera globalement le même jusqu'à la fin de l'année. Par ailleurs, à la fin de l'année, lorsque nous lui demandons les conseils qu'elle donnerait à un enseignant débutant, elle nous répond notamment : "choisir des exercices variés". Il semble qu'à ce moment, elle fait plus référence à une variété au niveau de la forme des exercices qu'à une variété au niveau du contenu, puisque, lorsque nous lui demandons de préciser cette réponse, elle prend comme exemple l'exercice suivant, présenté dans la fiche de module étudiée lors de la deuxième séance de didactique :

Quelles sont les expressions égales à $a - \frac{b-c}{b}$ *?*

1) $\frac{ab-b-c}{b}$ *2)* $a+c$ *3)* $\frac{ab-b+c}{b}$ *4)* $ab-(b-c)$ *5)* $a-1+\frac{c}{b}$

Nous comprenons alors que c'est la présentation sous forme de QCM, lui semblant originale, qui l'a intéressée.

Ce questionnement sur le type d'exercices que l'on peut proposer en algèbre est donc resté présent tout au long de l'année, mais n'a pas conduit à une modification des premières pratiques de Marie. Outre le fait que le travail proposé semblait tout à fait convenir à ses élèves[111] et conduisait à un climat tout à fait agréable dans la classe, plusieurs raisons peuvent expliquer que ses pratiques n'aient pas évolué. Une première raison est que Marie semble avoir calqué sa pratique sur celle de son conseiller pédagogique, comme elle nous l'explique dans le dernier entretien :

> M : C'est-à-dire que mon CP faisait finalement des cours très classiques et, au niveau des modules, il ne faisait pas de choses particulières. En fait, c'était comme une heure de TD. Du coup, j'ai fait un peu la même chose et je crois que finalement, dans les modules, c'est toujours pas mal de faire des exercices différents des exercices habituels. Bon mais c'est toujours pareil cela prend du temps.

La deuxième raison apparaît également à travers cette citation : tout au long de l'année, Marie a eu l'impression que certains exercices allaient lui faire perdre du temps. Elle ne voit donc pas, comme pour les activités, l'intérêt d'en proposer. Par ailleurs, certains problèmes sortant de l'ordinaire lui semblaient trop compliqués pour ses élèves et, au cours de cette année de stage, elle s'est finalement aperçue qu'elle avait eu tendance à sous-estimer leurs compétences :

> M : Ce qui est peut-être un tort c'est que j'avais tendance, enfin pas partout, à les sous-estimer. Je vous dis pour la modélisation, je me disais : "Non, je ne vais pas leur donner cela car ils ne trouveront jamais". Et des fois j'étais surprise. Quand je leur donnais un exercice qui me semblait difficile, ils y arrivaient.

[111] Lors du dernier entretien, Marie nous explique : " Cette année, mes élèves étaient contents de ce qu'ils ont fait avec moi et c'est aussi un peu ce qu'ils attendaient, j'ai l'impression."

Une autre raison est que Marie trouvait que certains de ces exercices étaient parfois difficiles et qu'elle ne savait pas toujours comment aider ses élèves, notamment pour les problèmes conduisant à des modélisations. Elle nous l'explique lors du troisième entretien :

M : C'est vrai que, quand il y a une modélisation, pour certains exercices c'est facile à expliquer. Mais, pour certains exercices, je ne vois pas comment leur dire, comment leur expliquer qu'on arrive à telle fonction. Pour ceux qui y arrivent c'est bien, mais pour ceux qui ne trouvent pas cela pose un problème.

Enfin, Marie évoquera en fin d'année la difficulté à trouver des exercices différents et notera l'existence de peu d'exercices de ce type dans les manuels. L'analyse du Dimathème met pourtant en évidence la volonté des auteurs de proposer d'une part des exercices relatifs à la dimension objet de l'algèbre (permettant le travail des techniques de calcul[112], l'articulation de différents registres sémiotiques, une réflexion sur le sens de certaines manipulations et écritures algébriques) et d'autre part des exercices qui mettent en jeu l'algèbre comme outil avec une variété au niveau des fonctionnalités proposées (bien évidemment l'utilisation des équations et des inéquations pour modéliser des situations, mais aussi des utilisations non exploitées par Marie : l'algèbre comme outil de généralisation à travers un travail sur des formules, l'algèbre comme outil pour prouver des propriétés numériques).

En fin de stage, il semble cependant que la vision de Marie sur les exercices que l'on peut proposer en algèbre ait quelque peu bougé. En effet, en fin d'année, nous lui avons demandé de sélectionner des exercices que l'on pourrait placer dans un test d'évaluation des compétences en algèbre d'un élève à l'entrée de la classe de seconde[113]. Marie s'appuie, alors, sur des ressources didactiques qu'elle n'a pas encore utilisées pour préparer ses cours (la feuille d'exercices de module travaillée en formation IUFM en début d'année, des livrets d'évaluation qui lui ont été distribués au lycée). Elle propose sept exercices. Les quatre premiers sont centrés autour de la dimension objet de l'algèbre. Deux d'entre eux sont relatifs à la manipulation d'écritures numériques et algébriques et sont présentés sous forme de QCM, comme dans les exemples suivants :

Exercice 1 :

Pour chaque réponse, entourer la réponse qui convient :

- $\sqrt{6^2+8^2}$ *est égal à :*

$100 \qquad 14 \qquad \sqrt{28} \qquad 70 \qquad 10$ *aucune réponse ne convient.*

- $\dfrac{9+2a}{9+b}$ *est égal à :*

$\dfrac{2a}{b} \qquad \dfrac{11a}{11b} \qquad 1+\dfrac{2a}{b} \qquad \dfrac{1+2a}{1+b} \qquad 2a-b$ *aucune réponse ne convient.*

Exercice 3 :

- $(2x-1)^2$ *est égal à :*

[112] Avec la possibilité de complexifier progressivement, que Marie a largement exploitée tout au long de l'année.

[113] Lors de notre première année d'expérimentations (1998/1999), nous avons demandé, en fin d'année, à tous les stagiaires suivis individuellement de construire un test qui permettrait d'évaluer les compétences en algèbre en début de seconde, le but étant de recueillir des informations sur leurs priorités, en fin de stage, et de les comparer avec celles repérées lors de l'analyse de leurs pratiques tout au long de l'année. Mais ce dispositif n'a pas été reconduit l'année suivante. En effet, la mise en place du dispositif vidéo, en 1999/2000, a demandé un investissement personnel important à chacun des cinq stagiaires impliqués : en moins d'un mois, nous avons rencontré trois fois chacun d'entre eux. Nous n'avons pas souhaité leur imposer une autre charge de travail.

$4x^2 - 4x + 1$	$2x^2 - 4x + 1$	$2x^2 - 2x + 1$
• *Si* $x = -2$, *alors* $5x^2 + 3x - 7$ *est égal à*		
-33	19	7

Pour construire ces exercices, Marie s'est inspirée du premier exercice de la fiche analysée lors de la séance de formation sur les modules que nous avons déjà évoqué précédemment, comme elle nous l'explique lors du dernier entretien :

> M : Le premier justement c'était un exercice à choix multiples. Sinon, moi, je n'aurais pas pensé à faire des choses comme ça. C'est avec cet exercice-là que je me suis rendue compte que c'était pas mal de faire ce genre d'exercices.

A travers le choix d'un tel exercice, nous pouvons d'abord noter l'influence tardive de la formation et surtout une évolution dans la vision de la forme des exercices. Par ailleurs, la discussion autour de cet exercice a fait apparaître que, même si l'analyse des pratiques de Marie, au cours de son année de stage, a montré un moins grand questionnement que Benjamin quant aux difficultés des élèves en algèbre, elle a repéré au cours de l'année un grand nombre de difficultés de manipulation répertoriées dans différentes recherches didactiques qu'elle prend en compte ici pour écrire les différents items proposés dans ces deux exercices.

Le deuxième exercice est du type de ceux que ses élèves ont eus à traiter au cours de l'année. Dans cet exercice, Marie sélectionne sept équations à résoudre qu'elle choisit de manière à balayer les différentes compétences exigibles en troisième relatives à cette notion :

> *Exercice n°2 :*
>
> *Résoudre les équations suivantes :*
>
> $\frac{2}{3}x - 5 = 0$ $\quad \frac{x}{12} = \frac{4}{5}$ $\quad (x + 8)(2x - 3) = 0$ $\quad x^2 = 7$ $\quad x^2 = 0$ $\quad x^2 = -9$

Une évolution dans le contenu des exercices apparaît dans le dernier exercice mettant en jeu la dimension objet de l'algèbre. Il est extrait des évaluations à l'entrée en seconde de septembre 1997 et est centré sur la reconnaissance de formes d'expressions algébriques et la justification de manipulations de telles écritures :

> *$x + 9$ est la somme de deux termes : x et 9.*
> *$x(x + 9)$ est le produit de deux facteurs : x et $x + 9$*
> *$x(x + 9) + x^2$ est la somme de deux termes : $x(x + 9)$ et x^2*
>
> *1° a – Parmi les expressions suivantes entourer celles qui sont écrites sous la forme d'une somme.*
>
> $3x + 4$ $\quad x(x + 1)$ $\quad x(x + 3) - 4$
>
> $x + (x - 1)(x + 2)$ $\quad (x + 1)^2$ $\quad 2x(x - 3) + 3(x - 1)$
>
> *b - Parmi les expressions suivantes entourer celles qui sont écrites sous la forme d'un produit.*
>
> $3x + 4$ $\quad x(x + 1)$ $\quad x(x + 3) - 4$
>
> $x + (x - 1)(x + 2)$ $\quad (x + 1)^2$ $\quad 2x(x - 3) + 3(x - 1)$
>
> *2° Voici quatre égalités remarquables :*
>
> *égalité n°1 :* $ab + ac = a(b + c)$ $\quad$ *égalité n°3 :* $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
>
> *égalité n°2 :* $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $\quad$ *égalité n°4 :* $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
>
> *Les expressions A, B, C et D ci-dessous sont écrites sous la forme d'une somme.*

Ecrire les expressions B, C et D sous la forme d'un produit en indiquant l'égalité utilisée comme dans l'exemple ci-dessous.
Exemple :
$A = x^2 + 3x$. En utilisant l'égalité n°1 cette expression peut s'écrire $A = x(x + 3)$

$B = x^2 + 10x + 25$. En utilisant l'égalité n°... cette expression peut s'écrire :
B = ...
$C = (x + 5)^2 - 4$. En utilisant l'égalité n°... cette expression peut s'écrire :
C = ...
$D = (2x + 1)^2 + (2x +1)(x + 3)$. En utilisant l'égalité n°... cette expression peut s'écrire :
D = ...

L'analyse du travail algébrique proposé par Marie a précédemment montré une faible sensibilité aux problèmes liés au sens que les élèves peuvent rencontrer en algèbre et à l'apport de justifications. Le choix de cet exercice semble montrer une évolution de la vision de Marie relativement à ces deux points. Ceci est confirmé par cet extrait du troisième entretien :

M : Je trouvais qu'il était pas mal parce qu'il oblige à dire quelle factorisation on utilise. Il fait réfléchir sur ça. Il n'y a pas que la factorisation. [...]

AL : En quoi la première partie vous semble-t-elle intéressante ?

M : En fait souvent les élèves ne se rendent pas compte à quoi on aboutit quand on a une factorisation ou un développement. Là ça permet de mettre le point sur le vocabulaire finalement.[...] Je n'avais jamais vu d'exercices comme ça en fait. C'était en feuilletant un jour que je suis tombée dessus. Moi, je n'ai jamais vraiment parlé de produit et de somme. Si, un petit peu dans le cours, mais je ne les ai jamais fait travailler directement sur ça.

Ce type de difficultés que les élèves peuvent rencontrer n'a jamais jusqu'alors été évoqué par Marie. L'évolution de la vision des exercices semble donc résulter d'une évolution de la vision des élèves et de leurs difficultés et d'une sensibilité plus grande aux aides que l'on peut apporter aux élèves pour prendre en charge ces difficultés.

Les trois autres exercices sont consacrés à la dimension outil de l'algèbre. Nous y retrouvons les deux fonctionnalités qu'elle a fait travailler à ses élèves, comme le montre la présentation suivante des deux premiers. Un exercice, très classique, porte ainsi sur l'utilisation des équations pour résoudre un problème :

Christine achète 5 kg de pommes et 4 kg de mandarines pour un prix total de 69,50 F. 1 kg de mandarine coûte 3,20 F de plus qu'un kilogramme de pommes.
Calculer le prix de 1 kg de pommes et de 1 kg de mandarines.

Dans un deuxième exercice, les élèves doivent d'abord modéliser à l'aide de fonctions affines les temps d'un parcours en fonction de sa distance d pour différents moyens de transport. Puis, les représentations graphiques de ces fonctions sont fournies : les élèves ont à retrouver le moyen de transport correspondant à chacune des droites, puis doivent exploiter le graphique pour confirmer ou infirmer des affirmations portant sur les trois modes de transport. Il s'avère que Marie a été particulièrement intéressée par l'articulation du registre des représentations graphiques et celui des écritures algébriques, comme elle le précise dans le troisième entretien :

M : Moi, j'ai beaucoup travaillé : on donne la fonction et on trace la courbe. J'ai fait quelques exercices comme ça et certains ne voient pas ce qu'il faut utiliser pour faire le lien entre les deux. Ils ne voient pas la signification de l'ordonnée à l'origine ou du coefficient directeur. Heureusement, j'en ai fait un donc je me suis rendue compte. Mais, au départ, quand on voit cet exercice-là, on se dit que bon finalement... Et on se rend compte que derrière est cachée la signification du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

De nouveau, nous constatons, ici, la prise en compte de difficultés repérées au cours de l'année réinvestie dans le choix d'exercices à proposer dans ce test d'évaluation.

Enfin le dernier exercice met en jeu une fonctionnalité que Marie n'a jamais évoquée : l'algèbre pour prouver. Elle s'est ici appuyée sur la fiche de module étudiée en formation dans laquelle ce problème figure :

Un élève dit à un autre : "tu choisis un nombre, tu lui ajoutes 2, tu multiplies par 4 le résultat, tu ajoutes le nombre initial, puis tu ajoutes 2, tu divises le résultat par 5, tu retranches 2 et tu trouves le nombre de départ. Ça marche à tous les coups". Qu'en pensez-vous ? Justifier votre réponse.

En fait, la discussion relative à cet exercice, dans le troisième entretien, fait apparaître que Marie l'a choisi parce qu'elle trouvait la modélisation intéressante :

M : Cela permet de voir la signification de quand on parle d'ajouter, multiplier... Et puis ils ont du mal quand il y a toute une suite : "tu ajoutes et tu divises le résultat par 5". Eux, ils vont diviser par 5, mais ils ne vont pas mettre de parenthèses.

Mais, il s'avère qu'elle n'a pas identifié la fonctionnalité de l'algèbre qui y est mise en jeu : elle le considère comme un problème de mise en équation ! Cette vision de l'exercice montre bien la difficulté de certains stagiaires à identifier les différentes utilisations possibles de l'algèbre et la prédominance du monde des équations.

En conclusion, l'évolution de la vision des exercices semble donc résulter d'une évolution de la vision des élèves et de leurs difficultés, ainsi que d'une attention plus grande aux aides que l'on peut leur apporter pour prendre en charge les problèmes rencontrés. Cette évolution peut également résulter d'un questionnement de Marie sur ses futures pratiques. En effet, lors du dernier entretien, Marie sait déjà qu'elle enseignera en collège l'année suivante et elle pense qu'elle ne va pas pouvoir continuer à travailler en algèbre comme elle l'a fait cette année en seconde :

M : Bon, en seconde, on peut encore faire un cours classique, mais au collège on doit être obligé de varier les activités pour intéresser les élèves et leur donner le goût aux mathématiques. Parce que si l'on fait des exercices techniques, ils vont vite en avoir marre. Je pense qu'en seconde on peut... Bon là cette année mes élèves étaient contents de ce qu'ils ont fait avec moi et c'est un peu aussi ce qu'ils attendaient j'ai l'impression. Mais je crois qu'au collège on est obligé vraiment de varier.

Nous retrouvons un aspect que nous avons déjà pointé précédemment : Marie pense que le travail proposé convenait bien à ses élèves, ce qui ne l'a pas obligée à modifier ces pratiques.

I.4 - Conclusion :

Marie est donc une stagiaire qui, comme Benjamin, semble avoir une idée précise de la manière dont elle va accomplir certains gestes professionnels avant de prendre une classe en responsabilité. Leur mise en place lui paraît réussie dès le début de l'année parce que sa classe "tourne". L'étude de ces pratiques fait alors apparaître rapidement des similarités avec le profil de Benjamin : la non-prise d'information sur les connaissances anciennes des élèves, des cohérences dans l'élaboration des cours, un travail des techniques cohérent, se complexifiant progressivement et structuré de manière à favoriser l'appropriation des différentes techniques, des stratégies d'ostension des techniques qui laissent peu de responsabilités aux élèves quant à leur élaboration, un travail essentiellement centré sur la dimension objet de l'algèbre.

La comparaison des deux profils fait aussi apparaître des éléments de logique personnelle différents : Marie est beaucoup moins encline à s'interroger sur sa propre vision de l'algèbre et sur ses pratiques. Par ailleurs, elle paraît moins ouverte que Benjamin et peu sensible à ce que peut lui apporter la formation didactique. Mais, même si elle paraît en début d'année plus autonome que Benjamin, elle s'approprie visiblement les conseils d'enseignants experts (son tuteur en ce qui concerne l'introduction des activités, ou de nous-même pour l'utilisation d'exemples numériques pour prendre en charge certaines difficultés) et s'approprie également certaines de leurs pratiques (elle a ainsi calqué sa pratique de choix des exercices sur celle de son conseiller pédagogique). Mais, contrairement à Benjamin, elle ne prend pas de recul et ne semble pas questionner ces conseils et ces exemples (le discours qu'elle tient sur les activités préparatoires le montre bien). Alors que nous avions pointé que la conception du métier de professeur de mathématiques de Benjamin s'approchait du modèle de "l'enseignant professionnel, praticien-réféchi" proposé par M.Altet (cf. chapitre I), celle de Marie paraît plus proche du modèle "technicien", dans lequel la formation au métier se fait par apprentissage imitatif.

Il s'avère également que Marie s'est moins questionnée que Benjamin sur certaines questions plus spécifiques à l'algèbre. En effet, même si l'étude du test, destiné à tester les compétences algébriques d'un élève en début de seconde, élaboré en fin d'année montre que Marie a repéré des erreurs très précises concernant la manipulation d'écritures algébriques ou liées à l'articulation de divers registres sémiotiques, l'analyse des entretiens de suivi a montré qu'elle s'est en fait peu questionnée sur l'interprétation et la prise en charge des différentes difficultés rencontrées au cours de l'année. Ceci constitue une différence remarquable avec le profil de Benjamin.

Par ailleurs, nous avons également noté que Marie s'est montrée moins sensible à la question du sens en algèbre. Or, nous l'avons vu, la sensibilité à cette question chez Benjamin peut s'expliquer, en partie, par la prise en compte d'éléments issus de l'analyse menée lors de la deuxième séance de formation en didactique de l'algèbre. Le fait que Marie n'ait pas forcément apprécié l'utilité de cette formation explique peut-être cette autre différence au niveau des deux profils. Enfin, sa vision de l'utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes ne l'a pas aidée à concevoir une articulation des dimensions outil et objet de ce domaine des mathématiques qui peut contribuer, nous l'avons vu, à amener les élèves à donner du sens aux notions étudiées.

Enfin, comme nous l'avons pointé à plusieurs reprises lors de l'analyse, Marie a su instaurer dans sa classe une atmosphère de travail confortable pour elle et pour les élèves. L'étude des deux questionnements qui sont apparus en cours d'année mais qui n'ont pas influé sur ses pratiques montre bien que le comportement de ses élèves ne l'a pas poussée à modifier ses pratiques, même si elle n'était pas forcément satisfaite de certaines d'entre elles. On peut alors se demander comment aurait évolué son rapport professionnel à l'algèbre dans des conditions moins favorables.

L'étude des pratiques de Julien, qui a connu des débuts bien plus difficiles que Benjamin et Marie, va montrer que les conditions de travail peuvent effectivement jouer un rôle sur l'évolution de ce rapport professionnel.

II - LE PROFIL DE JULIEN :

Julien a suivi un DEUG et une licence de mathématiques à l'université, puis a obtenu son CAPES après une année de préparation. C'est une personne qui semble vraiment aimer les mathématiques : au cours de la préparation au CAPES, il s'est ainsi montré très ouvert et très curieux, manifestant une volonté de toujours approfondir le travail qui lui était demandé. Pour lui, faire des mathématiques c'est avant tout raisonner et il apprécie donc plus particulièrement certains domaines qui permettent, à ses yeux, de mener de vrais raisonnements. Il nous l'explique lors du dernier entretien à propos de la géométrie dans l'espace :

> J : J'aime bien la géométrie dans l'espace. C'est bien parce qu'on est toujours en train de donner du sens à ce qu'on fait finalement. Puisqu'on doit raisonner en permanence. C'est le raisonnement qui prime, il n'y a pas grand-chose à savoir. Il faut toujours se demander : qu'est-ce qu'on veut ? Comment on va y arriver ?

Par ailleurs, son ouverture d'esprit l'a conduit à s'intéresser à l'histoire des mathématiques (son mémoire professionnel portera sur l'intégration de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques en classe de seconde) et à des documents didactiques autres que les manuels scolaires, comme nous le verrons au cours de ce portrait.

Lors du premier entretien, soit environ trois mois après la rentrée, Julien nous apparaît désorienté. Il connaît, en fait, un début de stage difficile. Il enseigne dans un lycée technique d'une grande ville, devant une classe de seconde uniquement composée de garçons se destinant à des filières techniques et cette classe lui pose problème. Il rencontre visiblement des difficultés de gestion et de discipline, comme il nous l'explique lors du premier entretien, à propos des séances d'exercices :

> J : Mais, même quand je donne un exercice, il n'y en a que deux ou trois qui vont se mettre à chercher sans que j'aie à passer derrière eux. Mais, tous les autres, il faut que je sois constamment derrière eux. C'est difficile quand même. Quand on est en séance d'exercices et qu'ils ne cherchent pas, on ne sait pas trop quoi faire. Alors après, je reprends avec eux et j'essaie de les faire participer le plus possible. Ils participent assez mais tout en discutant. Il faut que j'arrive à trouver ce qui va le mieux. Mais réussir à avoir le silence total c'est déjà arrivé en TD, quand ils ne sont pas nombreux. Mais c'est rare.

D'une manière générale, Julien estime que ses élèves sont faibles et qu'ils ne sont pas motivés par les mathématiques. Enfin, il se plaint d'un manque de travail de leur part.

Il a choisi de commencer son année par l'enseignement de notions algébriques[114] parce qu'il avait l'impression que c'était un domaine facile à enseigner. A la fin de l'année, il nous expliquera qu'il pensait que cela ne serait pas trop difficile pour ses élèves puisque lui-même

---

[114] Précisons la progression annuelle choisie par Julien pour l'enseignement de l'algèbre : chapitre 1 "Calcul numérique" (période du 11/09/98 au 18/09/98), chapitre 2 "Transformations d'écritures" (du 21/09 au 13/10), chapitre 3 "Les intervalles de $\mathbb{R}$" (du 16/10 au 20/10), chapitre 4 "Fonctions, généralités" (du 16/10 au 13/11), chapitre 5 "Les fonctions affines" (du 4/01/99 au 22/01/99), chapitre 6 "Fonctions usuelles" (du 2/03 au 29/03), chapitre 7 "Inéquations" (du 11/05 au 21/05), chapitre 8 "Les systèmes d'équations" (du 21/05 au 1/06).

n'avait pas rencontré de grosses difficultés avec ce domaine des mathématiques lors de sa scolarité. Le choix de commencer par l'algèbre lui semblait rassurant :

J : Et puis, au début de l'année, il y a aussi le problème que l'on ne sait pas quoi faire. Et avec ça on a vraiment l'impression que cela va être facile. [...] C'est rassurant pour le professeur. Mais on se rend compte que, pas du tout, parce que plein de problèmes se greffent dessus. Mais c'est vrai que c'est rassurant au début de l'année.

En fait, il se rend compte au cours du premier mois d'enseignement que ses élèves rencontrent des difficultés qu'il n'avait absolument pas prévues. Et, lors du premier entretien, il a un regard assez négatif sur ce qui passé au cours des trois premiers mois relativement à l'enseignement de l'algèbre :

AL : Dans ce que vous avez fait en algèbre pour l'instant, qu'est-ce qui vous semble avoir le mieux marché et qu'est-ce qui vous semble avoir moins bien marché ?

J : Le mieux... Je ne sais pas... Le moins bien... Il y a pas mal de choses... [...] J'ai envie de dire que dans l'ensemble cela ne marche pas très bien, mais c'est pas très positif.

Au bout de trois mois, il paraît démuni face aux difficultés de ses élèves qui semblent l'avoir découragé et il cherche des moyens pour les remotiver, pour leur proposer des activités nécessitant moins de calculs qui pourraient donc leur sembler plus simples. Ainsi a-t-il hâte d'aborder la géométrie dans l'espace pour pouvoir les faire raisonner sans trop de calculs.

En fait, l'analyse des pratiques de Julien en début d'année permet d'identifier certains facteurs qui expliquent, en partie, les difficultés qu'il rencontre relativement à l'enseignement de l'algèbre. Nous les présentons dans la première partie. Cette analyse fait aussi apparaître une réflexion intéressante sur certains aspects de l'enseignement de l'algèbre. Nous lui consacrons la deuxième partie. Comme pour les deux stagiaires considérés précédemment, l'étude du rapport professionnel de Julien met enfin en évidence des évolutions que nous précisons dans la troisième partie avant de synthétiser les résultats obtenus.

Etudions donc, dans un premier temps, certaines raisons qui peuvent expliquer les difficultés rencontrées par Benjamin lors de l'enseignement de l'algèbre en début d'année.

II.1 - Certaines raisons d'un début de stage difficile :

Tout d'abord, Julien semble avoir plus de mal que Benjamin et Marie à se positionner en début d'année dans une posture d'enseignant ; contrairement à eux, il a plus de mal à trouver ses marques, comme nous le verrons dans un premier paragraphe. Dans le deuxième, nous nous centrerons sur les problèmes qu'il rencontre pour anticiper les difficultés de ses élèves. Enfin, dans le troisième, nous montrerons que certains aspects de ses pratiques ne facilitent pas l'apprentissage de ses élèves et ne lui permettent pas non plus d'avancer dans la connaissances de ses élèves.

II.1.1 - Un stagiaire qui a du mal à trouver ses marques :

Julien rencontre des difficultés évidentes à passer du statut d'étudiant à celui d'enseignant. Ceci apparaît, par exemple, dans sa vision de l'algèbre qui, après presque trois mois d'enseignement, reste encore centrée sur l'algèbre étudiée à l'université :

AL : Est-ce que vous pensez que votre vision de l'algèbre a changé depuis que vous êtes devenu enseignant ?

J : Non pas encore. Ma vision profonde évoluera peut-être, mais sur la base de ce que l'on voit à la fac. Par contre l'approche que je vais avoir au lycée ou au collège, là c'est sûr elle va changer de telle sorte que ce soit utile pour les élèves. Disons que ce sera peut-être deux visions distinctes. Il y a deux types d'algèbre : celle que l'on fait au collège et au lycée et ce que c'est vraiment.

La difficulté de se positionner dans une posture d'enseignant est repérable également dans ses rapports avec la formation IUFM. Ceci apparaît, en particulier, dans le travail que nous avons demandé aux stagiaires suite à la formation sur les modules (cf. le portrait de Marie). En effet, alors que la majorité des stagiaires ont choisi des exercices essentiellement centrés sur un travail de type technique, extraits de manuels scolaires ou semblables à ceux figurant sur la feuille étudiée lors de la formation, la fiche écrite par Julien nous a surpris par l'originalité de deux problèmes qu'il a extraits de documents IREM. Le premier est un problème de géométrie analytique dans lequel on étudie l'intersection de paraboles avec les axes du repère et avec d'autres paraboles. Il permet d'utiliser différentes notions algébriques notamment la résolution d'équations du second degré et la factorisation[115]. Pour le deuxième problème[116], nous reprenons ci-dessous son énoncé :

Dans une forêt les arbres sont plantés tous les dix mètres et forment un réseau carré. On cherche à construire des routes circulaires, de centre O, de largeur 5 mètres sans abattre aucun arbre : l'épaisseur des troncs des arbres est considérée comme négligeable. Une telle route est dite "route écologique".

On choisira comme unité le décamètre.

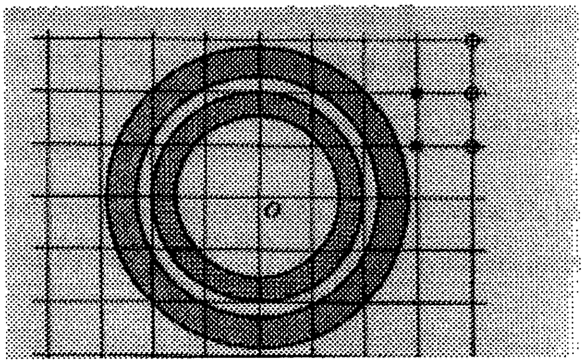


Figure 1

<u>Question 1 :</u> Pour chacune des deux routes écologiques tracées sur la figure 1, donner un encadrement du rayon intérieur.

Question 2 : Dans cette question, on cherche à construire une route écologique de rayon plus grand que celles tracées sur la figure 1.

a - Une telle route passe nécessairement entre deux arbres A et B et deux arbres K et L comme l'indique la figure 2.

---

[115] Dans ce problème, les élèves doivent, par exemple, résoudre les équations : $(x+3)(8-2x)=0$, $x^2-9=0$ ou $(x+3)(8-2x)=x^2-9$.

[116] Julien a extrait ce problème du manuel "Les Maths en pratique", rédigé par l'IREM de Strasbourg et édité en 1991 par Bordas. Cet ouvrage, relativement ancien, présente un ensemble de problèmes riches à proposer lors de séances de travaux dirigés en classe de seconde. Il s'avère que ce livre est exploité à l'IUFM de Reims dans le cadre de la préparation à la deuxième épreuve orale du CAPES (qui consiste à sélectionner des exercices relatifs à un thème donné). C'est sans doute pour cette raison que Julien le connaît.

Expliquez pourquoi on doit avoir $OL \geq OK + \frac{1}{2}$.

b – Sur la figure 1, calculer les distances de O à chacun des points marqués x.

En déduire que l'on ne peut pas construire de route écologique de rayon compris entre 3 et 4.

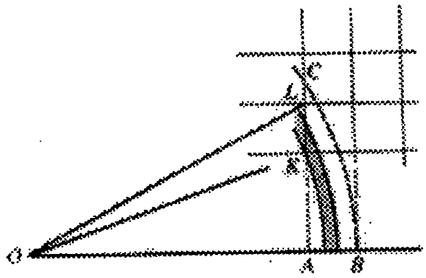


Figure 2

c – Calculer les distances à O de chacun des trois arbres marqués o.

Construire, sur papier millimétré, une route écologique de rayon compris entre 4 et 5, mentionner les 20 arbres évités de justesse par la route.

Question 3 : Dans cette question, on cherche s'il existe des routes écologiques de rayon supérieur à 5. Les notations sont celles de la figure 2.

a – Montrer que : $OL^2 = OA^2 + AK^2 + AK + AL$ et que : $(OK + \frac{1}{2})^2 = OA^2 + AK^2 + OK + \frac{1}{4}$ en utilisant 2.a.

b – En déduire que pour toute route écologique : $AK + AL > OA$.

c – Soit C le point de la droite AL tel que OC = OB. Montrer que $AC = \sqrt{OA + OB}$.

d – Compléter le tableau suivant :

OA	5	6	7	8
AC				
Maximum de AK + AL				

e – Peut-on construire une route écologique de rayon compris entre 5 et 9 ?

f – On suppose désormais que $OA = n \geq 9$.

En développant $(n - 4)^2 - 20$, établir que $OA + OB \leq \frac{n^2}{4}$

g – Comparer cette dernière inégalité avec celle obtenue à la question 3.b. Que peut-on en conclure ?

Ce problème fait appel à différentes notions algébriques (identités remarquables, radicaux, opérations sur les inégalités, les encadrements) et à des notions géométriques (théorème de Pythagore, calcul de distances).

Les formateurs ont trouvé que la fiche proposée, qui comportait encore deux autres problèmes de mise en équation, était trop lourde pour une seule séance de module et peu adaptée à l'objectif fixé : écrire une fiche d'exercices permettant de prendre en charge les difficultés des élèves de seconde en algèbre en début d'année. Mais ils ont apprécié et valorisé l'effort de recherche de problèmes sortant de l'ordinaire qui conduisaient, de plus, à des utilisations de l'algèbre autre que la résolution de problèmes à l'aide d'équations.

Lors du premier entretien, nous avons donc été surprise de la différence entre le niveau de cette fiche et la description que Julien nous faisait de sa classe et des difficultés qu'il y rencontrait. Nous l'avons donc interrogé à propos de la façon dont il avait fait travailler ses élèves sur les problèmes décrits précédemment. Et là, nous avons compris que Julien avait considéré le travail demandé comme un travail théorique indépendant de sa pratique, comme il nous l'explique dans le premier entretien :

> J : Ah non. Moi je croyais que c'était un module théorique. Je n'avais pas compris ce qu'il fallait faire. Jamais je n'aurais pas mis tout ça dans un module. Celui sur les routes écologiques, je le trouvais très bien. Je pensais même le faire faire dans l'opération séance[117]. Et puis non, ça c'était vraiment au début de l'année. Après je n'y ai même plus pensé : ce n'est plus la peine. Je suis revenu à des choses plus terre à terre.

Pour écrire cette fiche, Julien semble donc s'être replacé dans la position d'un étudiant préparant la deuxième épreuve orale du CAPES, qui consiste à sélectionner des exercices correspondant à un thème donné. La citation précédente fait également apparaître qu'en début d'année Julien avait des ambitions mathématiques qu'il a rapidement abandonnées ; nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Sinon, d'une manière générale, Julien a, lors du premier entretien, un regard positif sur la formation didactique de l'IUFM, mais il semble considérer les apports comme théoriques et n'a pas essayé de réinvestir des éléments dans sa propre pratique :

> J : Déjà, quand on a vu les séances de module, on a déjà vu différentes approches. Le problème est que comme je ne les ai pas testées avec ma classe, je ne sais pas ce que cela donne en réalité. Sinon si on peut savoir ce que donne chaque approche en pratique, cela peut être intéressant.

Enfin, nous avons l'impression qu'en début d'année Julien a plutôt un rapport de type élève / professeur avec son conseiller pédagogique, qu'il prend plus ses conseils comme des injonctions et qu'il se sent en faute quand il ne les a pas suivis.

L'étude des pratiques de Benjamin et Marie avait montré qu'ils avaient rapidement mis en place des stratégies didactiques restées relativement stables tout au long de l'année. Cette rapidité de mise en place nous avait alors amenée à faire l'hypothèse qu'une certaine cohérence dans leur pratique était déjà en germe avant qu'ils ne prennent leur classe en responsabilité. Pour Julien, la situation est différente : il est plus difficile de trouver une cohérence dans ses pratiques en début de stage. En fait, Julien est un stagiaire qui cherche ses marques lors de ses premières semaines d'enseignement. Ceci apparaît, d'abord, à travers un changement de pratiques au bout d'une semaine d'enseignement. Julien consacre la première semaine au chapitre 1 ("Calculs numériques") dans lequel il aborde une notion nouvelle (les ensembles de nombres) et il reprend deux notions anciennes (les puissances, les racines carrées). Les séances sont alors essentiellement consacrées au cours dans lequel Julien définit ou redéfinit ces notions et dans lequel il rappelle les règles de calculs relatives aux puissances et aux racines carrées déjà étudiées au collège. Suite à ces cours, Julien propose des exercices à préparer à la maison, mais il y a peu d'articulation entre le cours proposé et le travail demandé aux élèves. Ainsi, suite au cours sur les racines carrées, Julien propose trois exercices dans lesquels les élèves doivent effectuer des calculs sur des fractions et aucun exercice portant sur les racines carrées ne sera traité. Dès le deuxième chapitre, ses pratiques se modifient : il laisse toujours une large place au cours, mais les exercices censés être préparés à la maison sont désormais en relation avec les notions étudiées en cours.

---

[117] Cf. la partie II du chapitre 4 pour une description de ce dispositif.

L'analyse des choix didactiques de Julien laisse également paraître quelques incohérences. Ainsi, dans le chapitre 2 ("Transformations d'écritures"), à la fin du cours sur la factorisation, Julien organise une re-rencontre avec un type de tâches qui est complètement indépendant de l'étude en cours, la résolution d'un problème par une mise en équation. Nous reprenons ci-dessous les traces écrites dans le cahier de cours d'un élève :

Pierre a dans son porte-monnaie 86 F en pièces de 2 F et 5 F. Sachant qu'il a en tout 28 pièces, combien a-t-il de pièces de 2 F et 5 F ?

<u>Résolution :</u>

Appelons x le nombre de pièces de 2F et appelons y le nombre de pièces de 5 F.

On traduit le problème par des équations : $2x + 5y = 86$ *(1)* $x + y = 28$ *(2)*

(2) s'écrit $y = 28 - x$ *et on reporte dans (1) :*

$2x + 5(28 - x) = 86$

$2x - 5x + 140 = 86$

$-3x = 86 - 140$

donc $x = \frac{54}{3} = 18$ puis on remplace x par sa valeur dans (2) :

$18 = y = 28$

donc $y = 28 - 18 = 10$

Le nombre de pièces de 2 F est 18, le nombre de pièces de 5 F est 10.

Dans la mesure où les paragraphes suivants vont être consacrés à l'étude d'expressions rationnelles et à la résolution d'équations à une inconnue, il est difficile de trouver une cohérence dans le choix de proposer ici ce problème qui, comme les traces d'un cahier d'élève le montrent, est résolu à l'aide d'un système de deux équations à deux inconnues[118].

Il arrive également que Julien propose des exercices à préparer à la maison portant sur des notions nouvelles qui n'ont pas encore été abordées en classe. Ceci est le cas dans le troisième chapitre, consacré aux généralités sur les fonctions, où Julien propose un exercice à préparer à la maison dans lequel les élèves doivent dresser le tableau de variation d'une fonction alors que cette notion n'a pas encore été introduite.

Après avoir constaté les difficultés rencontrées par Julien à se positionner dans une posture d'enseignant et à y trouver ses marques, centrons nous sur une deuxième raison qui peut expliquer son début de stage difficile : il a beaucoup de mal à anticiper les connaissances de ses élèves.

II.1.2 - Des difficultés à anticiper les connaissances de ses élèves :

Un deuxième élément permet d'expliquer les difficultés que Julien rencontre avec l'enseignement de l'algèbre : il a du mal au début de son stage à évaluer le niveau mathématique de ses élèves et à anticiper les difficultés qu'ils peuvent rencontrer en algèbre.

La difficulté à évaluer le niveau mathématique de ses élèves apparaît clairement dès la deuxième séance de l'année pendant laquelle, après avoir défini les différents ensembles de nombres, Julien propose un exercice d'application :

[118] Les systèmes d'équations linéaires ne seront étudiés qu'à la fin de l'année.

Pour chacun des nombres suivants, trouver le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient : $2{,}66 ; 0{,}11\overline{1} ; \frac{\pi+1}{\pi+3} ; 1{,}25 ; 2\pi ; -0{,}66\overline{6} ; \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{27}} ; \frac{\sqrt{676}}{2} ; \frac{3{,}1416}{\pi}$

Pour le construire, Julien s'est appuyé sur deux exercices extraits du manuel de la classe[119], dans lesquels les auteurs proposent des nombres faciles à étudier (-18, $\frac{16}{6}$, $\sqrt{7}$ par exemple) et des nombres plus complexes ($\frac{\pi+1}{\pi+3}$; $\frac{3{,}1416}{\pi}$; 1,234567891011... par exemple). Nous retrouvons ici les ambitions mathématiques de Julien puisque la majorité des nombres qu'il choisit sont assez difficiles à étudier. Par ailleurs, pour lui, l'objectif majeur en mathématiques est de savoir raisonner. Il propose donc à ses élèves de faire des raisonnements par l'absurde pour étudier l'appartenance de certains de ces nombres aux ensembles de nombres étudiés dans le cours. Nous reprenons, ci-dessous, le raisonnement produit pour prouver que $\frac{\pi+1}{\pi+3}$ est irrationnel :

Supposons que $\frac{\pi+1}{\pi+3}$ *est rationnel, alors* $\frac{\pi+1}{\pi+3} = \frac{a}{b}$ *où* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{N}^*$
donc $b(\pi+1) = a(\pi+3)$
donc $b \times \pi + b = a \times \pi + 3a$
donc $(b-a)\,\pi = 3a - b$
ou bien $(b-a) = 0$, *c'est à dire* $b = a$ *donc* $\pi + 1 = \pi + 3$, *absurde*
ou bien $(b-a) \neq 0$ *et on a* $\pi = \frac{3a-b}{b-a}$, *absurde.*

Ce type de raisonnement, que de nombreux élèves en début de seconde n'ont jamais dû rencontrer, est particulièrement difficile à comprendre. De plus, dans le cas présent, les manipulations algébriques sont complexes puisque deux lettres (a et b) et le nombre π (certains élèves ne donnent pas le statut de nombre à cette notation) sont utilisés. Mais, Julien n'a pas du tout anticipé ces difficultés. Par ailleurs, nous ignorons comment Julien a géré sa séance, mais différentes caractéristiques de ses pratiques, que nous étudierons ensuite, nous laissent penser qu'il n'a sans doute laissé aucune responsabilité à ses élèves qui se sont contentés de recopier ce qu'il écrivait au tableau. En fait, la gestion choisie ne lui a sans doute pas permis de se rendre compte de la difficulté d'un tel raisonnement pour un élève, en début de seconde. En effet, ce n'est qu'en exposant cet exercice à des collègues stagiaires lors d'un groupe d'échanges[120] en formation à l'IUFM qu'il s'est rendu compte que ses attentes n'étaient sans doute pas adaptées au niveau de ses élèves ("Quand j'en ai parlé aux réunions d'échange, on m'a dit : "hou, là, là ! " Du coup, j'ai arrêté."). En fait, en ce début de stage, Julien propose des tâches trop ambitieuses par rapport à sa classe et par rapport à son expertise. En effet, il n'a visiblement

---

[119] COSTE R., DELARUELLE D., LE FOULGOCQ S., MISSET L. (1998). *Maths seconde*, collection Déclic. Editions Hachette Education.
Julien travaille également avec le manuel suivant : TERRACHER P.H., FERRACHOGLOU R. (1994). *Math seconde*, Collection Terracher. Editions Hachette Education.

[120] Cf. la partie II du chapitre 4.

pas encore les moyens de gérer proprement ce type d'exercice. Notons toutefois qu'il serait dommage qu'il réduise alors trop fort ses ambitions.

La difficulté à anticiper les connaissances de ses élèves et leurs difficultés en algèbre apparaît clairement lors du travail de révision de certaines règles de calculs déjà étudiées au collège. En effet, lors de ses premiers cours consacrés à ces révisions, Julien a visiblement le souci d'aider ses élèves à comprendre les différentes règles rappelées, mais il n'anticipe pas du tout les difficultés que les élèves vont rencontrer. Ceci est le cas, par exemple, pour la notion de puissance pour laquelle il organise d'abord une première re-rencontre à travers un exercice tiré du manuel de la classe, proposé lors de la première séance, dans une fiche de révision portant sur différents calculs :

> *Ex n°35 p 26 :*
>
> *Les calculs effectués sont-ils corrects ?*
>
> *a)* $3^2 \times 5^2 = 15^2$; *b)* $2^3 \times 5^2 = 10^5$; *c)* $2^2 + 2^4 = 2^6$; *d)* $3^1 \times 3^0 = 3$; *e)* $(4+1)^3 = 4^3 + 1$; *f)* $(2-1)^5 = 1$;
>
> *g)* $200^3 = 8 \times 100^3 = 8000000$; *h)* $\frac{4}{9} = \frac{2^2}{3}$; *i)* $(\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$; *j)* $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{10}$

Deux séances plus tard, il reprend cette notion en cours en revenant sur des définitions et en rappelant différentes règles déjà étudiées au collège :

> *II – Les puissances :*
>
> *1 – Définitions*
>
> *Soit a un nombre réel et n un entier non nul.*
>
> *Le nombre* $\underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$ *s'appelle puissance* $n^{\text{ième}}$ *de ce nombre, n s'appelle l'exposant.*
>
> *Pour a non nul, on note* a^{-n} *l'inverse* $\frac{1}{a^n}$ *de* a^n.
>
> *Convention :* $a^0 = 1$
>
> *Remarques :* $a^1 = a$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$
>
> *2 – Règles de calculs :*
>
> *a et b, deux nombres réels non nuls*
>
> *n et p, deux entiers relatifs.*
>
> $a^n \times a^p = a^{n+p}$
>
> *Démonstration : Par définition,* $a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$ *et* $a^p = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{p \text{ fois}}$
>
> $a^n \times a^p = (\underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}) \times (\underbrace{a \times \ldots \times a}_{p \text{ fois}}) = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n+p \text{ fois}} = a^{n+p} \leftarrow$ *Par définition*
>
> $(a^n)^p = a^{n.p}$
>
> $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
>
> $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
>
> $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
>
> *Démonstration :* $\frac{a^n}{a^p} = a^n \times \frac{1}{a^p} = a^n \times a^{-p} = a^{n-p}$

Comme Benjamin et Marie, il a le souci de rappeler ici les différentes règles étudiées. Mais, contrairement à ces deux stagiaires, il a également la volonté de justifier certaines de ces règles. Il cherche visiblement ici à revenir sur le sens de ces règles pour prendre en charge certaines difficultés de ses élèves, comme il l'explique lors du premier entretien :

J : Je décomposais : a^n, c'est a fois a fois a, n fois. a^p, etc. On obtient a^{n+p}. Je trouvais cela bien, car souvent ils utilisent ces règles sans savoir ce qu'ils font. Je leur dis : "Si vous ne vous souvenez pas, n'écrivez pas n'importe quoi. Dites ce qu'est a^n, ce qu'est a^p. Du coup, on compte, il y en a n+p". Mais ils faisaient toujours l'erreur après.

Julien semble donc ici assez démuni : malgré son souci d'aider les élèves à comprendre les règles, ils font toujours des erreurs qu'il s'explique alors par le fait que ses élèves n'apprennent pas leur cours :

J : Si on regarde le premier DS... Là, par exemple, quand il y a des grandes expressions ils ont du mal. Ils ne connaissent pas leurs règles sur les puissances. Je ne fais pas d'interro de cours. Mais ils ne l'apprennent pas, c'est sûr !

Julien fait ici référence à l'expression $\dfrac{(2 \times 10^{-3})^2 \times (\frac{3}{2} \times 10^2)^3}{3 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-3}}$ que les élèves devaient simplifier dans le premier devoir surveillé qui a lieu cinq semaines après la rentrée. Notons que, dans cette expression, toutes les règles sont mises en jeu à la fois. Or entre le cours et cette évaluation, Julien n'a plus proposé de travail technique consacré à l'application des règles de calcul sur les puissances, ce qui explique au moins partiellement les difficultés de ses élèves. Pour cette notion, Julien n'a donc pas anticipé les difficultés de ses élèves, ni compris à ce moment là la nécessité de mettre en place un travail technique. En fait, lors du premier entretien, il nous expliquera qu'il ne pensait pas avoir à faire travailler ses élèves sur cette notion :

J : Et puis il faut dire que je n'ai pas fait tellement d'exercices là-dessus parce que je pensais que c'était acquis. [...]. Pour moi, ça, c'était que des rappels. Je me suis rendu compte trop tard que ça n'allait pas. Je n'ai pas voulu faire de retour en arrière. Peut-être que j'aurais dû, je ne sais pas.

Même s'il est sensible au fait que les élèves ne donnent pas forcément de sens aux manipulations des formules sur les puissances, Julien ne propose donc pas un travail algébrique qui permettrait de prendre en charge les difficultés des élèves et de faire évoluer leur rapport à la notion de puissance. Notons en particulier que pour Julien les puissances semblent se situer du numérique et qu'il ne voit pas le travail pré-algébrique qu'il pourrait proposer à sa classe à travers cette notion.

A partir du deuxième chapitre, cependant, les pratiques de Julien changent, comme nous l'avons expliqué précédemment. Mais, le travail algébrique qu'il propose possède des caractéristiques qui ne favorisent pas toujours l'apprentissage des élèves et qui ne lui permettent pas d'avancer dans sa connaissance sur les élèves. Nous y consacrons le paragraphe suivant.

II.1.3 - Un travail algébrique dont certaines caractéristiques ne favorisent pas l'apprentissage des élèves :

Le travail algébrique proposé par Julien dans le deuxième chapitre suit un schéma didactique assez proche de ceux choisis par Marie et Benjamin : sans prendre d'informations au préalable sur les connaissances de ses élèves, Julien commence par un cours, puis propose un ensemble d'exercices d'application.

L'étude du cours fait apparaître le souci de définir (ou redéfinir) les objets étudiés (équation, solution d'une équation, expression rationnelle) et certains types de tâches (factoriser une expression, résoudre une équation), comme dans l'exemple ci-dessous concernant la notion de forme quotient d'une expression rationnelle :

> *On appelle forme quotient d'une expression rationnelle, toute expression de type $\frac{A(x)}{B(x)}$, où A(x) et B(x) sont des expressions polynomiales en x.*
>
> *Exercice : Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui sont sous la forme quotient ?*
>
> a) $\frac{x^2-1}{4x}$ b) $-5+\frac{4}{x-2}$ c) $\frac{x}{x+1}-\frac{3x-1}{2}$
>
> d) $\frac{2x-3(x+1)}{(x+3)(x+1)}$ e) $\frac{(2x-1)(x-3)}{2x^2-x-1}$ f) $\frac{-5}{x+2}\times\frac{(x+1)}{x^2+x+1}$

Certaines de ces définitions sont tirées directement du Terracher, mais celle que nous citons en exemple n'apparaît dans aucun des deux manuels avec lesquels Julien travaille. Par ailleurs, l'exercice, qui est proposé et qui peut contribuer à aider les élèves à donner du sens à cette définition, n'apparaît pas non plus dans ces manuels. Pour construire cet exercice, Julien semble s'être inspiré d'une activité du Déclic dans laquelle les élèves doivent identifier des expressions écrites sous forme de somme, de produit ou de quotient, mais les expressions proposées par Julien sont différentes de celles fournies par les auteurs du Déclic. Il nous semble que le fait que Julien place ici cette définition et cet exercice, met en évidence ce souci de définition et d'appropriation des notions étudiées.

Dans le cours, Julien a également le souci de reprendre des types de tâches déjà rencontrés par les élèves (développer et factoriser une expression algébrique, résoudre une équation du premier degré), d'expliciter les techniques associées et d'apporter des éléments technologiques. Pour illustrer notre propos, prenons l'exemple du type de tâches "factoriser une expression algébrique", pour lequel Julien souhaite que les élèves acquièrent la méthode suivante : il faut d'abord repérer s'il y a un facteur commun et s'il n'y en a pas, il faut penser aux identités remarquables. Il choisit donc de présenter cette technique à travers trois exemples[121] dans lesquels il accompagne les calculs d'un texte qui précise la technique en jeu et quelques éléments technologiques, comme dans l'exemple 2 :

> *Exemple 2 : Factoriser $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = (2x-1)^2 - 25x^2$*
>
> *Dans ces deux expressions il n'y a pas de facteur commun évident. Il faut alors penser aux produits remarquables*
>
> *Pour f(x)* $\left\{\begin{array}{l} 4x^2 \text{ est le carré de } 2x \\ 1 \text{ est le carré de } 1 \\ 4x \text{ est le double produit } 2\times 2x\times 1 \end{array}\right.$ *donc* $f(x) = (2x+1)^2$
>
> *Pour g(x) on reconnaît la différence de deux carrés*
>
> $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
>
> *donc* $g(x) = (2x-1+5x)(2x-1-5x) = (7x-1)(-3x-1) = -(7x-1)(3x+1)$

[121] Dans le premier exemple, l'expression étudiée comporte un facteur commun évident : $f(x) = -5x(x+1) + (x+1)^2$. Dans le deuxième exemple, il s'agit de factoriser deux expressions en utilisant uniquement les identités remarquables : $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = (2x-1)^2 - 25x^2$. Dans le dernier, il s'agit d'enchaîner les techniques décrites dans les deux exemples précédents : $f(x) = 4x^2 - 9 + (x+5)(2x-3)$.

L'étude des manuels avec lesquels travaille Julien montre qu'il s'est complètement appuyé sur le Terracher pour construire ce cours : la démarche est identique (présenter une technique sous forme d'exemples résolus), les exemples sont les mêmes et le texte accompagnateur, tout en étant légèrement simplifié au niveau du style, reste très proche des commentaires des auteurs du manuel.

Rien dans le cahier de bord ou les entretiens ne nous informe sur la gestion de ce cours en classe et, en particulier, sur la place laissée à l'élève lors de l'étude des trois exemples. Mais, le temps assez court passé sur ces exemples[122] et les traces écrites du cahier d'élève laissent penser que les élèves n'ont pas cherché les factorisations proposées et se sont contentés de recopier le cours (ce qui est copié dans le cahier est très proche de ce que Julien avait écrit sur sa propre préparation).

L'étude du paragraphe 4 consacré à l'étude des équations confirme cette volonté de revenir sur des techniques associées à des tâches déjà rencontrées par les élèves et de rappeler des éléments technologiques :

> *Une équation est une égalité (exemple : $3x + 1 = \frac{5}{3}(x - 2)$) dont on cherche les valeurs de x pour lesquelles elle est vérifiée. Résoudre une équation, c'est trouver les valeurs de x la vérifiant.*
> *Pour cela on la transforme en une autre équation ayant les mêmes solutions. On utilise deux règles.*
> *On ne change pas les solutions d'une équation :*
> *1 – En ajoutant (ou en soustrayant) un même nombre à chaque nombre de l'égalité.*
> *2 – En multipliant (ou en divisant) par un même nombre non nul.*
> *Les équations obtenues sont dites équivalentes.*
> *[...]*
> *<u>Exemple 1 :</u> Résoudre dans IR l'équation $4x + 7 = 2x + 10$ [...]*
> *<u>Exemple 2 :</u> Résoudre dans IR l'équation $4x + 2 = 3(x + 1) - (4 - x)$ [...]*
> *<u>Exemple 3 :</u> Résoudre dans IR l'équation $x + 2 = \frac{2}{3}(1 + 3x) - (x - \frac{4}{3})$ [...].*

Dans les deux manuels avec lesquels Julien travaille, nous retrouvons de tels apports technologiques et Julien s'est ici inspiré du Terracher, mais, contrairement à ce que l'on trouve dans ces manuels, il a ajouté une description d'une partie de la technique ("Pour cela on la transforme en une autre équation ayant les mêmes solutions. On utilise deux règles."). Par ailleurs, dans aucun des deux manuels, nous ne trouvons d'application immédiate de ces règles comme le propose Julien à travers l'étude des trois exemples. Le travail d'élaboration des cours se fait de manière certaine à partir des deux manuels, mais Julien a le souci d'ajouter des éléments technologiques, d'insérer un discours plus "méta"[123] ou d'introduire des exemples supplémentaires.

La reprise des types de tâches déjà rencontrés par les élèves se fait donc dans le cours avec la reprise de techniques et l'apport d'éléments technologiques. Julien organise, ensuite,

---

[122] Julien débute le cours sur la factorisation à la fin d'une séance d'une heure. Avant ce cours, les élèves ont d'abord eu une interrogation écrite d'une demi-heure et Julien a traité le premier paragraphe du chapitre 2, relatif aux développements, dans lequel figurent deux exemples de développements. Le cours sur la factorisation est repris au cours d'une seconde séance qui sera également consacrée à la correction de deux exercices assez longs et à la résolution du problème à mettre en équation auquel nous avons fait référence à la page 210.

[123] Au sens d'A.Robert et J.Robinet (Robert, Robinet, 1996).

un travail de la technique à travers un ensemble d'exercices qu'il sélectionne dans le manuel de la classe. La comparaison des pratiques de Julien avec celles de Marie et Benjamin fait donc apparaître de réelles différences qui peuvent contribuer à expliquer en partie les difficultés que rencontre Julien lors de l'enseignement de l'algèbre.

Une première différence est que, au cours du premier mois d'enseignement, les élèves de Julien n'ont quasiment traité aucun exercice en classe : pendant cette période, Julien n'en a proposé que cinq en dehors des exemples du cours (ils sont beaucoup moins nombreux que ceux proposés par Marie ou Benjamin et nous nous interrogeons sur le travail réellement fourni par les élèves). Ces cinq exercices ont été traités au cours des quatre premières séances. Au cours de cette période, les séances sont alors consacrées, dans un premier temps, à la correction des exercices préparés à la maison : Julien semble alors considérer ce dispositif comme un moyen de donner la "bonne" réponse et n'y voit pas la possibilité de prendre des informations ou de revenir sur les erreurs.

Le travail sur des exercices en classe ne reprendra qu'après les vacances de Toussaint, soit deux mois après la rentrée, suite à la première visite de sa tutrice qui lui a alors conseillé de faire des cours moins longs et de proposer plus de travail mathématique à ses élèves pendant les séances. D'une manière plus générale, nous pointerons tout au long de l'année que Julien est demandeur de conseils et qu'il a un regard tout à fait positif sur la formation. En particulier, il n'en attend pas des outils à mettre en place immédiatement dans sa classe, mais une aide à la réflexion sur l'enseignement des mathématiques.

C'est sans doute face aux difficultés qu'il a rencontrées en début d'année lors de la gestion des séances d'exercices, que nous avons pointées précédemment, qu'il a abandonné le travail d'exercices en classe. Or, l'étude des pratiques de Benjamin avait montré le rôle important joué par les moments du travail de la technique en classe sur son appréhension et sa compréhension des difficultés de ses élèves et sur les réflexions qu'il avait menées quant à leur prise en charge. Il s'avère que Julien semble particulièrement gêné par les difficultés de manipulation que rencontrent ses élèves, mais l'évocation des erreurs reste toujours peu précise comme le montre la citation suivante extraite du premier entretien qui se déroule, rappelons-le à la fin du mois de novembre, soit après deux mois et demi d'enseignement :

> J : [...] Par exemple avec les fractions je me suis rendu compte que lorsque cela devenait un peu plus compliqué, hop, ils faisaient plein d'erreurs. [...] Ensuite, développer, réduire, ordonner. Développer cela va encore à peu près. Par contre lorsqu'on arrive sur factoriser... On en a fait beaucoup des factorisations.
>
> AL : Où étaient leurs problèmes ? Ils avaient des problèmes sur des choses simples ?
>
> P : Oui, ils faisaient beaucoup d'erreurs.

En fait, au cours du premier entretien, Julien ne fournira qu'un seul exemple précis de difficultés : il a repéré que ses élèves oublient généralement la solution négative d'une équation du type $x^2 = a$ avec a positif.

Ce repérage peu précis des erreurs commises par ses élèves, lors de ces premiers mois d'enseignement, s'explique, certainement en partie, par le fait que ses élèves ne traitent pas d'exercice en classe : ce choix didactique ne lui permet sans doute pas de repérer précisément les difficultés de ses élèves et de les prendre en charge. Une deuxième conséquence de ce choix est que Julien n'accompagne pas ses élèves lors des premières prises de contact avec le travail de la technique. Ceci constitue une autre différence avec les pratiques de Benjamin et

Marie, qui portaient une grande importance à ces phases de travail en classe : c'était un moyen pour eux d'être présents pour aider les élèves à s'approprier les règles ou les techniques à appliquer.

Ce non-accompagnement des élèves peut se comprendre lorsqu'il s'agit de travailler des techniques que les élèves ont déjà rencontrées (par exemple pour la résolution d'équations du premier degré), mais il peut devenir plus problématique lorsqu'ils travaillent sur des types de tâches nouveaux, comme nous allons le voir plus loin. Cette pratique de Julien ne favorise donc pas l'apprentissage de ses élèves en algèbre et ne l'aide pas non plus à développer des connaissances relatives aux élèves.

Les pratiques de Julien pour choisir les exercices qu'il propose à ses élèves diffèrent, en revanche, peu de celles de Benjamin et Marie : pour un type de tâches donné, il choisit des exercices dans son manuel de manière à faire travailler les élèves sur un nombre assez important de spécimens et de manière à proposer des tâches de plus en plus complexes. Mais, contrairement à Benjamin et Marie, il étale beaucoup moins ce travail technique dans le temps et la complexification n'est pas du tout progressive. Illustrons ces caractéristiques par l'étude des exercices proposés pour travailler la technique de factorisation. Suite au cours auquel nous avons fait référence précédemment (page 214), Julien propose, dans un premier temps, trois exercices à préparer à la maison pour la séance suivante :

<u>Ex n° 16 p 50 :</u>

Lorsque cela est possible, factoriser les polynômes suivants à l'aide d'une différence de deux carrés, du développement d'un carré, ou en mettant x en facteur.

a) $4x^2 + 9$; $x^2 - 2x + 1$; $x^2 - 3$

b) $3x^2 - x$; $-3x^2 + 4$; $4x^2 + 4x + 1$

c) $9x^2 - 4x$; $-x^2 - 9$; $-x^2 - 9x$

<u>Ex n° 22 p 50 :</u>

Factoriser :

1°	a)	$x^2 - 4 + (x+2)^2$	b)	$4(x-1)^2 - (x+1)^2$
	c)	$5(x-3)(x+2) - (x-3)^2 + x - 3$	d)	$(-5x+1)(4x^2 - 3x)$
2°	a)	$(\frac{x-4}{2})^2 - 9x^2$	b)	$(5-x)(1-x)^2 - (2x-3)(x-1)^2$
	c)	$-x(4x+1)(x^2-1)$	d)	$-9(x+5)^2 + 1$

<u>Ex n° 23 p 50 :</u>

Factoriser au maximum, en faisant apparaître, si besoin est, un facteur commun dans les termes isolés ou après développement :

a)	$(-x-1)^2 + (3+2x)(x+1)$	b)	$(5x-3)(x+1) + 6x - 10x^2 + (3-5x)^2$
c)	$(2x+1)^2 - 4x - 2 + (4x^2 - 1)$	d)	$x(5x-3) + 2(x-1)^2 - 2$

L'étude de ces trois exercices montre bien la volonté de Julien de faire travailler ses élèves sur un nombre important de spécimens : les élèves ont ici quinze factorisations à effectuer. On notera, au passage, que Julien a du mal à évaluer la quantité de travail qu'il peut demander à ses élèves. Ces quinze factorisations, demandées par Julien pour le lendemain, en sont un exemple parmi beaucoup d'autres. Trois séances plus tard, il leur en proposera quatre autres et ce sera tout. Le travail de cette technique se fait donc sur un nombre de spécimens assez nombreux mais est peu étalé dans le temps.

Cette étude fait également apparaître la volonté de Julien de complexifier les tâches proposées. En effet, l'exercice 16 est assez élémentaire et les élèves sont guidés dans la méthode à appliquer. Les deux autres sont plus difficiles. Ainsi, dans l'exercice 22, les élèves ne sont plus guidés dans la méthode à utiliser et l'analyse des expressions proposées fait apparaître différents éléments qui complexifient la tâche des élèves, nous l'illustrons par les deux exemples suivants : la factorisation de l'expression a se fait en deux étapes (les élèves doivent d'abord retrouver une identité remarquable et repérer un facteur commun) et elle nécessite la mise en facteur de $(x + 2)$ dans $(x + 2)^2$; le traitement de l'expression c peut être considéré comme complexe du fait de la présence d'un signe "–" et de la multiplication implicite par 1. Dans l'exercice 23, la complexification des tâches apparaît encore plus grande puisque, comme l'indique l'énoncé, la méthode décrite dans le cours par Julien ne s'applique pas pour la dernière expression : les élèves doivent déjà développer l'expression pour voir apparaître un facteur commun. Dans le Déclic, le degré de difficulté des exercices est signalé par zéro, une ou deux étoiles et ces deux exercices sont marqués d'une étoile. Notons que Julien avait la possibilité de choisir d'autres exercices sans étoile, son choix confirme donc un souci de complexifier le travail de la technique. Mais, étant donné que ces trois exercices sont donnés à préparer à la maison, l'amélioration de la technique est laissée à la charge des élèves.

Les deux derniers exercices ont visiblement posé des difficultés aux élèves puisque, lors de la correction de ces exercices, seul l'exercice 16 est corrigé et la correction de l'exercice 22 est seulement entamée. Puis Julien demande à ses élèves de reprendre les exercices 22 et 23 pour la séance suivante. Suite à leur correction, Julien proposera un dernier exercice encore plus difficile et marqué de deux étoiles à préparer pour la séance suivante :

Ex n° 24 p 51 :
Factoriser au maximum, en faisant apparaître, si besoin est, un facteur commun dans les termes isolés ou après développement :

a)	$9x^2 + 12x + 4 - 2x(3x + 2) + (4 - 9x^2)$	*b)*	$(3x - 1)(3x - 5) - (3x - 2)^2$
c)	$(2x - 4)^2 - 3x + 6$	*d)*	$9 - 6x + (2x - 3)^2$

L'étude de cet exercice fait bien apparaître des expressions plus complexes à factoriser que celles proposées précédemment comme, par exemple, la première qui nécessite la mise en jeu des trois aspects de la technique de factorisation étudiée dans le cours (les élèves doivent reconnaître deux identités remarquables, pour faire apparaître un facteur commun), ou l'expression c dans laquelle ils doivent mettre en facteur 4 dans l'expression $(2x - 4)^2$.

Les caractéristiques de la gestion didactique de ces exemples ne contribuent donc pas forcément à favoriser l'apprentissage des élèves. Par ailleurs, le fait de donner beaucoup de travail à la maison a une conséquence immédiate sur la structure des séances : Julien consacre d'abord une grosse partie du temps à la correction d'exercices (qui on le sait n'est pas une tâche didactique simple pour un professeur débutant, surtout s'il a des problèmes de discipline) et le reste du temps au cours.

L'étude des exercices décrits ci-dessus fait toutefois apparaître également un point fort dans la pratique de Julien : les exercices qu'il a choisis pour faire travailler la factorisation peuvent contribuer à une évolution du rapport des élèves à ce type de tâches et les amener à développer une certaine intelligence du calcul littéral. En effet, l'exercice 16 aborde une dimension qui n'a pas été étudiée dans le cours, celle de la reconnaissance de formes factorisables. Par ailleurs, dans les exercices 23 et 24, nous trouvons deux expressions qui mettent en jeu une démarche que les élèves n'ont sans doute pas rencontrée au collège : il faut d'abord développer pour pouvoir ensuite factoriser. L'étude des autres exercices du Déclic montre qu'il existe d'autres exercices pour lesquels il n'y a pas de réflexion sur la forme des expressions factorisables et pour lesquels une amélioration de la technique étudiée au collège n'est pas nécessaire. Julien semble donc avoir volontairement choisi des exercices qui conduisent à de telles réflexions. Mais les conditions didactiques dans lesquelles est mené ce travail vont "miner" ses potentialités.

Dans le chapitre 2, nous retrouvons cette caractéristique des pratiques de Julien à travers le type de tâches "résoudre une équation" pour lequel il proposera les exercices suivants :

> <u>*Ex n°69 p 55 :*</u>
> *Résoudre les équations suivantes, à l'aide d'une factorisation, s'il y a lieu :*
>
> a) $-\frac{5}{3}x(x-3)(x+1)=0$ b) $(5x+3)^2=4(2x-3)^2$
>
> c) $3x^2=5x$ d) $\frac{3x+1}{3}-\frac{2x-1}{2}=\frac{1}{6}$
>
> e) $(2x-1)^2=4x-2$
>
> <u>*Ex n° 70 p 55 :*</u> *Même exercice*
>
> a) $3\sqrt{3}x+5=2x-1$ b) $\frac{x}{3}(4x-1)^2=0$
>
> c) $2(6-3x)=(6x-3)(x-2)$ d) $(3x-4)(x+1)=3x^2+4$
>
> e) $x(2x-3)=3(6-x)$

Ces deux exercices contribuent également à une réflexion sur la forme des écritures algébriques et les informations qu'elles apportent quant au choix des méthodes à appliquer pour, ici, résoudre des équations. En effet, dans la mesure où dans le même exercice sont mélangées des équations du premier degré et des équations de degré strictement supérieur à 1, les élèves ne peuvent appliquer de manière aveugle une technique précise et doivent analyser la forme de l'équation pour déterminer la technique à utiliser. Notons qu'une telle réflexion peut contribuer au développement d'une certaine autonomie par rapport au calcul littéral. Julien restera sensible à cet aspect de l'enseignement de l'algèbre puisque, lors de l'étude des inéquations à la fin de l'année, il propose de tels exercices, comme il nous l'explique dans le dernier entretien :

> J : J'essayais de leur donner aussi des expressions où on n'utilisait pas un tableau de signes. Il fallait regarder l'expression et dire que l'on remarque que là tout est positif ou négatif. Pour montrer qu'on n'était pas obligé de faire toujours un tableau de signes.

Enfin, une autre caractéristique du travail algébrique proposé par Julien qui ne favorise pas l'apprentissage des élèves concerne l'étude de types de tâches nouveaux, ou plus problématiques, pour les élèves. L'analyse des pratiques de Benjamin et Marie relativement à ce point avait montré qu'ils laissaient peu de responsabilités à leurs élèves dans l'élaboration de nouvelles techniques, mais qu'ils étaient attentifs aux aides qu'ils pouvaient apporter en classe pour que les élèves se les approprient avant de proposer un travail plus personnel.

Les pratiques de Julien sont également différentes ici. Ainsi, dans le deuxième chapitre, les élèves rencontrent trois types de tâches non routiniers "écrire sous forme quotient une expression rationnelle", "résoudre une équation se ramenant à une équation produit" et "résoudre une équation avec une inconnue au dénominateur". Une première caractéristique est que Julien n'explicite pas nécessairement les techniques associées à ces types de tâches. En effet, seule la technique associée au type de tâches "écrire sous forme quotient une expression rationnelle" sera mise en mots dans le cours :

Pour écrire une somme d'expressions rationnelles sous forme quotient
1) On cherche les valeurs interdites
2) On réduit ces expressions au même dénominateur
3) On applique la règle d'addition des fractions $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}=\frac{A+B}{D}$

Julien ne semble donc pas avoir été ici sensible à l'intérêt d'amener les élèves à élaborer cette technique sans doute nouvelle pour eux. Pourtant il a repris ce texte dans le Déclic et, dans ce manuel, les auteurs proposent une activité[124] qui conduit à élaborer cette technique à partir de la technique connue des élèves pour additionner deux fractions dans le cadre numérique. Dans cette activité, pour amener les élèves à écrire l'expression $A = \frac{3-x}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ sous forme d'un quotient, les auteurs leur posent les questions suivantes :

<u>Extrait de l'activité 2 p 34 :</u>
a) Calculer A lorsque x = 4. Quel est le dénominateur utilisé pour effectuer l'addition ?
b) Calculer A lorsque x = 2.
c) En déduire une méthode pour écrire l'expression A sous forme d'un quotient.
d) Pour quelles sont les valeurs de x le calcul de A est-il "interdit" ?

En revanche, il semble que Julien avait prévu de proposer un exercice d'application suite à l'exposé de la technique : ses notes de préparation de cours indiquent qu'il voulait demander à ses élèves de mettre sous forme quotient les expressions rationnelles de l'exercice qu'il avait proposé suite à sa définition de "forme quotient" et que nous avons repris ci-dessus (page 214). Mais, visiblement par manque de temps, il ne leur a pas posé cette question et n'a pas repris ce cours lors de la séance suivante. Suite à l'explicitation de la technique, Julien propose alors deux exercices d'application à préparer à la maison. Nous présentons ci-dessous l'un de ces exercices, le second est de même nature et comporte quatre sommes à calculer :

<u>Ex n°36 p 52 :</u>

Préciser les conditions d'existence des expressions suivantes (ou donner les valeurs interdites) et écrire ces expressions sous la forme d'un quotient (on développera le numérateur) :

1°	a)	$3x-1-\frac{2}{x+1}$	b)	$\frac{2}{3x}-\frac{1}{3}$
2°	a)	$\frac{5}{4}x-\frac{3(x+3)}{4x}$	b)	$-5+\frac{4}{x-2}$
3°	a)	$\frac{1}{x}-\frac{2-x}{2x}+\frac{1}{2}$	b)	$3-\frac{x+4}{x-1}+x$

Comme, il n'a pas présenté d'exemples dans le cours, Julien demande à ses élèves de lire un exemple qui suit l'explicitation de la technique dans le cours du Déclic avant de traiter ces exercices :

[124] Il s'agit de l'activité n°2 page 34.

Soit $E(x) = 2 - \frac{x-4}{x(x+1)} + \frac{3-x}{x+1}$. Le dénominateur $x(x + 1)$ s'annule pour $x = 0$ ou $x = -1$, et $x + 1$ s'annule pour $x = -1$; donc 0 et -1 sont valeurs interdites.

Le dénominateur commun est $x(x + 1)$ (voir activité 2).

$$E(x) = \frac{2 \times x(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x-4}{x(x+1)} + \frac{x(3-x)}{x(x+1)} = \frac{2x^2 + 2x - (x-4) + 3x - x^2}{x(x+1)}$$
$$= \frac{2x^2 + 2x - x + 4 + 3x - x^2}{x(x+1)} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x(x+1)} = \frac{(x+2)^2}{x(x+1)}.$$

Il est inutile de développer le dénominateur. Comme $x^2 + 4x + 4$ est le développement d'un carré, la forme finale pour E(x) est une forme factorisée.

Contrairement à ce que font Marie et Benjamin, il laisse la responsabilité aux élèves d'élaborer une technique mais, pour les aider, il leur propose de lire un exercice corrigé dans le Déclic. Ceci est effectivement un moyen pour amener les élèves à s'approprier une technique, mais il faut que ce type de travail fasse partie de la culture de la classe, ce qui n'est pas forcément le cas pour celle de Julien, d'autant plus qu'il se plaint d'un manque de travail personnel. Ce moyen demanderait sans doute une négociation spécifique avec la classe, qu'il n'a visiblement pas menée.

Nous retrouvons cette pratique lors de l'étude des types de tâches "résoudre une équation se ramenant à une équation produit" et "résoudre une équation avec une inconnue au dénominateur". Les techniques associées à ces types de tâches ne seront pas explicitées en cours et, suite au cours sur les équations dans lequel il revient sur les équations du premier degré à une inconnue (cf. page 215 de notre thèse) et sur les équations-produits (à travers la résolution de l'équation $(3x + 2)(7 - 5x) = 0$), Julien propose quatre exercices à préparer pour la séance suivante. Deux portent sur la résolution d'équations du premier degré (six spécimens) et les deux autres sont relatifs à des types de tâches plus problématiques : "résoudre une équation se ramenant à une équation-produit" (trois spécimens) et "résoudre une équation avec une inconnue au dénominateur" (huit spécimens). Pour ces deux exercices, Julien demande alors à ses élèves de lire au préalable deux exercices résolus dans leur manuel dans lesquels les auteurs précisent les méthodes à utiliser et présentent des exemples de résolution.

En conclusion, au cours de ses deux premiers mois d'enseignement, Julien est donc dans une situation bien plus problématique que celles de Benjamin et Marie. Il rencontre des difficultés de gestion de classe et des difficultés à enseigner l'algèbre. Ces difficultés s'expliquent en partie par le fait que Julien n'a pas anticipé en début d'année les problèmes que ses élèves pouvaient rencontrer en algèbre. Par ailleurs, l'analyse de ses pratiques fait apparaître de réelles faiblesses en ce qui concerne les moments d'élaboration des techniques et l'organisation du travail des techniques. Néanmoins, l'analyse des pratiques de Julien en début d'année fait apparaître une certaine réflexion relativement à l'enseignement de l'algèbre qui nous semble tout à fait pertinente. C'est sur cette caractéristique que nous allons insister dans la partie suivante.

II.2 - Une réflexion pertinente sur l'enseignement de l'algèbre :

L'étude du premier entretien de suivi et des premières stratégies d'enseignement relativement à l'algèbre nous amène à pointer des traces de réflexions (menées autour de la question du sens en algèbre et d'un questionnement sur les responsabilités à laisser aux élèves) sur l'enseignement de l'algèbre qui nous semblent pertinentes et vont contribuer ensuite à une évolution des pratiques de Julien, comme nous le verrons dans le paragraphe II.3. Nous consacrons à ces deux questions les paragraphes II.2.1. et II.2.2.

Par ailleurs, nous considérons que Julien a des ambitions mathématiques qui peuvent contribuer à faire évoluer son rapport professionnel à l'algèbre, c'est ce que nous étudierons dans le paragraphe II.2.3.

II.2.1 - La question du sens en algèbre :

Comme nous l'avons vu lors de l'étude de son cours sur les puissances, Julien est sensible au fait que les élèves ne donnent pas toujours de sens aux règles algébriques. Ainsi, contrairement à Benjamin et Marie, il apporte plus d'éléments technologiques dans ses cours de révision du collège.

Par ailleurs, l'analyse de certains exemples ou exercices choisis par Julien montre qu'ils peuvent conduire à une réflexion sur la forme d'écritures algébriques et sur les informations qu'elles apportent quant au choix des méthodes à appliquer. Un tel travail peut également contribuer à la construction du sens, et des écritures et des manipulations algébriques.

De plus, les difficultés que Julien rencontre lors de l'enseignement de l'algèbre le conduisent à s'interroger sur les moyens à employer pour faciliter la tâche des élèves en algèbre, notamment en limitant les calculs. Il évoque, alors, dans le premier entretien la possibilité d'articuler le registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques pour traiter certains types de tâches algébriques qui lui semblent trop complexes si les élèves doivent les traiter uniquement dans le registre des écritures algébriques :

> J : Puis le signe de ax+b, je le traiterai avec les fonctions comme c'est proposé dans le livre de la classe. Je me suis dit que, si je le traitais en algèbre pure avec les comparaisons de carrés, d'inverses, de racines carrées, cela n'allait pas bien passer parce qu'ils ne sont pas bons en algèbre. C'est pour cela que j'ai commencé par les généralités sur les fonctions pour pouvoir faire fonctions affines.

Cette réflexion sur la question du sens en algèbre s'accompagne également d'un questionnement sur les responsabilités à laisser aux élèves, que nous reprenons ci-dessous.

II.2.2 - Une réflexion sur les responsabilités à laisser aux élèves :

L'étude menée dans la partie II.1 a montré le peu de responsabilités que Julien laisse à ses élèves au début de l'enseignement. Toutefois, lors du premier entretien, il nous semble que sa vision de la place à laisser aux élèves évolue. En effet, à la fin du mois de novembre, il met en place, avec un de ses collègues stagiaires, une séance de module dans le cadre de l'opération séance pendant laquelle les élèves doivent montrer les égalités suivantes :

1)	$-\frac{1}{2}(5\sqrt{6}-2)(4-\sqrt{6}) = 19-11\sqrt{6}$
2)	$-\frac{1}{2}(t-5)^2+8 = \frac{(9-t)(t-1)}{2}$ *pour tout réel t.*
3)	$\frac{5-\sqrt{2}}{23} = \frac{1}{5+\sqrt{2}}$
4)	$(x-3)(x+2)-x^2+x(x-4) = (x-6)(x+1)$ *pour tout réel x.*
5)	$\frac{3\pi^2+9\pi}{18\pi} = \frac{\pi+3}{6}$
6)	$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2 = (a^2+b^2)^2$, *a et b étant deux réels.*

7)	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, *a et b étant deux réels.*	
8)	$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 4\,(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$, *a, b, c et d étant des réels.*	
9)	$x^3 - (x - 13)^2 - 8(x + 3\sqrt{2})(x - 3\sqrt{2}) = (x - 2)(x - 3)(x - 4) - 1$ *pour tout x réel.*	

Ils ont alors pour objectif d'amener les élèves à dégager eux-mêmes des méthodes :

J : Dans l'opération séquence, on a fait une séance pour établir des méthodes pour montrer une égalité. On leur a donné une liste d'égalités et on leur demandait de les montrer. On ne voulait pas leur donner les méthodes. Dans le livre, ils donnent la méthode. Mais, nous, on voulait qu'ils trouvent eux-mêmes la méthode. Et s'ils ne la trouvaient pas, on voulait qu'ils soient demandeurs de la méthode.

La description de cette séance, au cours du premier entretien, montre encore une fois que Julien n'a pas su trouver les moyens didactiques adéquats pour gérer ce type de travail et qu'il s'est alors, de nouveau, retrouvé en difficulté. Mais nous jugeons cette première réflexion intéressante. Soulignons qu'elle n'est jamais apparue chez Marie et que Benjamin ne s'est interrogé sur cette question que beaucoup plus tard dans l'année.

Nous verrons, dans le paragraphe II.3, quelles influences ces deux réflexions ont eues sur l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre de Julien. Un deuxième aspect qui peut également avoir contribué à l'évolution de Julien est son ambition mathématique. Nous l'abordons brièvement ci-après.

II.2.3 - Des ambitions mathématiques :

Comme nous l'avons déjà pointé dans la partie II.1, Julien a des ambitions mathématiques qui le conduisent à consulter des ressources didactiques autres que les manuels scolaires. Les difficultés, non prévues, que rencontrent ses élèves en début d'année réduisent ces ambitions. Mais, il souhaite tout de même que ses élèves apprennent à raisonner. Au bout de deux mois d'enseignement, il propose ainsi un devoir à préparer à la maison dans lequel il place, entre autres, des exercices qui vont demander plus de recherche aux élèves, comme l'exercice suivant extrait du Terracher[125] :

> *1 – Quelle réponse "spontanée" donneriez-vous à la question suivante :*
> *Combien de fois pensez-vous pouvoir plier en deux (à chaque fois sur elle-même) une feuille de papier pour machine à écrire ? (Faire un essai...)*
> *2 – Supposons que nous disposions d'une feuille de papier (assez grande) d'une épaisseur de $\frac{1}{20}$ mm.*
> *Nous la plions en deux sur elle-même, puis de nouveau en deux, etc. Et cela 20 fois de suite.*
> *Quelle est l'épaisseur de la feuille ainsi obtenue ?*

A travers ce dispositif, Julien souhaite proposer un travail mathématique qui sort de l'application de techniques aux élèves qui veulent travailler ("Au moins que ceux qui veulent le faire puissent le faire, les autres s'ils ne le font pas... ").

[125] Précisons que ce manuel est également utilisé lors de la préparation à la deuxième épreuve orale du CAPES de mathématiques et il est souvent considéré comme une référence lorsqu'un étudiant recherche un exercice plus complexe. C'est dans ce sens que Julien l'a utilisé ici.

Comme pour Benjamin et Marie, les pratiques de Julien vont elles aussi évoluer et les différents aspects que nous venons de reprendre ci-dessus vont contribuer à ces évolutions auxquelles nous consacrons la partie suivante.

II.3 - Les évolutions :

Les évolutions repérées sont relatives à deux axes que nous nous sommes proposé d'étudier pour analyser le rapport professionnel à l'algèbre de professeurs stagiaires. Le premier concerne l'élaboration de stratégies d'enseignement et nous le traiterons dans les parties II.3.1 et II.3.2 que le regard de Julien sur la conception de cours et sur la place à laisser aux élèves lors de l'élaboration de techniques a fortement changé. Le deuxième axe pour lequel nous notons une réelle évolution, est celui relatif à la vision des élèves et de leurs difficultés. Nous y consacrons la partie II.3.3.

II.3.1 - L'évolution au niveau de la conception des cours :

Une première évolution concerne l'attention portée aux élèves et à l'aide que Julien peut leur apporter dans leur apprentissage. Ceci apparaît d'abord à travers une évolution de la vision des cours. Julien devient, en effet, progressivement plus attentif à l'établissement d'un lien entre le cours proposé et les types de tâches effectivement étudiées dans le chapitre, comme il nous l'explique dans le deuxième entretien :

> J : Je m'appuie sur le Déclic et sur le Terracher suivant ce que je compte faire en exercice. En fait, j'essaie de regarder tous les problèmes qu'ils proposent. Après je sélectionne des problèmes puis des exercices. Et, après, je fais mon cours en fonction de ce que je choisis. Je me suis rendu compte qu'au début, je faisais le cours et après on faisait les exercices. Mais il y avait des choses dans le cours qui ne servaient pas. [...] A priori quand on sort des études, on se dit que c'est important donc on insiste dans le cours, puis cela ne sert pas dans les exercices.

Un deuxième aspect qui nous montre cette évolution est le souci d'amener les élèves à découvrir des notions ou des propriétés avant de les institutionnaliser. Ce souci est perceptible dans le chapitre de généralités sur les fonctions à travers le choix de Julien de commencer ce chapitre par des activités préparatoires. Mais, à ce moment de l'année, le lien entre les activités et le cours proposé n'est pas évident. Dans les chapitres sur les fonctions affines et les fonctions usuelles, Julien choisit de nouveau de consacrer les premières séances à des activités préparatoires et l'analyse des cours fait apparaître un lien plus clair entre activités et cours. Pour la notion de fonction affine, Julien organise d'abord une re-rencontre à travers l'étude de deux activités préparatoires proposées dans le Déclic. Deux situations de la vie courante y sont modélisées : une première fonction linéaire ($f : x \longmapsto 34x$) représente la recette obtenue en fonction de la quantité x de café vendue par un supermarché et une deuxième fonction affine ($g : x \longmapsto 25x + 315$) modélise le coût total sur cette vente. Les questions posées dans ces activités conduisent les élèves à tracer les représentations graphiques de ces fonctions, à retrouver deux propriétés de ce type de fonction (nature des représentations graphiques, proportionnalité des accroissements). Suite à ces activités, Julien commence le cours par la définition d'une fonction affine. Il établit alors un lien avec les activités en illustrant cette définition par les fonctions f et g et en reprenant les deux propriétés étudiées. Au cours de ce chapitre, nous retrouvons le souci de Julien, que nous avons déjà pointé précédemment, en ce qui concerne la justification de certaines propriétés, comme ici pour la propriété caractéristique des fonctions affines :

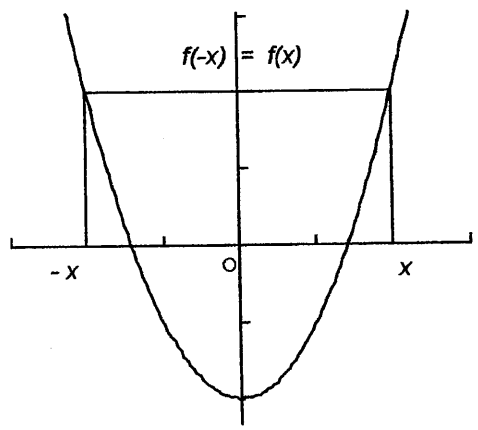
Propriété caractéristique des fonctions affines :
Si $f(x) = ax + b$, alors pour tous réels x_1 et x_2 $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

L'accroissement des images est proportionnel à l'accroissement des variables.
Réciproquement si f est une fonction vérifiant pour tous x_1 et x_2 $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$, *alors f est affine de coefficient a.*
Preuve : Soit x un réel, $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = a$, *donc* $f(x) - f(x_1) = a(x - x_1)$
$f(x) = a(x - x_1) + f(x_1) = ax - ax_1 + f(x_1)$.

La première partie de cette propriété n'est pas démontrée dans le cours, mais les élèves l'ont déjà rencontrée dans l'une des deux activités préparatoires qu'ils ont traitées avant le cours. Par ailleurs, avant ce cours, Julien leur avait demandé de calculer, dans le cahier d'exercices, le rapport $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ pour la fonction $f : x \longmapsto 2x - 1$ en prenant différentes valeurs pour x_1 et x_2.

Cette nouvelle caractéristique des cours apparaît aussi dans le chapitre sur les fonctions usuelles. Pour commencer son chapitre, Julien choisit trois activités extraites du Déclic dans lesquelles sont abordées différentes notions qui vont faire l'objet du cours. Les deux premières conduisent les élèves à étudier les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ (courbes représentatives, détermination d'images et d'antécédents, étude de la parité de la fonction carré, comparaison de x et x^2, comparaison des inverses de deux nombres...). La troisième activité est relative aux propriétés des représentations graphiques des fonctions paires et impaires : les élèves doivent y étudier la parité de fonctions dont la représentation graphique est donnée, puis ils doivent compléter les courbes représentatives de fonctions paires ou impaires. Julien débute ensuite son cours sur la notion de parité dans lequel après avoir défini la notion d'ensemble centré en zéro, il propose la définition suivante :

2 – Définitions :
On appelle fonction paire une fonction f telle que :
son ensemble de définition est centré en zéro,
pour tout réel $x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$
Exemple : la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2$.
Traduction graphique :



La représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Il existe bien ici de nouveau un lien entre les activités préparatoires et le cours car les différents aspects pointés dans cette définition ont été effectivement abordés dans les activités préparatoires. Le souci d'établir ce lien apparaît aussi dans le choix d'illustrer cette définition sur la fonction carré étudiée précédemment. La démarche utilisée pour la définition d'une fonction impaire est la même et Julien l'illustre par la fonction inverse. Comme la parité de cette fonction n'avait pas été étudiée précédemment, Julien propose dans le cours la preuve algébrique de l'imparité de cette fonction.

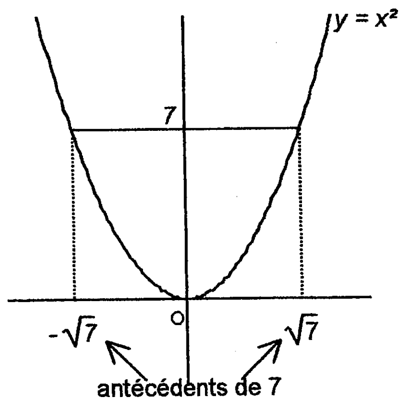
Un deuxième niveau d'évolution de Julien quant à la construction de stratégies d'enseignement est relatif aux moments d'élaboration et d'explicitation de techniques.

II.3.2 - L'élaboration et l'explicitation de techniques :

L'analyse des pratiques de Julien montre également des évolutions en ce qui concerne l'explicitation de techniques et l'organisation du travail technique. A partir du chapitre sur les fonctions affines, Julien se montre ainsi beaucoup plus attentif à l'aide qu'il peut apporter à ses élèves lors de la découverte de nouveaux types de tâches et de nouvelles techniques. Il choisit alors une stratégie d'ostension des techniques sur un exemple, comme pour le type de tâches "résoudre une équation du type $x^2 = a$" re-rencontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles :

Résolution de l'équation $x^2 = 7$

<u>Méthode graphique :</u>



Résoudre l'équation $x^2 = 7$, c'est trouver toutes les valeurs de x telles que $x^2 = 7$.

On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur IR

Résoudre l'équation, c'est trouver les valeurs de x telles que $f(x) = 7$, c'est à dire trouver les antécédents de 7 par f.

Les antécédents de 7 par f sont $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$ donc les solutions de l'équation $x^2 = 7$ sont $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

<u>Méthode algébrique :</u>

$x^2 = 7$ équivaut à $x^2 - 7 = 0$ $\qquad$ *$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$*

équivaut à $(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = 0$

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul

équivaut à $x + \sqrt{7} = 0$ ou $x - \sqrt{7} = 0$

équivaut à $x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$

L'équation admet deux solutions : $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$, $S = \{-\sqrt{7} ; \sqrt{7}\}$

Le cahier de bord de Julien indique qu'il s'est inspiré d'un exercice corrigé du Déclic dans lequel est exposée une méthode pour résoudre graphiquement ce type d'équation et les inéquations du type $x^2 \geq a$ ou $x^2 \leq a$ et dans lequel trois équations (dont l'équation $x^2 = 7$) et trois inéquations de ce type sont résolues. En début d'année, Julien aurait sans doute demandé à ses élèves de lire cet exercice avant de résoudre d'autres équations. Désormais sa démarche est toute autre : il a le souci d'étudier avec ses élèves cette technique. Par ailleurs, le texte du manuel est centré sur la technique et aucun élément technologique n'est fourni :

> *<u>Exercice résolu n°1 p 131 :</u>*
> *<u>Méthode :</u>*
> - *On trace l'allure de la parabole d'équation $y = x^2$.*
> - *Pour une équation $x^2 = \lambda$, on place λ sur l'axe des ordonnées et on cherche les abscisses des points de la parabole ayant λ pour ordonnée.*
> - *Pour une inéquation, suivant le sens de l'inégalité, on lit les abscisses des points de la courbe situés au-dessous (<) ou au-dessus (>) de la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.*

Notons toutefois qu'avant cet exercice résolu, il existe dans ce manuel un TP qui conduit les élèves à élaborer une technique pour résoudre les équations du type $x^2 = a$. L'étude du texte produit par Julien montre alors qu'il n'a pas recopié le texte du manuel mais qu'il a construit un énoncé dans lequel nous notons son souci de justifier la méthode étudiée.

Suite à l'introduction de cette technique, Julien propose un exercice à préparer à la maison pour amener ses élèves à la travailler :

> *<u>Ex n°13 p 136 :</u>*
> *A l'aide de la courbe d'équation $y = x^2$ résoudre :*
> *1 – a) $x^2 = \frac{4}{9}$ b) $x^2 = \frac{1}{4}$ c) $x^2 = \frac{3}{2}$ d) $x^2 = 25$ e) $x^2 = 0$*

Cet exercice constitue, en fait, une application directe de ce qui a été étudié en classe. Cette technique sera ensuite travaillée sur des exercices du même type mais faisant intervenir d'autres fonctions ($x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ par exemple) ou sur des exercices qui nécessitent d'abord une transformation de l'équation, comme pour l'exercice suivant :

> *<u>Ex n°49 p 139 :</u>*
> *Résoudre les équations suivantes en appuyant le raisonnement sur un graphique :*
> *a) $x^3 - 8 = 0$ c) $125x^3 - 1 = 0$*

Environ une semaine après avoir étudié la méthode reprise ci-dessus avec ses élèves, Julien propose en classe un exercice qui conduit à une complexification de la technique, puisque les élèves doivent d'abord effectuer un changement d'inconnue :

> *<u>Exercice supplémentaire :</u>*
> *Résoudre $(x - 4)^2 = 9$ et $(1 + 2x)^2 = 9$ (aide : résoudre d'abord $X^2 = 9$)*

Nous retrouvons donc ici le souci de complexification que nous avions repéré lors de l'analyse du travail algébrique sur les premiers chapitres de l'année, mais nous repérons aussi une première évolution dans l'organisation du travail de la technique. En effet, lors des premiers chapitres, la complexification n'était pas progressive et jamais Julien n'avait fait traité en classe un exercice plus compliqué. Désormais, Julien semble avoir la volonté d'aider ses élèves lors des améliorations en leur proposant d'abord un travail en classe, puis en leur proposant ensuite à la maison des exercices leur permettant de s'entraîner, comme l'exercice suivant :

Ex n° 44 p 139 :
En utilisant la courbe $y = \sqrt{x}$*, résoudre : b)* $\sqrt{2 - x} = 5$

L'étude de ces exercices fait également apparaître un changement des pratiques quant au choix des exercices pour le travail technique. Il sélectionne dans les exercices du manuel certaines tâches et ne donne pas tout l'exercice à traiter. Par ailleurs, nous pouvons également repérer ici une autre évolution dans l'organisation du travail technique qui concerne l'étalement dans le temps.

Les pratiques de Julien en ce qui concerne l'explicitation des techniques tendent donc à se rapprocher de celles de Benjamin et Marie : il fonctionne, en effet, désormais lui aussi par ostension des techniques que les élèves s'approprient ensuite à travers des exercices qui se complexifient progressivement. Par ailleurs, il semble bien que la responsabilité laissée aux élèves quant à l'élaboration de ces technique est très limitée. Néanmoins, nous pointons ici la sensibilité de Julien à justifier les méthodes étudiées.

Au cours du chapitre consacré aux fonctions usuelles, Julien commence à percevoir que ses élèves ont du mal à donner du sens aux méthodes présentées ostensivement. Ainsi, lors du deuxième entretien, il évoque des difficultés de certains élèves lors de la mise en pratique de la technique d'étude des variations d'une fonction qui a été étudiée sur le même schéma que la technique de résolution graphique d'équations :

J : Souvent quand je leur dis "comment vous avez fait ? ", ils déballent leurs calculs. Ils ont du mal à dire leur méthode, à dire : "j'ai pris deux réels rangés dans un certain ordre, je veux voir si les images sont rangées dans le même ordre". Ils ont du mal. Je crois que cela montre qu'ils ne maîtrisent pas bien la méthode. Ils n'arrivent pas à la synthétiser.

Suite à ce chapitre, Julien commence le chapitre sur la géométrie analytique dans lequel il aborde la notion d'équation de droite. Il repère que ses élèves ont du mal à donner du sens à cette notion. Sa réflexion sur cette difficulté le pousse alors à s'interroger sur les limites d'un travail uniquement centré sur l'application de techniques, comme il nous l'explique lors du troisième entretien :

J : Pour les équations de droites, c'est surtout un problème de sens. A la rigueur ils savent dire : "Ah, ça c'est une équation de droite". Mais ils ne savent pas à quoi cela correspond. Je leur ai demandé : "Qu'est-ce que ça veut dire que ax+b égale machin est une équation de droite ? ". Ils ne savaient pas dire que... Et même quand je leur ai dit, cela n'avait pas l'air de leur sembler évident que x et y étaient les coordonnées des points de la droite.

AL : Ils savent déterminer, à la limite, une équation de droite mais ils ne savent pas à quoi cela correspond ?

P : Oui, voilà c'est ça. Un problème de sens. Cela m'a frappé sur les équations de droites. Finalement c'est embêtant. Je me dis que c'est parce qu'ils ont dû voir des méthodes, beaucoup de calculs. Et puis finalement...

Il perçoit ici que les élèves peuvent savoir appliquer des règles, utiliser des techniques sans pour autant avoir construit du sens pour les objets qu'ils manipulent et que cette construction est nécessaire.

Finalement, en fin d'année, ses pratiques pour l'introduction de nouvelles techniques ont profondément évolué. Ceci apparaît très clairement lors de l'étude du signe d'un produit. Avant cette étude, Julien propose un premier travail sur l'étude du signe de ax+b qu'il nous décrit dans le dernier entretien :

J : Donc j'ai commencé par les droites et en faisant avec le graphique. J'ai essayé jusqu'au bout de faire le lien avec le graphique. Mais bon, pour étudier le signe après, pour que cela aille plus vite, il fallait bien une méthode. Donc il y en a qui ont proposé : "On commence par chercher le nombre qui annule l'expression". Bon ça c'était clair. Et ensuite on savait que c'était d'un signe d'un côté puis de l'autre côté. Il y en a qui ont proposé de prendre des valeurs. Je leur ai dit : "Ouais, faut faire ça". Et je leur ai dit aussi : "Si vous voulez vous pouvez aussi regarder le signe du coefficient de x". Après coup, je n'aime pas trop cette méthode : c'est vraiment bidouille. [...] Cela peut risquer de faire des confusions. J'ai remarqué après que si on n'avait plus une expression... Par exemple si on avait un carré, ils ont tendance à regarder le coefficient aussi. Bon, cela ne va plus là. Je m'en suis rendu compte après. Donc je me demande si c'est pas mieux de donner des valeurs.

Cette description fait donc apparaître le fait que Julien laisse désormais plus de responsabilités à ses élèves quant à l'élaboration des techniques, même s'il reste encore assez présent puisque c'est lui qui propose de généraliser l'étude du signe de ax + b en considérant le signe de a. Cette citation nous permet également de pointer deux caractéristiques du travail algébrique proposé par Julien sur lesquelles nous reviendrons dans la suite de cette étude. La première caractéristique est la place importante faite à l'articulation du registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques. En début d'année, nous l'avons vu précédemment, lorsque Julien a été confronté aux difficultés de manipulation de ses élèves qu'il n'avait pas prévues, il avait envisagé ce moyen pour pallier à ce type de difficultés. Sa vision de l'utilisation ded représentations graphiques semble ici avoir évolué, puisqu'il utilise ici les droites pour donner du sens au problème étudié. Ce n'est plus seulement un moyen de pallier les difficultés des élèves puisqu'il fait ensuite élaborer une méthode algébrique d'étude du signe de ce type d'expression. La deuxième caractéristique concerne une réflexion sur le sens que les élèves donnent aux techniques et sur le fait qu'ils les utilisent parfois de manière automatique sans réfléchir aux conditions de leur mise en œuvre.

Lors de l'étude du signe d'un produit, Julien n'introduit pas tout de suite les tableaux de signes comme l'avaient fait Benjamin et Marie. Il cherche d'abord à ce que ses élèves s'approprient le problème et recherchent une technique pour étudier le signe d'une telle expression :

J : Et puis ensuite je leur ai donné un exemple où il y avait un produit et je les ai laissés se dépatouiller : "Qu'est-ce qu'on pourrait faire ? ".[...] Au début, il y en a un qui a développé. Alors je lui ai dit : "Ouais et tu sais faire le signe de ça ? – Ah non, il y a un carré". Déjà j'ai dit : "Bon c'est bien, on ne sait pas. Donc ce n'est pas bon de développer". Je leur ai fait se rendre compte qu'il ne fallait pas développer. Apparemment ils ont bien compris. Et puis je les ai laissé chercher et il y en a un qui a dû trouver qu'on avait un produit.

AL : Et qu'il fallait chercher le signe de chaque facteur ?

P : Oui, mais il a fallu que je les aide quand même un peu. Mais j'ai pas pu rester longtemps là-dessus parce que c'était fin mai.

Le manque de temps l'oblige alors à reprendre la main dans l'élaboration de cette technique. Mais, il est clair ici que Julien a développé une réflexion sur la place à laisser aux élèves lors d'un tel moment que Benjamin et Marie n'ont pas eue au cours de leur année de stage.

Une troisième grande évolution dans le rapport professionnel de Julien à l'algèbre concerne le repérage, la prise en charge et l'interprétation des difficultés que les élèves rencontrent en algèbre.

II.3.3 - La vision des difficultés en algèbre :

Comme nous l'avons noté précédemment, en début d'année, Julien était assez démuni face aux difficultés de ses élèves. A partir du deuxième entretien, il nous apparaît beaucoup plus serein relativement à ce point. Il a, en fait, développé un système de prise en charge de certaines difficultés qui lui paraît assez satisfaisant. Ce système repose sur deux points : une réflexion sur le sens que les élèves peuvent donner aux écritures algébriques et sur l'articulation du registre des écritures algébriques avec celui des représentations graphiques. Sa sensibilité à la question du sens semblait en germe lors du premier entretien, mais il semble qu'une réelle réflexion est née suite à lecture pour la préparation de son mémoire professionnel d'un livre de S.Gasquet[126]. Lors du deuxième entretien, Julien nous expliquera qu'il s'est, en particulier, inspiré de cet ouvrage lors de l'élaboration de son contrôle relatif au chapitre "Géométrie dans l'espace":

J : J'ai essayé de les faire réfléchir plutôt que de leur donner des exercices calqués uniquement sur ce que l'on a fait en cours.

Dans cet entretien, il nous précise également que cette lecture l'a amené à développer de nouvelles stratégies de prise en charge pour certaines difficultés de manipulation :

J : Quand je vois que des élèves ne savent pas l'identité remarquable $(a+b)^2$, je ne lui dis pas "rappelle-t-en" mais je lui dis de développer (a+b)(a+b). Je suis assez d'accord avec ce que Sylviane Gasquet dit : l'égalité $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ne sert que dans le sens de la factorisation. Et comme on a tendance à lire une égalité de gauche à droite, ce serait bien de la voir dans l'autre sens.

Alors que, en début d'année, son système interprétatif de certaines difficultés de manipulation de ses élèves était essentiellement centré autour du fait que ses élèves ne connaissaient pas leurs formules, il semble avoir pris conscience qu'en travaillant sur le sens de certaines écritures on peut aider les élèves sans se limiter à leur demander de retenir par cœur certaines formules du cours.

Nous avons aussi noté précédemment une réflexion qui s'est développée relativement au sens que les élèves donnent aux méthodes étudiées. Cette réflexion semble découler d'une prise de conscience des difficultés de ses élèves à donner du sens à la notion d'équation de droite. Lors du dernier entretien, nous notons que cette réflexion s'est élargie à d'autres objets

[126] GASQUET S. (1997). L'illusion mathématique, le malentendu des maths scolaires. Editions La Découverte et Syros, Paris.

(la notion de solution d'une équation, par exemple) ou aux manipulations algébriques, comme la manipulation de puissances :

> J : Avec les puissances, je ne pense pas que ce soit un problème sur les puissances, c'est un problème d'écriture. On invente une règle de circonstance pour simplifier l'expression. Je pense que c'est un problème plus général. Il faudrait que les élèves se disent : "Quand je fais quelque chose, qu'est-ce qui me permet de le faire ? ". Mais, apparemment, ce n'est pas évident, même pour personne. A l'université on est souvent en train de faire des choses qu'on ne devrait pas faire.[...] Il faut avoir le réflexe de se demander si on a le droit d'écrire certaines choses à chaque étape du raisonnement ou du calcul. Comme ça on évitera pas mal de choses.

Cette réflexion est tout à fait intéressante, mais ne semble pas lui avoir permis pour le moment d'envisager des stratégies d'enseignement pour prendre en charge ce type de difficulté. Nous trouvons la même caractéristique en ce qui concerne sa réflexion sur les difficultés à donner du sens à la notion de solution d'une équation et sur les stratégies que l'on peut mettre en place :

> AL : Comment avez-vous repéré qu'ils ne donnaient pas de sens à la notion d'équation, mises à part les équations de droites ?
>
> J : Parce que, quand je leur ai posé la question : "Qu'est-ce que cela veut dire qu'on est solution de machin ? ", tout de suite ils ont commencé à me donner une méthode en fait. [..] On dirait qu'ils ne font pas attention à la question, tout de suite c'est : "On fait ça, on fait ça. On met le x d'un côté et les nombres de l'autre". Ils savent le dire ça.
>
> AL : Si vous avez des secondes l'année prochaine ou même des classes de collège, comment envisagez-vous de faire travailler ce point ?
>
> J : De travailler plus sur le sens. De dire ce qu'est une équation. De le rappeler à chaque fois qu'on a une équation : "Qu'est-ce que ça veut dire d'avoir une équation ? Quand j'ai une équation qu'est-ce que je cherche ?", avant de passer à la méthode.

La prise en charge envisagée est ici uniquement centrée autour d'un discours autour de la tâche à réaliser qui devrait pour lui devenir un rituel et il n'a pas envisagé d'autres types de stratégies. Pourtant, un exercice contribuant à faire évoluer le rapport des élèves à la notion de solution à une équation figurait sur la feuille d'exercices de module lors de la deuxième séance de formation didactique consacrée à l'algèbre :

> *Soit $f(x) = x^2 + x - 6$*
>
> *1 – Calculer $f(-3)$, $f(1)$ et $f(2)$.*
>
> *2 – Donner deux solutions de l'équation $f(x) = 0$.*

Mais, la formation est pour lui arrivée beaucoup trop tôt et n'a pas eu d'influence sur sa vision de la prise en charge de telles difficultés.

Son système de prise en charge des difficultés de ses élèves repose également sur l'articulation du registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques. Comme nous l'avons vu précédemment, Julien avait déjà évoqué cet aspect lors du premier entretien pour prendre en charge certaines difficultés (par exemple, l'oubli de la solution négative de l'équation $x^2 = a$ avec a positif) ou pour travailler certaines notions algébriques (signe de ax + b, comparaison des carrés de deux nombres par exemple)[127]. Dans la suite du travail algébrique qu'il propose, cet aspect prendra une large place et, lors du dernier entretien, il nous explique qu'il est tout à fait satisfait du travail mené avec ses élèves :

J : Moi je suis assez content de la tactique de partir avec les représentations graphiques. Je trouve que c'est pas mal. Surtout avec les élèves que j'avais : ils ne savent pas additionner deux fractions sans faire une erreur. Donc, algébriquement, je me suis rendu compte que j'aurais plein de problèmes. Enfin ce n'est pas une raison pour ne pas le faire. Je préférais aborder d'abord l'aspect graphique et leur montrer ensuite que quand on était limité avec le graphique, on n'avait pas le choix, il fallait le faire algébriquement.

Enfin, contrairement à ce qu'on aurait pu penser suite au premier entretien, lors du travail sur les fonctions, Julien ne limite pas le travail de ses élèves à des types de tâches qui peuvent se traiter uniquement dans le cadre graphique et il propose des types de tâches à traiter dans le cadre algébrique, comme il nous l'explique dans le deuxième entretien :

J : Pour le sens de variation on regarde d'abord le graphique pour savoir s'il faut montrer qu'elle est croissante ou décroissante. Après, si on veut monter qu'elle est croissante, on va manipuler les inégalités. Là on n'a pas le choix, il y a des choses à savoir. Cela, ça fait partie des choses à savoir.

Ce travail sur l'étude des variations lui permet, par ailleurs, de prendre conscience d'un problème que Marie n'a visiblement pas repéré et auquel Benjamin n'a été sensibilisé que lors de la séance filmée : la difficulté de certains élèves à utiliser les lettres pour prouver une propriété. Julien nous l'explique dans le deuxième entretien :

J : Il y en a pas mal qui ont du mal à manipuler les lettres. Souvent ils veulent prendre des valeurs particulières. Pour la croissance, au début je leur ai dit : "on va prendre deux réels, mais a priori il faut le montrer pour tous les réels de l'intervalle". Mais je leur dis : "Si on prend 2 et 3, on va montrer que ça marche pour 2 et 3. Après il faudrait prendre 4 et 5, etc... Il faudrait faire ça avec tous les réels. C'est pas possible. Donc, ce qu'on fait en maths à ce moment-là : on prend deux réels mais on ne présume pas de ce qu'ils sont, donc on les appelle par une lettre." . Il y en a quand même qui veulent prendre des exemples. Je ne sais plus dans quel sens cela s'est passé : si je leur ai expliqué avant ou après, quand ils ont voulu prendre des nombres. Dans la définition, au lieu de dire "soient x et y deux réels", j'ai dit "on prend x et y deux réels". Je ne sais pas si cela change grand-chose. Le "soit" cela n'a pas l'air de leur dire quelque chose.

Il est donc confronté ici à l'un des niveaux de rationalité décrits par B.Grugeon où les justifications restent du côté du numérique. Nous notons que la prise en charge de ces difficultés est toujours située autour d'un discours relatif à la tâche et Julien ne leur montre pas à travers des contre-exemples la nécessité d'utiliser les lettres. En outre, nous notons qu'il ne semblait pas s'attendre à de telles difficultés et qu'il n'a pas proposé de stratégies pour les prendre en charge.

Son système d'interprétation de ce type de difficulté est centré autour des différents statuts de la lettre mais il a du mal à expliquer son point de vue, comme le montre la citation suivante :

[127] Il semble ici être influencé par son manuel dans lequel les auteurs ont choisi une progression qui permet de proposer l'articulation du registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques qui est préconisée dans les programmes pour l'étude de certaines inégalités ou du signe de certaines expressions.

J : La lettre, elle sert à cacher la particularité du nombre. Là, je prends l'exemple de la démonstration. On n'a pas le même problème quand on fait du calcul algébrique, avec des identités remarquables... Là la lettre, ils le comprennent mieux : c'est un nombre. Alors que quand on fait une démonstration, cela peut-être n'importe quel nombre. C'est la même chose et pourtant c'est deux aspects différents, je n'arrive pas bien à l'expliquer.

Il a donc conscience de l'existence de différents statuts de la lettre en algèbre mais cela reste également confus pour lui. Par ailleurs, ses propositions de prises en charge sont également très peu claires : il reste encore au niveau du discours et ne propose pas de moyen pratique pour mettre en place ces stratégies. Il nous l'explique ci-dessous :

J : Je pense que ce serait bien de bien montrer pourquoi on prend la lettre. On pourrait prendre un nombre et ensuite prendre une lettre et dire qu'on cache la particularité du nombre. Je ne sais pas, on peut prendre un nombre pair et qu'on utilise sa parité et on peut arriver à des conclusions fausses. Je ne sais pas si c'est possible.

Synthétisons maintenant les résultats obtenus lors de l'étude du profil de Julien.

II.4 - Conclusion :

Julien est donc un stagiaire pour qui le début de l'enseignement de l'algèbre est fortement problématique. L'analyse de ses stratégies d'enseignement en début d'année a, en fait, montré que les difficultés qu'il rencontre sont avant tout dues à des problèmes plus généraux relatifs à la gestion d'une classe et à celle d'une séance. Elles sont également dues à un manque de prise d'information sur les connaissances anciennes des élèves, ce qui conduit un décalage entre ses attentes et les compétences visiblement assez faibles de ses élèves. D'une manière plus générale, il semble que Julien ait du mal à passer de la position d'étudiant à celle d'enseignant.

L'analyse du travail algébrique en début d'année fait, quant à lui, apparaître des similarités avec ce qui est proposé par Benjamin et Marie. En effet, comme pour ces deux stagiaires, Julien organise un travail essentiellement centré sur la dimension objet de ce domaine des mathématiques et nous voyons apparaître un schéma didactique assez semblable à ceux mis en place par Benjamin et Marie : une reprise dans le cours des différentes règles déjà étudiées au collège, puis un travail des techniques avec la même volonté de complexification. En revanche, contrairement à ces deux stagiaires, nous trouvons très tôt dans l'analyse des pratiques de Julien des traces de réflexion sur la question du sens en algèbre et sur la responsabilité à laisser aux élèves. Mais la gestion du travail technique mise en place et la difficulté de négocier certains aspects de ce travail "minent" les potentialités de ces réflexions pertinentes. Ce qui lui laisse un sentiment d'échec et surtout ne lui permet pas d'avancer dans la connaissance de ses élèves.

En fait Julien est très ouvert et est demandeur de conseils. Il a su, en particulier, prendre en compte ceux de sa tutrice lors de la première visite au cours du premier trimestre. Ceci lui a permis d'établir dans sa classe une atmosphère de travail plus satisfaisante et, surtout, de mieux comprendre les difficultés de ses élèves, ce qui l'a amené en retour à adapter ses pratiques. A partir de ce moment, nous pouvons noter une nette évolution de son rapport professionnel à l'algèbre qui tend à se rapprocher de celui de Benjamin : l'introduction d'activité préparatoire pour introduire les notions nouvelles, une stratégie d'ostension des techniques, une vision positive des élèves et une réflexion plus poussée sur les difficultés qu'il rencontre. Mais, en s'appuyant sur des lectures personnelles (en particulier le livre de S.Gasquet[128]), la réflexion de Julien sur le sens en algèbre et sur les responsabilités à donner aux élèves va se poursuivre, ce qui conduira à une nouvelle évolution de son rapport à l'algèbre.

Passons maintenant au profil de Claire laquelle exerce aussi avec des élèves qui semblent rencontrer plus de difficultés que ceux de Marie et Benjamin. Mais, contrairement à Julien, elle ne rencontre aucune difficulté à passer de la position d'étudiante à celle d'enseignante, ce qui va l'amener à nouveau type de développement du rapport professionnel à l'algèbre.

III - LE PROFIL DE CLAIRE :

Le suivi individuel de Claire s'est déroulé en 1999/2000. Tout comme Benjamin, elle a participé au dispositif vidéo dans le cadre duquel nous avons filmé en mars 2000, dans sa classe, une séance de module consacrée à une activité introductive pour la notion de fonction. Nous analyserons cette séance dans le chapitre 7.

Depuis très longtemps Claire était attirée par le métier de professeur et plus particulièrement par sa dimension sociale ("C'est un métier de communication et de rapport avec les autres. C'est surtout le côté rapport avec les jeunes qui m'a toujours plu."). Le premier entretien permet également de repérer d'autres aspects de sa vision initiale relative au métier de professeur de mathématiques : c'est une personne qui doit aider ses élèves à réussir dans cette discipline en leur apportant des savoir-faire et en leur apprenant à développer une certaine autonomie face au travail.

Par ailleurs, les mathématiques représentent, pour Claire, structure et logique ; elle apprécie particulièrement qu'elles nécessitent de la recherche et que leur apprentissage ne se limite pas à apprendre par cœur différents résultats. Pour elle, les mathématiques constituent pour chacun un moyen de développer sa propre logique grâce au travail de recherche qu'elles nécessitent, elles peuvent de plus être un outil à la disposition d'autres disciplines telles que les sciences physiques. Enfin, précisons que, comme les autres stagiaires dont les pratiques ont été étudiées précédemment, Claire considère que l'algèbre est plus simple à enseigner parce qu'elle pose moins de difficultés aux élèves que la géométrie :

> C : Je pense qu'en général l'algèbre leur posera moins de problème que la géométrie. Même l'étude des fonctions, cela va être différent. Ce qui va leur poser plus de problèmes, c'est la géométrie. L'algèbre, c'est quelque chose où il y a des étapes bien définies. En général, il y a un petit travail de recherche, mais ils ne sont jamais laissés à eux-mêmes pour voir dans quel ordre il faut aller. Alors qu'en géométrie, en démonstration, cela va être plus difficile.

Cette vision de l'enseignement de l'algèbre la conduit donc à commencer son année par un chapitre d'algèbre[129]. Elle a, par ailleurs, l'intention de débuter par un rappel de

[128] GASQUET S. (1997). L'illusion mathématique, le malentendu des maths scolaires. Editions La Découverte et Syros, Paris.

[129] Précisions la progression annuelle choisie par Claire pour l'enseignement de l'algèbre : chapitre 1 "Calcul numérique" (période du 7/09/99 au 25/09), chapitre 2 "Inégalités, inéquations, approximations" (25/09 au

connaissances qui vont être réutilisées tout au long de l'année : elle propose donc un chapitre de révision sur le calcul numérique et les équations.

Le lycée dans lequel Claire exerce a moins bonne réputation que ceux de Benjamin et de Marie, mais elle ne rencontre visiblement pas de grosses difficultés avec sa classe et semble avoir un bon contact avec les élèves. En fait, lors du premier entretien, Claire paraît tout à fait à l'aise dans son nouveau métier ; tout comme Benjamin et Marie, elle semble se positionner rapidement dans une posture d'enseignante. Ceci apparaît tout d'abord dans sa vision de l'algèbre qui intègre dès la rentrée des objets étudiés dans le secondaire (polynômes, équations). Par ailleurs, Claire met en place, dès le début de son stage, des stratégies d'enseignement dont certaines caractéristiques vont rester stables durant toute l'année scolaire. L'étude de ces stratégies fait apparaître certains points communs avec les pratiques de Benjamin : un travail essentiellement centré sur la dimension objet de l'algèbre[130], une distinction faite entre le travail sur les objets anciens et celui sur les objets nouveaux. L'étude du travail mené sur les notions déjà étudiées au collège montre en revanche la volonté de laisser une certaine responsabilité à ses élèves lors des phases de travail, ce que nous développerons dans la partie III.1. Par ailleurs, l'analyse du travail sur les objets nouveaux met en évidence une grande sensibilité à l'utilisation d'activités préparatoires, nous le verrons dans la partie III.2. La comparaison du profil de Claire à celui de Benjamin montre aussi une réelle cohérence au niveau du travail technique, que nous présenterons dans la partie III.3. Une autre similarité, en début d'année, entre ces deux profils concerne la mise en place d'une stratégie d'ostension des techniques. L'étude du travail de Benjamin a mis en évidence une réflexion tardive sur cette stratégie. En revanche, nous notons chez Claire une évolution beaucoup plus rapide dans sa vision de l'introduction des techniques, c'est ce que nous préciserons dans la partie III.4. Il apparaît également que, comme Benjamin et Julien, Claire a un souci quant à la justification des résultats énoncés. Alors que certains moments consacrés à ce type de tâches par Benjamin lui ont posé quelques difficultés, notre étude montre que Claire a développé d'autres pratiques qui lui permettent de rencontrer moins de problèmes, comme nous le verrons dans la partie III.5. Enfin, comme Benjamin, Claire s'est montrée dès le début de l'année sensible à certaines erreurs commises par ses élèves et sa réflexion va elle aussi la conduire à une évolution certaine dans sa vision des difficultés éprouvées par les élèves. Nous présenterons cette évolution dans la partie III.

III.1 - Une certaine responsabilité laissée à l'élève lors des phases de travail sur les objets anciens :

Une première caractéristique commune des pratiques de Claire et de celles de Benjamin est la distinction faite entre le travail sur les objets anciens et celui sur les objets nouveaux. Ainsi, dès le début de l'année, lors de l'élaboration de son cours, Claire commence

16/10), chapitre 3 "Valeur absolue" (16/10 au 30/10), chapitre 4 "Systèmes d'équations linéaires" (4/03/2000 au 18/03), chapitre 5 "Les fonctions" (18/03 au 29/04), chapitre 6 "Les fonctions usuelles" (4/05 au 22/05).

[130] En fait, dans le premier entretien, Claire explique qu'elle ne voit pas comment articuler les dimensions objet et outil de l'algèbre : " En seconde, cela va être plus, pour moi, du côté objet. Le côté outil, il va être plus difficile à mettre en œuvre. Je vais essayer... ". Il est vrai que, contrairement aux trois autres stagiaires, Claire s'efforcera dans chaque chapitre consacré à l'algèbre de donner des exercices faisant appel à la dimension outil de ce domaine des mathématiques. Mais il n'y aura pas vraiment d'articulation, dans la mesure où ces exercices seront toujours traités en fin de chapitre.

par analyser ce que ses élèves ont dû étudier au collège et de ce qu'il va falloir rappeler, comme elle nous l'explique dans le premier entretien :

> C : Je commence par me demander ce qu'ils doivent savoir, mais que je vais quand même rappeler. Je m'aperçois qu'il faut souvent rappeler les choses de troisième. Donc, en général, j'essaie de rappeler sans trop détailler ce qu'ils doivent savoir. Et après, je mets en deuxième ce qu'il y a de nouveau.

Et, de fait, au début de la plupart des chapitres de l'algèbre, Claire commence donc par organiser un moment de re-rencontre avec les notions et les propriétés rencontrées antérieurement par les élèves. Comme pour Benjamin, cette re-rencontre se fait à travers un rappel de définitions ou de règles, sans prise d'information a priori sur les connaissances anciennes de ses élèves. Mais, pour certaines notions abordées en début d'année, ce rappel est moins systématique que ce que nous avions pointé pour Benjamin. Par exemple, pour la notion de fraction retravaillée dans le premier chapitre sur le calcul numérique, elle ne rappelle que quelques résultats :

<u>III – Ecritures fractionnaires :</u>

<u>Le dénominateur d'une fraction n'est jamais nul.</u>

Ex : $\frac{4}{x+1}$ *ne peut être calculé que pour* $x + 1 \neq 0$ *c'est à dire pour* $x \neq -1$.

Propriétés :

- $b \neq 0$; $d \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *équivaut à* $ad = bc$ ($\frac{3x+1}{4} = \frac{x}{6}$ *équivaut à* $6(3x + 1) = 4x$)
- *La valeur d'un quotient est inchangée si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.*

Ex : $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

- *Lorsque* $b \neq 0$: $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

Les trois dernières propriétés rappelées ci-dessus sont extraites du manuel de la classe, le Transmath[131], dans lequel les auteurs rappellent également les quatre opérations et les règles associées qui ont été étudiées au collège, en les illustrant d'exemples. Claire n'a visiblement pas jugé bon de faire ce rappel dans ce chapitre. Il semblerait, en fait, qu'elle ait sélectionné ici certaines propriétés qui vont lui être utiles pour justifier la technique de résolution des équations dont l'inconnue figure au dénominateur, technique qu'elle va introduire ultérieurement :

METHODE :

a) Détermination des contraintes (le dénominateur doit être différent de 0)

b) Sous les conditions précédentes l'équation de ramène à une équation produit.

($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *équivaut à* $ad = bc$)

c) On résout l'équation obtenue.

Claire a clairement le souci de mettre en mots une technique de résolution de telles équations et la volonté de justifier certaines étapes à l'aide des deux règles rappelées

[131] Comme les trois autres stagiaires, Claire élabore ses stratégies d'enseignement en s'appuyant sur différents manuels, celui de la classe "Math 2de", élaboré par A.Antibi et R.Barba et édité par Nathan en 1995, et trois autres ouvrages : le Pythagore (le manuel de la classe de Benjamin), le Pyramide (également utilisé par Benjamin) et le Fractale (consulté aussi par Benjamin et Marie).

précédemment. Nous reviendrons ultérieurement sur ces deux aspects qui caractérisent les pratiques de Claire.

De même, le rappel de méthodes déjà rencontrées au collège est aussi moins systématique que chez Benjamin. Elle paraît, sur ce point, moins sensible que Benjamin et Marie au fait de reprendre "proprement" ce qui a déjà été étudié par les élèves. Ceci apparaît, par exemple, dans les rappels qu'elle fournit pour la résolution d'équations :

V – Résolutions d'équations : *1 – Mise en route :* *Résoudre dans IR l'équation $x^2 + 1 = 3 - x$, c'est trouver tous les réels (s'il en existe) qui vérifient l'égalité $x^2 + 1 = 3 - x$. De tels réels sont les solutions de l'équation. Ainsi 1 est solution de l'équation $x^2 + 1 = 3 - x$, mais 0 ne l'est pas).* *Des équations équivalentes sont des équations qui ont les mêmes solutions.* *2 – Equations de référence :* • *équation $ax + b = 0$* *Lorsque $a \neq 0$, l'équation $ax + b = 0$ admet une solution unique $x = -\frac{b}{a}$* • *équation $x^2 = a$:* *si $a > 0$: deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$* *si $a < 0$: pas de solution* *si $a = 0$: une solution 0* • *équation produit :* *Propriété : $AB = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$ (exemple : $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ équivaut à $3x - 2 = 0$ ou $2x + 1 = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\}$).*

Nous pouvons noter ici le souci de rappeler certaines définitions que nous avons signalé précédemment. Claire reprend, en fait, la définition du type de tâches "résoudre une équation" dans le cours du Pyramide sur la résolution d'équations. Mais, suite à la définition, les auteurs de ce manuel rappellent les règles sur lesquelles se base la résolution des équations du premier degré, tandis que Claire choisit de ne pas les reprendre. Dans le premier entretien, elle nous explique à ce propos qu'elle s'est limitée à quelques rappels car les élèves connaissent "normalement" les techniques. Elle fournit donc directement la forme générale des solutions relatives aux équations du type $ax + b = 0$ et $x^2 = a$, en reprenant de nouveau le texte du Pyramide. Puis, comme dans ce manuel, elle reprend plus précisément, en la justifiant, la technique de résolution des équations-produits.

Cette volonté de revenir sur des objets ou des résultats déjà étudiés au collège se retrouve tout au long de l'année avec, par exemple, un retour sur les équations du premier degré dans le deuxième chapitre, une révision des méthodes de résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues au début du mois de mars ou un retour sur la traduction analytique d'une symétrie par rapport à l'origine d'un repère ou d'une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour préparer l'étude de la parité de fonctions au début du mois de mai.

Les analyses des dispositifs de re-rencontre mis en place par Benjamin et Marie ont fait apparaître la volonté de laisser une place aux élèves, en les faisant participer lors de la réexplicitation des différents résultats revus et en organisant un travail technique qui permettait de prendre en charge leurs difficultés. Claire a également la volonté de laisser une certaine place à ses élèves lors de ces moments de révision, mais en leur laissant plus de responsabilités. Ainsi, pour les premiers rappels (développement et factorisation, écriture fractionnaire, puissances), Claire choisit d'écrire une fiche à trous que les élèves doivent compléter chez eux. Nous reprenons ci-dessous la partie consacrée à la factorisation et au développement :

> *Développer une expression, c'est l'écrire sous forme d'une somme de termes.*
> *Factoriser une expression, c'est l'écrire sous forme d'un produit de facteurs.*
>
> $$\xrightarrow{\dots\dots\dots}$$
> $$a(b + c) = ab + ac$$
> $$\xleftarrow[\dots\dots\dots]{}$$
>
> *2 – Les égalités remarquables :*
>
> $(a + b)^2 =$
>
> $(a - b)^2 =$
>
> $(a + b)(a - b) =$
>
> *Exemples de factorisation :*
>
> *– avec un facteur commun :* $(x - 1)^2 + 3(x - 1) =$
>
> *– grâce à une égalité remarquable :* $16x^2 - 1 =$

Pour Claire, ce dispositif permet d'amener ses élèves à se rappeler eux-mêmes ce qu'ils sont censés savoir. Cela lui permet également de gagner du temps, comme elle nous l'explique ci-dessous :

> C : Sinon, pour la suite, je leur ai distribué ça. Plutôt que de réécrire tout le cours, je leur ai donné une petite fiche à compléter et qu'on a corrigée la fois d'après pour rappeler tout ce qu'ils savaient normalement.

Au cours de l'année, Claire développera d'autres stratégies pour amener ses élèves à prendre en charge les révisions du collège. Ainsi, pour préparer le travail sur les inégalités et les inéquations, elle s'appuie sur le manuel de la classe, dans lequel chaque chapitre débute par une partie "Pour prendre un bon départ", où les auteurs proposent un point sur certaines connaissances censées être acquises au collège, sous la forme de rappels ou d'exercices-tests. Avant d'amener ses élèves à retravailler, lors d'une séance de modules, la résolution des inéquations du premier degré, Claire leur demande de lire chez eux les rappels suivants :

> *Pour prendre un bon départ page 33 :*
>
> ***2 – Ordre et opérations***
>
> - *Ajouter (ou soustraire) un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.*
>
> *Ainsi par exemple, si* $a < b$*, alors* $a + c < b + c$ *et* $a - c < b - c$
>
> - *Multiplier (ou diviser) chaque membre d'une inégalité*
>   - *par un nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité,*
>   - *par un nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité.*
>
> *Ainsi par exemple, si* $a < b$ *et si* $c > 0$*, alors* $ac < bc$ *et* $\frac{a}{c} < b/c$.
>
> ***Cas particulier important***

Si $a < b$, alors $-a > -b$. (En effet, on multiplie par -1 ; or $-1 < 0$.)
Règle de transposition
Si $x + a < b$, alors $x < b - a$. (En effet, on ajoute $-a$ aux deux membres)
Exercice-test :
Résolvez les inéquations : a) $2x + 3 < 0$. b) $5x + 4 \geq 0$.

Pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, Claire met en place un autre type de dispositif. Après avoir introduit l'interprétation graphique et le théorème relatif à l'existence et l'unicité de la solution pour un tel système, Claire profite d'une séance de module pour proposer à ses élèves de résoudre le système $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+4y=1 \end{cases}$, sans imposer de méthode. Son objectif est alors d'amener ses élèves à revoir les deux méthodes de résolution d'un tel système, déjà étudiées au collège. Suite à ce travail en classe, Claire demande à ses élèves de préparer pour la séance suivante deux exercices d'application directe :

Ex n°1 p 333 :
Résolvez dans IR^2 le système $\begin{cases} x-2y=1 \\ 4x-6y=-3 \end{cases}$
a – Par substitution,
b – Par combinaisons linéaires.
Ex n° 8 p 334 :
Résolvez dans IR^2 le système donné et interprétez graphiquement sa résolution :
$\begin{cases} 2a+b-7=0 \\ 3a-5b=4 \end{cases}$

Et ce n'est que lors de la correction de l'exercice 1 que s'effectue, dans le cours, la mise en mots des deux méthodes. Nous reprenons ci-dessous l'extrait du cours correspondant à la méthode dite "par substitution" :

Méthode par substitution :

Exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre à l'aide de l'une des équations	$\begin{cases} x-2y=1 \\ 4x-6y=-3 \end{cases}$
On remplace x par 1 + 2y dans l'équation 2	$\begin{cases} x=1+2y \\ 4(1+2y)-6y=-3 \end{cases}$
On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue	$\begin{cases} x=1+2y \\ y=-\frac{7}{2} \end{cases}$
On remplace y par $-\frac{7}{2}$ dans la première équation	$\begin{cases} x=-6 \\ y=-\frac{7}{2} \end{cases}$
On donne l'ensemble des solutions	

Ces phases de re-rencontre avec les objets anciens sont ensuite suivies d'un moment de travail sur ces notions. Nous reviendrons ultérieurement sur les caractéristiques de ce travail technique.

Passons maintenant à l'étude du travail mené par Claire sur les objets nouveaux et plus particulièrement sur sa grande sensibilité à l'utilisation d'activités préparatoires.

III.2 - Une grande sensibilité à l'utilisation d'activités préparatoires :

Comme nous l'avons pointé au début de cette partie, Claire distingue le travail sur les objets anciens de celui sur les objets nouveaux. Cette caractéristique apparaît, dès le début de son stage, lors de l'étude des techniques relatives à la résolution d'équations. Comme Claire nous l'explique dans le premier entretien, elle n'a pas choisi la même démarche pour les équations de référence que les élèves ont déjà rencontrées au collège et les équations plus complexes sans doute plus problématiques pour eux, comme celles se ramenant à une équation-produit ou celles dont l'inconnue figure au dénominateur :

> C : Je leur avais fait une feuille sur la résolution d'équations[132]. Normalement, les techniques ils les connaissent, donc j'avais rappelé quelques choses. Les différents types d'équations : ax+b, x^2 et l'équation produit. Et après, pour ce qui était un petit peu nouveau, on avait fait un exercice en voyant la méthode à côté et on l'a écrit ensemble.

Ainsi, pour l'étude des équations dont l'inconnue au dénominateur, Claire introduit la méthode que nous avons présentée précédemment (page 236), puis propose aux élèves de l'appliquer pour résoudre l'équation $\frac{1}{x+2}=\frac{-x}{x^2-4}$. Cet exemple permet également de pointer qu'en début d'année, Claire a la même stratégie que Benjamin pour l'introduction de méthodes : elle travaille par ostension et ne laisse aucune responsabilité à ses élèves quant à l'élaboration de techniques nouvelles et quant au rappel de méthodes sans doute encore problématiques pour eux. Comme Benjamin, elle propose donc dans son premier chapitre des fiches-méthodes. Claire s'est visiblement interrogée sur l'intérêt de ces fiches, mais elle a constaté que cela aidait ses élèves et a donc choisi d'adopter ce dispositif :

> C : Je mets quand même dans le cours des fiches méthodes. Au début j'avais hésité mais je me dis que pour eux cela clarifie quand même pas mal de choses.

Cette vision de l'introduction de nouvelles techniques évoluera durant son année de stage et nous reviendrons plus loin sur cette évolution.

En ce qui concerne le travail sur les objets nouveaux, Claire exprime, dès le premier entretien, le souci d'introduire ces notions à l'aide d'activités. Cette volonté apparaît lors de la première séance de cours consacré à l'introduction des ensembles de nombres :

> C : A la fin de la première séance, je leur avais demandé ce que l'on connaissait comme nombres. Ils avaient dû me sortir les entiers, les entiers relatifs. On avait fait un petit travail d'introduction avant de commencer le cours du premier chapitre.

Certes, Claire n'a pas mis ici en place d'activité, mais nous pouvons tout de même noter son souci de ne pas commencer directement par le cours. Dans ce premier chapitre, Claire n'introduit pas d'autres notions nouvelles. Mais, dès le deuxième chapitre, elle met en place des activités pour introduire des résultats ou des méthodes nouvelles. Ainsi, dans le cadre de l'opération séance, elle met en place, avec deux collègues stagiaires, une activité qui

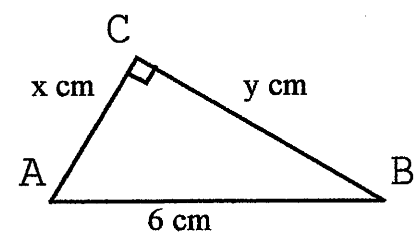
---

[132] Claire fait ici référence à la fiche que nous avons présentée à la page 237 de ce chapitre.

conduit les élèves à étudier le signe d'expressions du type ax + b[133] et qui les amène à conjecturer le résultat relatif à la détermination du signe de telles expressions, en fonction du signe de a. Cette pratique va se généraliser : à chaque introduction de nouvelles notions ou de nouvelles règles, elle va organiser une activité préparatoire. Les études des pratiques de Julien et de Marie ont montré le manque d'articulation entre ce type d'activité et le cours. La situation pour Claire est toute autre : lors de la description de ces activités pendant les entretiens, elle insiste sur les liens qu'elle a établis entre les activités et le cours. Cette volonté d'établir une articulation apparaît assez tôt puisque, lors de la description du travail sur la valeur absolue, qui a lieu au mois d'octobre, Claire insiste sur sa volonté d'aider ses élèves à construire du sens pour cette notion en s'appuyant sur une activité préparatoire. Afin d'introduire la notion de valeur absolue, Claire a utilisé une activité du Transmath dans laquelle, conformément aux programmes, les auteurs définissent la valeur absolue à partir de la distance entre deux réels. Suite à cette activité, Claire institutionnalise cette définition et aborde différentes propriétés relatives à cette notion, telles que " $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ " ou "$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$ ". Elle nous explique alors dans le deuxième entretien comment elle a exploité l'activité pour amener les élèves à découvrir ces propriétés :

> C : Après on a vu des propriétés. Alors, en fait, au départ je marquais juste $|x| = 0$, sans marquer directement l'équivalence. On faisait le schéma et je leur demandais de trouver eux-mêmes à quoi cela correspondait, d'après la droite. En reprenant toujours la notion de distance. En fait dans tout le chapitre je suis repassée par la notion de distance entre deux points.

Cette caractéristique des pratiques de Claire se retrouve tout au long de l'année ; elle l'exprime, de nouveau, clairement lors de la description concernant son chapitre sur les fonctions. Elle choisit de débuter son chapitre par une activité[134] qui a pour support la situation géométrique suivante :



On appelle glénatri tout triangle rectangle, comme celui dessiné ci-dessus, dont l'hypoténuse [AB] est fixe et a pour longueur 6 cm.

L'objectif de cette activité est d'amener les élèves à étudier deux fonctions : la fonction f qui à la longueur x associe la longueur y ($f : x \longmapsto \sqrt{36 - x^2}$) et la fonction g qui à x associe

[133] En classe de troisième, les élèves ont déjà résolu des inéquation du type $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$, mais l'étude d'une telle expression n'est pas un objectif du programme de cette classe. Les difficultés rencontrées par Benjamin lors du travail sur cette question ont d'ailleurs bien montré les difficultés rencontrées par les élèves pour faire le lien entre la résolution des deux inéquations $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ et l'étude du signe de ax + b. En ce sens, nous considérons cette question comme nouvelle pour un élève de seconde.

[134] Il s'agit de l'activité préparatoire qui a été traitée par les élèves lors de la séance que nous sommes allée filmer dans la classe de Claire.

l'aire du triangle ABC ($g : x \longmapsto \frac{x\sqrt{36-x^2}}{2}$). Au cours de ce travail, les élèves ont à déterminer l'expression algébrique de ces deux fonctions, à construire leur représentation graphique, à dresser les tableaux de variation et à résoudre graphiquement des équations du type $g(x) = \lambda$.

La volonté d'établir un lien entre cette activité et la suite de l'enseignement sur les fonctions apparaît clairement dans les traces écrites du cahier de cours des élèves. En effet, lors de l'institutionnalisation, Claire y fera, à plusieurs reprises, référence pour illustrer certaines définitions :

> *<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur D, soit a un réel donné et soit b = f(a).*
> *On dit que :* • *b = f(a) est l'image de a par f.*
> • *a est un antécédent de b par f.*
> *<u>Exemples :</u> le Glénatri : $f : x \longmapsto \sqrt{36-x^2}$,*
> *$f(2) = \sqrt{36-2^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.*
> *Donc $4\sqrt{2}$ est l'image de 2 par la fonction f. Et 2 est un antécédent de $4\sqrt{2}$ par f.*
> *[...]*
> *<u>IV – Extremum : minimum et maximum</u>*
> *<u>1 – Définition :</u>*
> *Soit [a ; b] un intervalle et f une fonction définie sur [a ; b]. Soit x_0 un réel appartenant à [a ; b]*
> *f admet un maximum $f(x_0)$ en x_0, si pour tout x de [a ; b] $f(x) \leq f(x_0)$*
> *f admet un minimum $f(x_0)$ en x_0, si pour tout x de [a ; b] $f(x) \geq f(x_0)$*
> *On dit que le maximum (ou le minimum) est atteint en x_0.*
> *[...]*
> *<u>Remarque :</u> Un minimum ou un maximum peut être atteint par plusieurs valeurs de x (Ex : le Glénatri, la fonction g, le minimum de g vaut 0 et est atteint en 0 et en 6).*

La description de ce cours, faite lors du troisième entretien, montre que Claire ne s'est pas limitée à illustrer ces nouvelles notions à l'aide de l'activité, mais qu'elle l'a utilisée pour conduire les élèves à formuler ces définitions :

> C : Juste après l'activité, on a défini la notion d'image et d'antécédent. Donc on est reparti de l'activité Glénatri où, à un moment donné, on faisait la lecture d'une image. J'ai reposé la question : "quelle est l'aire qu'on avait trouvée ? " On a vu qu'on partait de l'axe des abscisses. Je suis repartie d'une relation graphique et après on a essayé de traduire ça au niveau d'une relation numérique pour, après, en déduire la définition de l'image. Après, j'ai défini dans la foulée l'antécédent. Ensuite, la représentation graphique : on s'est appuyé sur la courbe qu'on avait tracée dans l'activité pour étudier les coordonnées d'un point de cette courbe. D'abord à partir des valeurs numériques : "là, qu'est-ce qu'on avait fait comme calcul ? " On a vu que cela revient à calculer, pour un réel, f de ce réel en fait.

Après cette étude du travail mené autour des activités préparatoires, considérons maintenant le travail de la technique, dont l'analyse fait apparaître une réelle cohérence dès le début de l'année.

III.3 - Une cohérence dans le travail technique :

Dès le début de l'année, l'organisation du travail technique proposée par Claire est très proche de celle de Benjamin. En effet, dès qu'une technique est rappelée ou introduite, elle propose un ensemble d'exercices destinés à amener les élèves à la travailler sur des spécimens qui ne sont pas trop complexes. Après cette application directe, elle sélectionne des exercices qui vont conduire les élèves à approfondir ou à améliorer la technique étudiée, comme elle nous l'explique dans le deuxième entretien :

> AL : Comment est-ce que tu fais pour choisir tes exercices ?
>
> C : A partir de ce que je veux faire en cours, en général, c'est d'abord une activité pour observer la notion du cours, pour l'introduire. Ensuite, je cherche des exercices d'application, ce qui permet normalement de vraiment assimiler la notion et de voir si tout le monde a compris. . Et après je cherche un exercice où il y a besoin d'un petit peu plus de réflexion ou des exercices qui font appel à des notions de chapitres précédents.

Ces caractéristiques apparaissent, par exemple, dans le premier chapitre consacré au travail sur la résolution d'équations. Nous l'avons vu précédemment, ce travail débute par l'étude d'une fiche dans laquelle Claire rappelle divers résultats relatifs aux équations déjà rencontrées au collège et institutionnalise une méthode permettant de résoudre des équations de degré strictement supérieur à 1[135], qui est aussitôt appliquée pour la résolution de l'équation $(1-2x)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$:

3 – Comment résoudre une équation de degré strictement supérieur à 1
METHODE :
a – Transposer tous les termes à gauche du signe =
b – On essaie de factoriser (si cela est possible)
c – On est ramené à la résolution d'une équation produit.
d – Ecrire l'ensemble S des solutions.

Suite au travail sur cette fiche, Claire propose deux exercices à préparer à la maison pour la séance suivante :

Ex n°80 p 25 :
Résoudre l'équation
$\frac{1}{2}(2x-3) - \frac{1}{3}(x+3) = \frac{1}{9}(4x-2)$
TP4 p 19 :
On se propose de trouver le (ou les) nombre(s) x, s'il en existe, tel(s) que :
$(x^2-4)(x-\sqrt{2})(x+\frac{3}{2}) = 0$ *[1]*
1 – Montrer que l'équation [1] peut s'écrie $(x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\frac{3}{2}) = 0$.
*2 – Trouver tous les **réels** x solutions de l'équation [1].*
*3 – Trouver tous les **entiers naturels** x solutions de l'équation [1].*
*4 – Trouver tous les **entiers relatifs** x solutions de l'équation [1].*
*5 – Trouver tous les **rationnels** x solutions de l'équation [1].*

Dans le premier exercice, il ne s'agit pas d'une application directe d'une technique revue dans le cours puisque seule la forme générale de la solution d'une équation du type : $ax + b = 0$ a été rappelée. Mais, pour Claire, c'est un moyen d'amener ses élèves à réviser la

[135] L'introduction de cette technique se fait exactement sur le même schéma que celle de la technique associée à la résolution des équations dont l'inconnue figure au dénominateur, que nous avons évoquée à la page 240 de ce chapitre.

technique de résolution relative aux équations du premier degré. Dans le deuxième exercice, il s'agit d'appliquer directement une technique revue dans le cours. Notons qu'il existe dans le manuel d'autres spécimens d'équations qui auraient permis une telle application (par exemple, l'équation $(3x - 5)(4x + 7) = 0$), mais Claire semble avoir été sensible au fait que le TP4 permet également de réinvestir le travail mené précédemment sur les ensembles de nombres.

Suite à la correction de ces deux exercices lors de la séance de module suivante, Claire propose trois exercices qui sont traités en classe :

> *Ex 81 p 25 :*
> *Résolvez l'équation proposée :* $2t - 3(t + 1) = \frac{1 - 2t}{2}$
>
> *Ex n°91 p 25 :*
> *Résolvez l'équation proposée :* $5x + 1 - (x - 4) + 3 = 4(x + 2)$
>
> *Ex n°98 p 25 :*
> *Résolvez l'équation proposée :* $(x + 2)(x - 1)^2 = x + 2$

Les deux premiers exercices permettent, à nouveau, de travailler la technique utilisée pour résoudre les équations du premier degré. Mais, Claire profite de cette phase de travail en classe pour complexifier le type de tâches en sélectionnant des exercices qui conduisent à une réflexion plus approfondie sur la notion de solution d'une équation. En effet, la première équation n'admet pas de solution et l'ensemble des solutions pour la deuxième est $\mathbb{R}$. Elle profite également de cette séance pour fournir un spécimen d'équation dont la résolution met en jeu la technique associée aux équations de degré strictement supérieur à 1, qui lui semble sans doute plus problématique pour les élèves (cf. la citation de la page 240). Nous retrouvons donc ici une des caractéristiques de l'organisation du travail technique que nous avions pointée, lors de l'analyse des pratiques de Benjamin et de Marie : en début d'année, le travail des nouvelles techniques est le plus souvent entamé en classe pour aider les élèves à se les approprier.

Les techniques permettant de résoudre les équations du premier degré et celles de degré strictement supérieur à 1 seront de nouveau travaillées à l'inérieur des deux exercices proposés dans un devoir à la maison :

> *Ex n° 3 :*
> *Résoudre les équations suivantes :*
> a – $2 - 3x = 5x$ b – $5(3 - x\sqrt{2}) + 7 = 12 - 7\sqrt{2}x$
> c – $x^2 + 3 = 3x^2 - 13$ d – $(4x^2 - 1)(2x + 3) = 0.$
>
> *Ex n°4 :*
> *Transformer l'équation en une équation produit et la résoudre :* $x^2 - 4x + 4 = (1 - x)(x - 2)$

Nous pouvons noter ici le souci que manifeste Claire de proposer des équations illustrant les différents types évoqués dans le cours (les équations a et b se ramènent à une équation du type $ax + b = 0$, l'équation c peut conduire à une équation du type $x^2 = a$ et les deux autres sont des équations de degré strictement supérieur à 1). Claire a également la volonté de varier les difficultés : l'équation b, tout en étant du premier degré, est ainsi bien plus complexe que l'équation a, du fait de la nature des coefficients. Par ailleurs, la factorisation nécessaire pour résoudre la dernière équation est plus difficile que pour les équations c et d. Notons que pour construire ces deux exercices, Claire a utilisé le Pyramide, dans lequel nous retrouvons effectivement ces cinq équations.

Le type de tâches "résoudre une équation de degré supérieur à 1" sera de nouveau repris lors d'une séance de module qui aura lieu environ quinze jours après la première séance de cours, à travers un exercice technique et à travers la résolution d'un problème conduisant à une telle équation :

Exercice 1 :

Soit l'expression $A(x) = 4x^2 - (x + 1)^2$

a – Factoriser $A(x)$.

b – Quelles sont les solutions de l'équation : $A(x) = 0$

c – Quelles sont les solutions de l'équation : $A(x) = 2(x - 1)$.

Exercice 2 :

Soient deux entiers dont la différence est 2. La somme de leurs carrés est 2314. Quels sont ces nombres ?

a – On désigne ces nombres par n et n + 2. Montrer que n est solution de l'équation :

$$(1) : \quad 2n^2 + 4n - 2310 = 0$$

b - a – On désigne ces nombres par n – 1 et n + 1. Montrer que n est solution de l'équation :

$$(2) : \quad 2n^2 - 2312 = 0$$

c – Résoudre (2). Répondre au problème.

d – Résoudre l'équation (1) sachant que $n^2 + 2n - 1155 = (n - 33)(n + 35)$.

Ceci permet de pointer une dernière caractéristique de l'organisation du travail technique proposée par Claire : les techniques sont travaillées sur un nombre de spécimens non négligeable (un type de tâches est toujours travaillé plusieurs fois) avec un certain étalement au niveau du temps. De nouveau, nous retrouvons donc des caractéristiques communes avec les pratiques de Benjamin et de Marie.

Le souci d'organiser un moment d'appropriation directe des techniques, puis de proposer des types de tâches tendant à complexifier le travail des élèves ou à approfondir leur réflexion sur les objets en jeu va se retrouver tout au long de l'année, aussi bien lors du travail sur des objets anciens que lors de l'étude de notions nouvelles.

Une partie de l'analyse menée dans cette partie met en évidence que les pratiques de Claire sont caractérisées par une ostension, par le biais de fiches-méthodes, et ne laissent aucune responsabilité aux élèves quant à l'élaboration des techniques. Nous retrouvons donc ici un nouveau point commun avec Benjamin. Mais il s'avère que, dès le deuxième chapitre, sa vision de l'introduction des techniques va évoluer, c'est ce que nous étudions dans la partie suivante.

III.4 - Une évolution dans la vision de l'introduction des techniques :

A partir du deuxième chapitre, les pratiques de Claire évoluent avec l'introduction d'activités qui conduisent les élèves à découvrir de nouvelles techniques, comme la résolution d'inéquations non élémentaires. Le travail sur ce type d'inéquations se déroule dans le cadre de l'opération séquence pour laquelle Claire travaille avec deux autres stagiaires enseignant en classe de seconde. Après avoir proposé un travail sur l'étude du signe d'expressions du type ax + b, travail sur lequel nous reviendrons ultérieurement, Claire et ses deux collègues proposent donc une activité ayant pour but d'introduire les tableaux destinés à étudier le signe de produits ou de quotients, ainsi que d'amener les élèves à les exploiter pour résoudre des inéquations. Nous reproduisons ci-dessous une partie du polycopié distribué aux élèves :

A – SIGNE D'UN PRODUIT :

1) Détermination du signe de (x – 1)(x + 2)

a – Rappeler le signe d'un produit de deux nombres positifs, de deux nombres négatifs, de deux nombres de signes contraires.

b – Complétez le tableau suivant, appelé tableau de signes :

(x – 1) s'annule pour x = ...

(x + 2) s'annule pour x = ...

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de x – 1		...	¦	...	¦	...	
signe de x + 2		...	¦	...	¦	...	
signe de (x – 1)(x + 2)		...	¦	...	¦	...	

2) Résolution de l'inéquation (x – 1)(x + 2) ≤ 0

On lit dans le tableau les valeurs de x pour lesquelles le produit est négatif. Déduisez-en l'ensemble des solutions de l'inéquation (x – 1)(x + 2) ≤ 0. S = ...

3) Applications : Résoudre (2x + 3)(3x – 5)(7 – x) < 0

Cette activité se poursuit par l'utilisation de tableaux de signes pour résoudre les deux inéquations $\frac{2x-3}{5-x} \leq 0$ et $\frac{-2x}{(x-2)(x+1)} \geq 0$: les élèves sont guidés mais le tableau de signes est fourni seulement pour la première de ces inéquations . Les trois stagiaires se sont inspirés ici du TP5 page 18 du Fractale. Ils ont gardé l'esprit de ce TP, consistant à guider les élèves en leur faisant rappeler la règle des signes et en introduisant le tableau, mais ils ont changé les applications : par exemple, dans le manuel, toutes les expressions se limitaient à deux facteurs, Claire et ses collègues ont choisi d'introduire des spécimens avec trois facteurs.

Ils choisissent donc de guider les élèves pas à pas pour traiter deux exemples d'inéquations plus complexes que celles rencontrées au collège et ils leur laissent ensuite plus d'autonomie pour résoudre les deux autres inéquations. L'étude du rapport que ces trois stagiaires ont rendu, suite à leurs expérimentations, montre qu'ils ont été confrontés à des élèves ne comprenant pas l'intérêt d'utiliser un tel tableau. Ceci les a amenés à s'interroger sur les modifications possibles de cette activité pour "motiver" leurs élèves et ils sont arrivés à la proposition suivante, extraite de leur rapport :

> Dans ce chapitre qui introduit une nouveauté pour l'élève, il est primordial de lui démontrer l'intérêt d'utiliser un tableau de signes pour résoudre les inéquations. Ce travail nous a amenés à nous poser la principale question : n'aurait-il pas été judicieux d'étudier de façon préliminaire une équation du type x(x + 1)(2 – x) < 0 ? L'origine de cette question vient des remarques de nombreux élèves se demandant l'intérêt du tableau de signes. Elle vient également de la constatation suivante : on peut se demander si la plupart des élèves ont réellement réalisé que le tableau de signes était une technique simple, rapide et efficace, et qu'avec leurs connaissances de 3ème, ils ne pouvaient aboutir aisément à la solution. Cette modification aurait pu permettre de motiver l'introduction du tableau de signes comme un outil indispensable pour résoudre les inéquations.

Le retour de l'opération séance ayant eu lieu environ deux mois après le lancement, nous ne savons pas quand ce rapport a été rédigé, ni quand cette réflexion sur les pratiques possibles pour introduire une nouvelle technique a émergé.

L'étude des pratiques de Claire sur le reste du chapitre 2 fait apparaître une réelle cohérence relativement à l'introduction ou à l'amélioration de certaines d'entre elles. En effet, suite à cette activité, Claire propose trois exercices à préparer à la maison dans lesquels les élèves doivent résoudre des inéquations plus complexes que celles étudiées en classe :

> *Ex n°5 page 52 :*
> *Résolvez l'inéquation* $2x + 3 - (5x + 1)(2x + 3) \geq 0$
> *Ex n° 8 page 52 :*
> *Résolvez l'inéquation* $\frac{2x + 6}{3 - x} \geq -1$
> *Ex n°9 page 52 :*
> *Résolvez l'inéquation* $x^2 \geq 9$

Claire a donc choisi trois spécimens pour organiser la rencontre des élèves avec d'autres cas : des inéquations dont le second membre est non nul et qui nécessitent d'abord une transposition, des inéquations qui nécessitent une factorisation préliminaire et une inéquation qui nécessite une réduction au même dénominateur. Ces trois spécimens contribuent donc à une complexification du type de tâches étudié en classe et nécessitent donc une amélioration de la technique. Dans la mesure où cette amélioration n'a pas été introduite en classe, Claire choisit de s'appuyer ici sur un autre dispositif du Transmath : dans ce manuel, la partie "exercices" de chaque chapitre débute par une sous-partie intitulée "Comme les résolus", constituée d'exercices courts pour lesquels les élèves peuvent se référer à des exercices résolus figurant suite au cours proposé par les auteurs. Les trois exercices repris ci-dessus sont extraits de cette sous-partie. Nous reproduisons ci-dessous pour le lecteur une partie de l'exercice résolu auquel les élèves peuvent se rapporter pour l'exercice n°5 :

> *Exercice résolu n°3 page 44 :*
> *Résolvez l'inéquation* $2x + 1 - (3x - 4)(2x + 1) \geq 0$.
> ***Point méthode :***
> *Pour résoudre une inéquation* $P(x) \geq 0$ *(ou* $P(x) > 0$ *ou* $P(x) \leq 0$ *ou* $P(x) < 0$*), on peut essayer d'écrire* $P(x)$ *sous la forme* $(ax + b)(cx + d)$*, puis étudier le signe de ce produit.*
> *[...]*

Suite à l'explicitation de ce point-méthode, les auteurs proposent la résolution détaillée et commentée de l'inéquation $2x + 1 - (3x - 4)(2x + 1) \geq 0$. Pour les deux autres exercices, nous trouvons également, dans la partie "Exercices résolus", la mise en mots de techniques permettant de résoudre de telles inéquations. Claire avait tout à fait la possibilité de choisir, dans une autre sous-partie de l'ensemble des exercices proposés dans le manuel, des exercices conduisant à l'amélioration visée. En choisissant ces exercices, Claire semble donc inciter ses élèves à lire les points-méthodes et ceci confirme sa volonté de mettre à leur disposition des techniques pour traiter les tâches plus problématiques.

Cette pratique rappelle les pratiques de Julien en début d'année, lorsqu'il faisait lire des exercices corrigés dans le Déclic, afin que les élèves puissent traiter des types de tâches qui n'avaient pas encore été étudiés en classe. Mais l'analyse du travail de Claire fait apparaître une réflexion plus approfondie sur l'aide qu'elle peut apporter aux élèves pour l'appropriation de ces techniques. En effet, lors de ce travail à la maison, la complexification ne porte que sur ces trois spécimens alors que, pour Julien, elle portait sur onze spécimens. Claire dose donc autrement le travail demandé à la maison. Par ailleurs, pour Julien, la reprise de ces techniques se déroulait uniquement lors de la correction d'exercices. Pour Claire, après la correction des exercices par des élèves au tableau, la technique de résolution d'inéquations plus complexes est reprise lors d'une séance de module. Cette reprise débute par un exercice dans laquelle la technique est mise en mots :

Exercice 1 :

On se propose de résoudre l'inéquation $\frac{1}{x-3} \leq \frac{2}{x+3}$

a) Préciser les valeurs interdites pour x. *On résout donc l'inéquation dans IR – { }*	*a)*
b) Regrouper tous les termes dans un même membre de l'inéquation, pour se ramener à une équation ru type A(x) ≤ 0	*b)*
c) Réduire l'expression au même dénominateur.	*c)*
d) Etudier le signe du numérateur et celui du dénominateur (tableau de signes).	*d)*

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$

e) Donner la solution de l'inéquation S =

Lors du deuxième entretien, Claire nous fait part de difficultés éprouvées par ses élèves, qu'elle a repérées lors du travail sur les valeurs absolues et qui l'ont conduite à une réflexion plus large sur l'apprentissage de ses élèves. Comme nous l'avons vu précédemment (page 241), Claire a débuté ce travail, dans la classe, en proposant une activité contextualisée conduisant à la définition de la valeur absolue à partir de la notion de distance entre un réel et 0. Suite à cette séance, elle propose à ses élèves de préparer à la maison une activité concernant la résolution de l'équation $|x-1| = 3$ et de l'inéquation $|x-1| \leq 3$. Nous reprenons, ci-dessous, le texte de cette activité :

Activité 3 page 63 : ***Inéquation*** $|x - 1| \leq 3$

3.1 – Equation $|x - 1| = 3$

On se propose de résoudre l'équation $|x - 1| = 3$*, c'est-à-dire de trouver tous les nombres x dont la distance à 1 est égale à 3.*

a – Placez sur une droite graduée le point A d'abscisse 1.

b – Où sont les points de la droite graduée dont la distance à A est égale à 3 ?

c – Quels sont alors tous les réels tels que $|x - 1| = 3$ *?*

3.2 – Inéquation $|x - 1| \leq 3$

a) On se propose de résoudre l'équation $|x-1| \leq 3$, c'est-à-dire de trouver tous les nombres x dont la distance à 1 est inférieure égale à 3.
En procédant comme dans le paragraphe 3.1, montrez que l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle fermé de centre 1 et de rayon 3.
b) Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-1| < 3$?

Lors de la séance suivante, cette activité est corrigée et Claire commence le cours dans lequel elle institutionnalise la définition de la valeur absolue et quelques propriétés, puis elle énonce un théorème qui découle de l'activité :

<u>Théorème :</u> $a \in IR$, $r \in IR^+$
Dire que $|x-a| \leq r$ équivaut à dire $x \in [a-r\,;\,a+r]$
Dire que $|x-a| = r$ équivaut à dire $x = a-r$ ou $x = a+r$.

Claire propose ensuite un ensemble d'exercices conduisant à une application directe de ce théorème et menant à un prolongement avec l'étude d'inéquations du type $|x-a| \geq r$ (avec r > 0). Elle se rend alors compte que les élèves réussissent à résoudre les équations ou les inéquations les plus simples en appliquant directement le théorème du cours ("Bon, après, résoudre les équations et inéquations, en général cela a bien marché parce qu'ils utilisaient le théorème du cours, c'était un automatisme à nouveau."). Mais, lors d'une séance de modules, elle leur propose des tâches plus complexes ($|-5x-x| \geq -2$ ou $|2x-3| \leq 4$) et elle se rend compte des biais d'un apprentissage de l'algèbre par automatisme :

> C : Et le troisième exercice[136], c'était pour voir comment on pouvait résoudre a priori une équation qu'on ne savait pas résoudre, puisqu'on avait vu dans le théorème que c'était x moins un nombre et surtout pas autre chose. Et là c'était 2x. C'était un exercice guidé qui leur faisait utiliser un changement de variable. Mais, au départ, il y en a qui n'ont pas compris pourquoi on faisait tout ça. Parce que, pour eux, c'était comme dans le théorème. Et il y a eu aussi des problèmes : dans le théorème, r doit être positif et il y en a qui ne réfléchissent pas à ce que veut dire "inéquation". Ils appliquent directement le théorème avec un nombre négatif, donc forcément ils arrivent à un résultat faux. Et pour eux ils ne comprennent pas pourquoi cela ne marche pas. [...] Pour certains, c'est tellement un automatisme qu'ils ne réfléchissent pas du tout à l'inéquation.

En se rendant compte ici que, malgré ses efforts pour introduire la notion de valeur absolue et les différentes propriétés à l'aide d'activités préparatoires, ses élèves rencontrent encore des difficultés à donner du sens au théorème qui en est issu et à réfléchir sur ses conditions d'utilisation, Claire adopte une attitude réflexive par rapport à sa propre pratique ;

---

[136] Claire fait référence à l'exercice suivant traité lors d'une séance de module :

<u>Exercice 3 :</u> On se propose de résoudre l'inéquation : $|2x-3| \leq 4$. On pose X = 2x. L'inéquation proposée s'écrit donc : $|X-3| \leq 4$.

a) Quels sont les réels X solutions de l'inéquation $|X-3| \leq 4$?
b) Déduisez-en l'ensemble S des solutions de l'inéquation $|2x-3| \leq 4$.
c) Résoudre par la même méthode $|5x+3| \leq 10$.

lors du deuxième entretien, elle propose des modifications qu'elle envisage alors en rapport avec à cette partie de son cours :

> C : Avant de voir le théorème, peut-être qu'il faudrait insister plus sur la notion de distance. Peut-être passer plus de temps sur cette notion, quitte à prendre plus de temps et seulement voir le théorème à la fin. Qu'ils réfléchissent plutôt, à chaque fois, avec la notion de distance, plutôt qu'ils utilisent tout de suite le théorème.

Cette réflexion s'accompagne aussi d'un changement de pratiques au niveau de ses cours, comme elle l'exprime à la fin du deuxième entretien :

> C : J'essaie de leur faire comprendre que les maths, ce n'est pas quelque chose à apprendre par cœur, mais c'est quelque chose à comprendre. C'est ce que j'essaie de changer dans mon cours, dans le sens où je ne veux pas qu'ils l'apprennent par cœur. Bien leur faire comprendre avec des exemples après. [...]Pour moi au début de l'année, c'était évident qu'ils allaient chercher à le comprendre. Mais, il y en a qui l'apprennent sans chercher à comprendre. A la limite on insiste plus sur le cours, en allant plus lentement, pour voir s'ils ont bien compris. Au début de l'année, j'allais peut-être un petit peu vite dans le cours. Sinon au niveau du contenu lui-même, je ne pense pas que j'ai trop changé.

Nous voyons tout à fait apparaître l'influence de sa vision des mathématiques, de sa logique personnelle, sur ses pratiques. Rappelons ce que les mathématiques représentent pour Claire: structure et logique ; elle apprécie particulièrement qu'elles nécessitent de la recherche et que leur apprentissage ne se limite pas à apprendre par cœur différents résultats.

Passons maintenant à l'attention particulière qu'elle porte à la justification.

III.5 - Une attention particulière portée à la justification :

L'étude des pratiques de Claire fait apparaître une attention particulière portée à la justification des nouveaux résultats rencontrés au cours de l'année. Cette caractéristique est particulièrement flagrante dans le deuxième chapitre, dans lequel Claire introduit différents résultats relatifs aux inégalités et aux inéquations (deux nouvelles règles relatives à la somme et au produit d'inégalités de même sens, un résultat général sur le signe de ax + b, les théorèmes de rangement des carrés, racines carrées de nombres positifs et des inverses de nombres strictement positifs). Dans son troisième chapitre consacré à l'algèbre, Benjamin avait également introduit ces différents résultats. L'analyse de cette partie a montré son souci de justifier les différentes propriétés, ainsi que les difficultés qu'il avait alors rencontrées. Dans son deuxième chapitre, Claire a la même volonté de fournir des justifications, mais ses pratiques diffèrent de celles de Benjamin et elle rencontre visiblement moins de problèmes que lui lors de ces phases de justification. Nous allons donc étudier plus particulièrement le travail proposé par Claire pour justifier deux résultats (le résultat général sur le signe de ax + b et le théorème de rangement des carrés de deux nombres positifs), ce qui va mettre en évidence un autre type de réflexion sur ces phases de justification et sur la place laissée à l'élève.

En ce qui concerne le premier résultat, rappelons que Benjamin avait fait le choix de l'aborder de manière théorique, en considérant directement l'expression littérale ax + b et en étudiant son signe en fonction du signe de a ; puis il avait introduit le tableau de signes pour résumer les résultats obtenus. Certains élèves avaient alors été particulièrement gênés par cette justification théorique et n'avaient pas saisi le sens du problème étudié ni l'intérêt de l'utilisation d'un tableau. Benjamin avait donc repris un exemple numérique pour essayer de surmonter ces difficultés. Pour Claire, l'étude de cette question se fait dans le cadre de l'opération séquence qu'elle a préparée avec deux autres collègues stagiaires. La démarche est toute autre que celle de Benjamin : ils commencent par proposer une activité censée amener les élèves à donner du sens à la question étudiée et à conjecturer un résultat général à partir de l'étude d'exemples numériques. Nous reproduisons ci-dessous le polycopié qu'ils ont distribué à leurs élèves :

<u>ACTIVITE :signe de ax + b</u>

<u>1) Un premier exemple :</u>

On se propose de trouver le signe de 2x + 5, selon les valeurs de x.

a) Résoudre 2x + 5 = 0

b) Résoudre 2x + 5 > 0

c) Résoudre 2x + 5 < 0

On peut présenter ces résultats dans un tableau :

x	$-\infty$ $+\infty$
2x + 5	

<u>2) D'autres exemples :</u>

Etudiez de manière analogue le signe de chacune des expressions suivantes selon les valeurs du réel x, et représentez, pour chacune d'elles, les résultats dans un tableau.

a) 3x – 5

x	$-\infty$ $+\infty$
3x – 5	

b) – 4x + 6

x	$-\infty$ $+\infty$
– 4x + 6	

c) – 5x – 1

Claire et ses collègues se sont ici inspirés d'une activité située à la page 34 du Transmath. Comme les élèves des deux autres stagiaires n'ont pas le même manuel, ils ont produit ce polycopié en modifiant le texte initial de l'activité. En effet, dans la première question, suite à la résolution de l'équation 2x + 5 = 0 et des deux inéquations, les auteurs proposent le tableau de signes déjà rempli. Lors du premier entretien, Claire nous explique qu'avec ses collègues elle avait jugé préférable de laisser les élèves remplir eux-mêmes ce tableau et faire eux-mêmes apparaître la valeur $-\frac{5}{2}$. Par ailleurs, dans le manuel, les auteurs proposent ensuite cinq autres études[137] de signes à effectuer, Claire et ses collègues se limitent à trois exemples, qu'ils choisissent de manière à varier les signes de a et b et à faire figurer les

[137] Les auteurs du Transmath propose d'étudier le signe des expressions suivantes : 3x – 5, 4x – 8, – 3x + 6, – 2x + 3, – 5x + 1.

quatre cas que l'on peut obtenir (a > 0 et b > 0, a > 0 et b <0, a< 0 et b >0, a <0 et b < 0). Après l'étude de ces quatre exemples, les trois stagiaires programment une phase de débat pour amener les élèves à comparer les tableaux obtenus et à conjecturer une propriété générale, qui est ensuite notée dans le cahier de cours, puis démontrée :

Propriété : a et b deux réels avec $a \neq 0$

Le tableau suivant résume le signe de ax + b suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		Signe de $(-a)$	0	Signe de $(+a)$	

Démonstration :

$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a}$

1[er] cas : a > 0

Signe de a	$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > \dfrac{-b}{a}$
Signe de (– a)	$ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < \dfrac{-b}{a}$

2[ème] cas : a < 0

Signe de a	$ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > \dfrac{-b}{a}$
Signe de (– a)	$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < \dfrac{-b}{a}$

Ces trois stagiaires choisissent donc une démarche que nous n'avons pas repérée chez Benjamin, Marie ou Julien. Elle laisse apparaître une certaine sensibilité à conduire les élèves à s'approprier une question, à l'explorer, à formuler des conjectures. Elle nous permet également de pointer une véritable attention portée à la justification, la démonstration les résultats conjecturés.

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, Claire a travaillé ici avec deux autres stagiaires. Il est donc difficile de savoir la part de responsabilité de chacune de ces personnes dans l'élaboration de cette séance. Par ailleurs, il est clair que la conception d'une séance dans le cadre de l'opération séquence entraîne une plus grande réflexion que lors de l'élaboration d'une séance ordinaire. Mais l'étude de la suite du travail algébrique proposé par Claire fait apparaître à plusieurs reprises des activités ou des problèmes mettant en jeu une telle démarche. Par exemple, après les vacances de Toussaint, soit un mois après cette séance, Claire donne un devoir à préparer portant sur différents chapitres, dans lequel elle demande, notamment, de préparer le problème suivant, extrait du Transmath :

TP2 p 47 :

A PROPOS DE MOYENNES

a et b sont deux nombres positifs tels que a < b.

On pose $M = \dfrac{a+b}{2}$ et $m = \sqrt{ab}$. On dit que M est la moyenne arithmétique de a et b et que m est la moyenne géométrique de a et b. On se propose de comparer les nombres a, b, M et m.

2.1 – Conjecture :

1 – Dans chacun des cas suivants, calculer M et m, puis rangez, dans l'ordre croissant, les quatre nombres a, b, M et m.

a) $a = 0$ et $b = 1$. *b) $a = 2$ et $b = 8$.* *c) $a = 3$ et $b = 12$.* *d) $a = \frac{1}{4}$ et $b = 1$.*

2 – D'après ces exemples, dans quel ordre semblent, en général, être rangés les quatre nombres a, b, M et m ?

2.2 – Une démonstration algébrique

1 – On se propose de comparer les nombres M et m.

Expliquez pourquoi les nombres M et m sont rangés dans le même ordre que leurs carrés M^2 et m^2.

b) Vérifiez que $M^2 - m^2$ est du signe de $(a + b)^2 - 4ab$.

c) Déduisez-en que $M > m$.

2 – Vérifiez que $a < \sqrt{ab}$ et $\frac{a+b}{2} < b$.

3 – Déduisez de ce qui précède que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

2.3 – Une application en géométrie

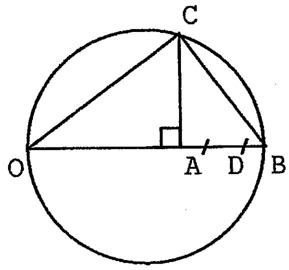
On considère un cercle de diamètre [OB], un point C de ce cercle et son projeté orthogonal A sur [OB]. On note D le milieu de [AB].

1 – Expliquez pourquoi $OD = \frac{OA + OB}{2}$.

2- a) En calculant cos $\widehat{COA}$ dans deux triangles rectangles, montrez que $\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB}$.

b) Déduisez-en que $OC^2 = OA \times OB$.

3 – Montrer que $OC < OD$.



L'objectif de Claire était ici de proposer un travail demandant plus de réflexion, qui permette de réinvestir différentes règles sur les inégalités étudiées dans le deuxième chapitre et d'utiliser des connaissances algébriques pour résoudre un problème géométrique. En ce qui concerne la démonstration du résultat algébrique, elle met en jeu une démarche semblable à celle mise en place lors de l'opération séance : après avoir conjecturé le rangement des quatre nombres, les élèves doivent le démontrer algébriquement. Lors de la correction de ses copies, Claire prend alors conscience que les élèves rencontrent certaines difficultés avec ce type de démarche, comme elle l'explique dans le deuxième entretien :

> C : Cela a été dur parce qu'ils n'ont pas compris la différence entre observation et démonstration. Il y en a, après l'observation, qui ont déduit tout de suite qu'on avait le résultat. Donc après, dans la démonstration, ils disaient : comme on l'a vu sur les exemples, donc c'est vrai. Là, on a revu la différence entre démonstration et conjecture.

Néanmoins, Claire ne fera pas toujours appel à cette démarche lors de la justification de résultats théoriques. Elle propose également des activités qui conduisent les élèves à prouver directement certaines propriétés. Nous allons illustrer ceci par une activité mise en place, dans le deuxième chapitre, pour amener les élèves à démontrer le théorème relatif à la comparaison des carrés de deux nombres positifs. Claire s'inspire ici de l'activité 4 page 44 du Pythagore, c'est à dire de l'activité choisie par Benjamin et qui lui avait causé de réelles difficultés, comme nous l'avons vu lors de l'étude de son troisième chapitre. Nous reproduisons ci-dessous l'énoncé distribué aux élèves :

Soient a et b deux réels __positifs__.

1 – Factoriser $a^2 - b^2$. En déduire que $(a^2 - b^2)$ a le même signe que $(a - b)$

2 – En déduire que pour a et b positifs, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

3 – Application : comparer sans calculatrice $5\sqrt{2}$ et 7.

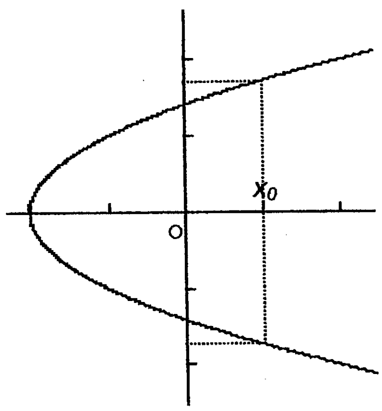
4 – Si a et b sont __négatifs__, est-ce que a^2 et b^2 sont dans le même ordre que a et b ?

Par rapport au texte du Pythagore, Claire a modifié les deux premières questions. En effet, dans la première, les auteurs demandaient directement de démontrer que $a^2 - b^2$ a le même signe que a – b, Claire a donc choisi de guider un peu plus les élèves. Elle a également modifié la formulation initiale de la deuxième question, qui était "En déduire que : pour a et b positifs, a^2 et b^2 sont dans le même ordre que a et b". Lors du deuxième entretien, Claire nous précise la mise en place de cette activité dans la classe et l'étude de la comparaison avec la gestion mise en place par Benjamin pour cette même activité est particulièrement intéressante. Claire nous la présente dans ces termes :

> C : Pour le passage au carré, là factoriser, forcément, ils ont tous su. Mais, en déduire que $a^2 - b^2$ est du même signe que a-b, ça ils ont pas réussi. Il y en a juste un qui a réussi à comprendre ce qu'il fallait faire. J'ai corrigé oralement pour expliquer comment on faisait. Et après, ils devaient reformuler sur leur cahier pour voir si c'était bien compris. En général, ils ont pas trop mal réussi à reformuler sur leur cahier. Donc c'est qu'ils avaient compris. Après j'ai pris une des phrases qu'une des élèves avait bien faite et on a repris sa phrase.

L'attention particulière que porte Claire à la justification se traduit également, en fin d'année, par un souci de mise en mots, dans le cours, d'éléments justificatifs pour certains points au sujet desquels les autres stagiaires n'avaient pas ressenti la nécessité de le faire. Ainsi, lors du travail sur la représentation graphique d'une fonction, Claire propose, comme Benjamin et Julien, un exercice dans lequel les élèves doivent reconnaître, parmi différentes courbes, celles qui peuvent représenter une fonction. Elle est, en revanche, la seule à fournir dans le cours la justification écrite du fait qu'une courbe peut ne pas représenter une fonction :

Attention !! Certaines courbes ne sont les représentations graphiques d'aucune fonction



Par une fonction, chaque réel de D a une seule image, or ici x_0 aurait deux images. Donc cette courbe ne représente aucune fonction.

III.6 - Une évolution de la vision des difficultés des élèves :

Dès le début de l'année, Claire s'est montrée sensible aux problèmes que ses élèves rencontraient lors de la manipulation d'écritures algébriques. Dans le premier entretien, elle fait ainsi référence à des difficultés rencontrées lors de la factorisation, la résolution d'équations ou d'inéquations, la réduction au même dénominateur de fractions dans le cadre algébrique... Au cours du travail sur les inéquations ou sur les valeurs absolues, elle a aussi pointé, comme Benjamin, que, pour les élèves, $-x$ est toujours un nombre négatif. D'une manière générale, elle s'est montrée moins précise que Benjamin dans ses descriptions et elle semble, surtout, avoir été moins désarçonnée, en début d'année, par ce type de difficulté. Ceci peut s'expliquer par le fait que, pendant ses études, Claire a donné des cours particuliers qui l'ont préparée, en quelque sorte, à ce type de problème, comme le montre la citation suivante, extraite du dernier entretien :

C : Parce que j'avais déjà donné pas mal de cours particuliers, je m'attendais à certaines difficultés. Déjà tous les problèmes de factorisation. Même pour les terminales, c'est la chose, pour eux, la plus difficile. Repérer une identité remarquable, ça... Et cela se retrouve dans tous les chapitres. Ça, je m'y attendais, je l'avais vu dans les cours particuliers.

Si ses cours particuliers l'ont préparée à certaines difficultés de ses élèves, elle explique en fin d'année que le fait de devoir enseigner l'algèbre lui a permis de percevoir autrement certaines difficultés :

C : Par contre, en cours particuliers, je n'avais pas trop fait attention au rapport à la lettre, qu'ils avaient du mal à se rendre compte qu'une lettre est un nombre, que cela représentait quelque chose. Je ne m'en étais pas trop rendue compte, je n'y avais pas fait très attention. En cours on se rend compte que certains ne comprennent pas du tout, même en seconde, alors qu'ils le font depuis un certain temps.

C'est en fait à partir du deuxième entretien que Claire commence à évoquer certaines difficultés à utiliser une lettre notamment lors de l'écriture de formules :

C : Au niveau du rapport à la lettre, je me suis rendue compte qu'en seconde cela n'était pas du tout assimilé. Au début de l'année je me suis dit : c'est la rentrée, il faut que ça rentre, que ça revienne. Et en fait pour beaucoup d'élèves je me suis aperçue que c'est quelque chose de très compliqué. Pour eux c'est vraiment quelque chose sur quoi on est obligé de revenir régulièrement. Et même en y revenant régulièrement pour eux c'est... Et pour moi c'est une surprise. Je pensais que cela allait rentrer au bout du temps et je me rends compte que cela a du mal à rentrer pour certains élèves.

AL : Qu'est-ce que tu appelles le rapport à la lettre ?

C : Là, j'ai un exemple tout bête, sur le devoir de géométrie dans l'espace, on avait des calculs à faire dans l'espace. On avait fait les mêmes dans la séance précédente avec un nombre, et là le nombre était remplacé par a. Et calculer en fonction de a, cela en a perturbé beaucoup, parce que c'était une lettre. Dès qu'il y a une lettre cela pose problème. [...] Un autre exemple : la mise au même dénominateur. Dès que c'est une lettre... Quand il y a un nombre, ils y arriveront tout de suite. Dès que c'est une lettre et qu'il faut formaliser ce qu'il faut faire...

Ce regard sur les difficultés à utiliser les lettres reste encore assez imprécis et nous pouvons noter que Claire ne fait pas explicitement référence aux changements de statut de la lettre qui interviennent à travers les différentes tâches algébriques. Il semble qu'après le travail sur les fonctions cette vision ait quelque peu évolué :

AL : Est-ce que tu peux préciser ce que tu appelles le rapport à la lettre ?

P : Rien que dans l'activité du glénatri, on fait des calculs pour des valeurs bien précises et après il faut généraliser avec une lettre. Là, il y en a qui n'ont pas compris le sens de la question. Je pense qu'il y en a quelques-uns qui ne voyaient pas pourquoi il faut le démontrer alors qu'on l'avait vu avec des exemples. Et pour la mise en équation, pour eux x c'est une valeur précise, cela ne peut pas varier.

Dès le début de l'année, Claire repère également que ses élèves ont des difficultés à donner du sens à certaines écritures ou à certaines notions. Les évaluations nationales lui ont, ainsi, permis de repérer que certains de ses élèves ne savaient pas faire la différence entre une forme développée et une forme factorisée. En s'appuyant sur les résultats obtenus lors de cette évaluation, Claire propose alors à certains élèves de venir en séance d'aide individualisée pour travailler sur la reconnaissance de formes développées et factorisées. Par ailleurs, dans le premier devoir à la maison, Claire avait proposé à ses élèves un problème issu de la géométrie, dans lequel ils devaient montrer qu'un nombre x vérifiait l'équation $(32 - x)^2 = 64 + x^2$. Elle s'est alors rendu compte que certains élèves n'avaient pas répondu à cette question car ils n'avaient pas compris ce que signifiait qu'un nombre est solution d'une équation. Elle est alors revenue en classe entière sur la définition du type de tâches "résoudre une équation", qu'elle avait donnée dans le premier chapitre (cf. page 237), et plus particulièrement sur la signification du terme "solution d'une équation". A travers le constat de ces deux difficultés, elle s'aperçoit également que, malgré le fait qu'elle ait pris soin de définir, dans le cours, les types de tâches "développer et factoriser une expression algébrique" et la notion de "solution à une équation", les élèves rencontrent des difficultés à construire du sens pour certaines écritures.

Ces deux exemples montrent donc une certaine sensibilité de Claire à l'aide qu'elle peut apporter aux élèves pour qu'ils construisent du sens pour certaines notions. Mais elle pense qu'a priori il est plus urgent de prendre en charge les difficultés rencontrées lors de la manipulation d'expressions algébriques : par exemple, elle nous explique, dans le premier entretien, qu'après avoir constaté les difficultés de ses élèves, elle n'a pas refait un travail explicite sur la notion de solution, parce qu'elle trouvait qu'il était plus important de travailler la factorisation. Par ailleurs, en ce début d'année, Claire évoquera des difficultés à trouver des exercices pour prendre en charge de telles difficultés :

AL : Est-ce que tu ressens des besoins en connaissances didactiques dans le domaine de l'algèbre qui te permettraient d'être plus efficace dans ton enseignement ?

C : En didactique, justement sur des exercices, j'ai des problèmes pour remédier à leurs problèmes, en fait. C'est plus pour le genre de trucs, comme la notion de solution. Il faut créer un peu nos propres exercices sur ça. J'ai pas trouvé d'exercices qui remédiaient.

Dans la suite du travail algébrique qu'elle propose, Claire va montrer une réelle sensibilité à l'aide qu'elle peut apporter aux élèves, pour l'appropriation du sens de certaines manipulations ou de certaines techniques, notamment dans le chapitre consacré aux inéquations. Ainsi, avant d'introduire les tableaux de signes, Claire pensait que ses élèves allaient rencontrer des difficultés à interpréter ces tableaux. Elle pensait alors qu'en détaillant bien la démarche à suivre, elle allait les aider à donner sens relativement à ces nouveaux objets. Après son activité et le début du travail de la technique, elle se rend compte qu'ils rencontrent effectivement ce type de difficultés, malgré le soin apporté à détailler les différentes étapes à suivre. Elle va alors consulter les différents manuels qu'elle utilise pour trouver un exercice qui permettrait de prendre en charge ces difficultés. Elle trouve alors dans le Pythagore un exercice, qu'elle adapte, qui conduit les élèves à interpréter le tableau obtenu lors de l'activité d'introduction des tableaux de signes :

> *Examiner le tableau de signes du TPA. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*
> *Si $x < -2$, alors $(x-1)(x-2) < 0$.*
> *Si $x > 1$, alors $(x-1)(x-2) > 0$.*
> *Si $x = 1$, alors $(x-1)(x-2) = 0$.*
> *Si $x = 3$, alors $(x-1)(x-2) = 0$.*
> *Si $(x-1)(x-2) < 0$, alors $x \in]-2\,;\,1]$*
> *Si $(x-1)(x-2) \leq 0$, alors $x \in [1\,;\,+\infty[$*
> *Si $x \in [1\,;\,+\infty[$ alors $(x-1)(x-2) \leq 0$*
> *Si $x \in]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$ alors $(x-1)(x-2) > 0$*

Elle poursuivra ensuite, dans ce chapitre, le travail sur le sens des écritures et des manipulations, à travers l'exercice suivant :

> ***EXERCICE 2 : Ordonner les étapes d'une résolution***
> *Décrivez la méthode de résolution de chacune des inéquations suivantes à l'aide des phrases 1 à 8 indiquées ci-dessous :*
>
> *a)* $2x(x-1) \geq 0$ *b)* $x^2 < 36$ *c)* $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 2$
>
> *d)* $3x - 5 \leq 2x + 4$ *e)* $(4x^2 - 25)(1-x) \leq 0$ *f)* $(3x-1)^2 \leq (4x+1)^2$
>
> *g)* $\dfrac{2x+1}{x^2-1} \leq 0$ *h)* $(11x+44)(4x-13) + (x+4) \leq 3x(x+4)$
>
> *1) Je regroupe les termes contenant x dans un seul membre.*
> *2) Je multiplie ou divise les deux membres par un même nombre.*
> *3) Je réduis au même dénominateur.*
> *4) J'étudie le signe de chaque facteur du produit.*
> *5) Je développe.*
> *6) Je factorise.*
> *7) Je regroupe tous les termes dans un même membre.*
> *8) J'étudie le signe du numérateur et celui du dénominateur.*

Cette étude montre bien une réelle prise de conscience des difficultés que les élèves peuvent rencontrer pour donner du sens à certaines écritures ou certaines manipulations algébriques. Nous voyons aussi progressivement se mettre en place des stratégies de prise en charge de ces problèmes.

Synthétisons maintenant les résultats obtenus lors de l'étude du profil de Claire.

III.7 - Conclusion :

Tout comme Julien, Claire exerce avec des élèves qui rencontrent certainement plus de difficultés que ceux de Benjamin et de Marie. Mais, contrairement à Julien, elle a su dès le début de l'année établir un bon contact avec sa classe.

La comparaison de son profil avec ceux des trois autres stagiaires fait apparaître de fortes similarités en début d'année avec ceux de Benjamin et Marie. En effet, elle développe dans le premier chapitre des schémas didactiques proches des leurs avec un rappel des définitions ou des règles déjà étudiées au collège, une ostension des techniques nouvelles, un travail des techniques cohérent et structuré. Comme ces deux stagiaires aussi, Claire se positionne rapidement dans une posture d'enseignante.

Le rapport de Claire aux difficultés de ses élèves est également assez proche de celui de Benjamin et notre étude a montré que, comme lui, elle a adopté une attitude réflexive par rapport aux problèmes rencontrés ce qui lui a permis de développer un système explicatif assez évolué.

Dès le début de l'année, nous repérons, toutefois, une différence entre Claire d'une part, Marie et Benjamin d'autre part : Claire cherche visiblement à laisser plus de responsabilités aux élèves. Cette sensibilité n'était pas présente dans les premières pratiques de Marie et Benjamin. Chez Claire, elle apparaît notamment lors des phases de révision pendant lesquelles elle met en place différentes stratégies qui laissent une certaine responsabilité à sa classe. Elle propose ainsi, par exemple, à ses élèves de lire des fiches du manuel de la classe dans lesquelles figurent différents rappels du collège et des exercices pour tester ses connaissances. Cette sensibilité s'explique certainement par un aspect de sa vision du métier de professeur de mathématiques. Il s'agit, en effet, pour Claire d'une personne qui doit aider les élèves à développer une certaine autonomie face au travail.

Même si elle a en début d'année un profil relativement proche de ceux de Benjamin et de Marie, Claire va évoluer différemment dans son rapport professionnel à l'algèbre. La première différence repérée est relative à l'évolution rapide de sa vision de l'introduction de techniques nouvelles. Il semble qu'une réflexion relative à cette tâche didactique soit née lors du travail avec deux de ses collègues pour l'opération séance au cours de laquelle une technique de résolution d'inéquations complexes est élaborée. En effet, alors que Benjamin et Marie avaient directement explicité une technique à appliquer, Claire et ses collègues ont écrit une activité conduisant les élèves à découvrir la méthode de résolution de telles inéquations à l'aide de tableaux de signes. Puis, une attitude réflexive sur ses propres pratiques a conduit Claire à analyser les biais d'un apprentissage de l'algèbre par automatisme. Cette évolution de ses pratiques s'explique certainement en partie par la crainte, exprimée clairement dans les entretiens de suivi, que, pour les élèves, l'apprentissage des mathématiques ne se limite à retenir des résultats par cœur et que l'enseignement de cette discipline ne dégénère vers cette vision.

Une seconde grosse différence est relative à la justification de résultats en algèbre, point sur lequel Marie n'a pas vraiment été sensibilisée au cours de sa première année d'enseignement. Benjamin, quant à lui, s'y est montré attentif, mais la gestion des moments qu'il a consacrés à la justification n'a pas été simple pour lui. Claire a, en fait, développé rapidement des pratiques qui lui ont permis d'amener ses élèves à donner du sens à ce type de tâches en travaillant notamment sur la conjecture de résultats et en leur laissant une réelle place lors des moments des productions et de formulation de justification.

En conclusion de ce chapitre, l'analyse des quatre profils de Benjamin, Marie, Julien et Claire fait apparaître des régularités, mais surtout une grande diversité. Nous proposons de revenir sur cette analyse dans la conclusion de la thèse.

CHAPITRE 7

ANALYSE DU DISPOSITIF VIDEO

Dans le but d'obtenir des informations complémentaires sur les pratiques en classe de PLC2 et sur les analyses qu'ils étaient susceptibles d'en faire, nous avons mis en place au cours de notre dernière année d'expérimentation (1999/2000) un dispositif complémentaire, le dispositif "vidéo", qui a concerné cinq professeurs stagiaires : Benjamin et Claire exerçant en classe de seconde, deux autres stagiaires effectuant leur stage en responsabilité avec une classe de quatrième et un dernier enseignant en classe de sixième.

Au cours du second trimestre, nous avons demandé à ces cinq personnes d'élaborer une séance d'algèbre[138] que nous sommes allée filmer dans leur classe. Parallèlement à ce film, nous avons organisé trois rencontres avec chacun des PLC2 concernés :

- pour la première, qui avait lieu quelques jours avant la séance, notre objectif était double : nous voulions, dans un premier temps, recueillir des informations sur leurs activités de préparation et sur leurs priorités[139]. Au cours de cet "entretien de préparation de séance", le stagiaire devait donc nous présenter ses objectifs, le scénario, le fonctionnement prévu du côté de la classe et celui prévu de son côté. Au cours de cet entretien, nous avions également fait le choix de donner notre avis sur la séance et de proposer quelques modifications, si cela nous semblait nécessaire. Précisons qu'il ne s'agissait pas pour nous, par ces commentaires et suggestions de modifications éventuelles, d'essayer de modifier la logique des séances prévues. Ceci aurait été contradictoire avec les objectifs de cette phase de la recherche. Mais, ayant constaté dans les analyses concernant ces stagiaires les difficultés qu'ils rencontraient généralement à donner une réelle responsabilité mathématique à leurs élèves, nos questions et suggestions éventuelles visaient à essayer de rendre le professeur stagiaire plus sensible à cette dimension et à l'aider à accroître, si besoin, cette responsabilité, localement, sans perturber pour autant l'architecture de la séance. Le but était alors d'étudier comment le stagiaire réagissait et comment il s'appropriait nos propositions.
- La deuxième rencontre a eu lieu aussitôt la séance filmée. Au cours de cet "entretien bilan", notre objectif était de recueillir les premières réactions à chaud et les premières analyses du stagiaire.
- Puis, environ trois mois après les séances filmées, nous avons de nouveau rencontré individuellement chacun des PLC2 et nous avons visionné ensemble le film, le but de cette troisième rencontre étant d'accéder à l'analyse qu'ils faisaient, en fin d'année, de ce qu'ils avaient vécu.

[138] Pour le cas du PLC2 enseignant en classe de sixième, il s'agissait d'élaborer une séance portant sur un travail de type pré-algébrique.

[139] En fait, lorsque nous avons demandé aux stagiaires d'élaborer une séance d'algèbre, nous leur avons également demander d'écrire une fiche de préparation. Le lecteur pourra consulter en annexe 20 le document produit par Benjamin et en annexe 25 celui de Claire.

Enfin, dans le but d'obtenir des informations sur les analyses d'une séance que ces cinq stagiaires étaient capables de mener entre pairs, nous avons complété ce dispositif par une dernière phase : après avoir analysé les cinq films, nous avons sélectionné dans chacune des séances des épisodes qui nous semblaient particulièrement intéressants ; nous avons ensuite réuni les cinq stagiaires, qui ont visionné ensemble ces différents extraits, et nous leur avons demandé de les analyser.

Dans ce chapitre, nous nous proposons donc d'analyser ce dispositif vidéo. Afin de compléter l'étude menée sur le rapport professionnel à l'algèbre de Benjamin et Claire, nous analyserons dans les deux premières parties les séances filmées dans leur classe ainsi que les trois entretiens qui ont accompagné ces séances. Puis, dans une troisième partie, nous étudierons les analyses menées par les cinq stagiaires au moment du visionnement collectif.

I - ANALYSE DE LA SEANCE FILMEE DE BENJAMIN

Cette séance d'une heure se déroule le 17 mars 2000 au cours du chapitre sur les fonctions dont l'enseignement a débuté le 29 février, le but de Benjamin étant d'amener ses élèves à étudier la fonction carré.

L'analyse que nous proposons de cette séance va se dérouler en trois temps : dans une première partie, nous en mènerons une analyse a priori en exploitant la fiche de préparation de Benjamin (cf. annexe 20) et l'entretien de préparation (cf. annexe 21) qui a eu lieu quatre jours avant la séance. Puis, dans un deuxième paragraphe, nous étudierons la séance elle-même[140]. Enfin, nous consacrerons une troisième partie à l'analyse menée par Benjamin[141].

I.1 - Analyse a priori de la séance :

Comme nous l'avons précisé précédemment, lors de l'entretien de préparation de la séance, nous avons demandé à Benjamin de nous présenter les objectifs visés, le scénario, le fonctionnement prévu, à la fois côté élèves (avec en particulier une étude des difficultés envisagées) et côté enseignant.

L'analyse a priori de cette séance a, alors, été menée selon trois axes :

- une analyse du champ des possibles pour l'élaboration d'une séance conduisant les élèves à étudier la fonction carré, ceci pour situer les choix de Benjamin au regard de ce qui pouvait être envisagé,
- une analyse du scénario élaboré, incluant celle de la place donnée aux élèves dans ce scénario et du fonctionnement prévu de Benjamin pour le mettre en place,
- une analyse des difficultés envisagées et des prises en charge associées.

Commençons par l'étude du champ des possibles.

I.1.1 - L'étude du champ des possibles :

Rappelons qu'au début du chapitre consacré aux fonctions, Benjamin a introduit différentes définitions (notamment celles de la représentation graphique d'une fonction, des notions de croissance et de décroissance, des notions de parité et d'imparité) et il a proposé un

---

[140] Le lecteur pourra se reporter à l'annexe 22 pour une retranscription complète de cette séance.

[141] Le lecteur trouvera en annexes 23 et 24 les retranscriptions des deux entretiens qui ont eu lieu suite à la séance.

ensemble d'exercices conduisant ses élèves à travailler différents types de tâches relatifs aux notions introduites. L'étude de ces exercices a montré le souci de Benjamin de proposer un travail mettant en jeu une articulation du registre sémiotique des écritures algébriques et de celui des représentations graphiques. Le jour de la séance, les élèves ont donc déjà à leur disposition les techniques d'étude algébrique et graphique des propriétés d'une fonction et n'auront pas, a priori, à élaborer de nouvelles techniques.

En prenant en compte le travail déjà effectué par les élèves de Benjamin relativement à l'étude des différentes propriétés d'une fonction et ce qui est proposé dans les sept manuels de seconde que nous avons analysés au cours de cette recherche, deux approches sont envisageables pour étudier la fonction carré.

Une première approche, choisie notamment par les auteurs du Pythagore[142], le manuel officiel de la classe de Benjamin, consiste à commencer par une construction point par point de la représentation graphique de la fonction ou à utiliser une calculatrice graphique ou un ordinateur pour obtenir la courbe représentative. L'on peut alors s'appuyer sur cette construction pour conjecturer les propriétés de cette fonction et ensuite les démontrer.

La deuxième approche, culturellement plus classique dans l'enseignement français actuel, consiste à étudier systématiquement les différentes propriétés que peut posséder une fonction pour ensuite construire sa représentation graphique[143].

Dans la partie suivante, nous analysons les décisions prises par Benjamin relativement au contenu à enseigner, en les situant par rapport à ces possibilités. Nous y étudions également le scénario prévu, la place qu'il souhaite laisser aux élèves et la gestion qu'il envisage d'assurer.

I.1.2 - Le scénario prévu :

Pour élaborer cette séance, Benjamin a commencé par consulter le manuel de la classe et le cahier de cours de son frère. Mais l'activité du Pythagore relative à la fonction carré ne lui convient pas, car l'approche choisie par les auteurs ne correspond pas à la vision qu'il a de l'étude d'une fonction :

> B : Parce que moi ce que je veux qu'ils acquièrent que, pour tracer une courbe, il faut l'avoir étudiée avant, qu'on sache quelles propriétés elle a, en particulier qu'on connaisse son tableau de variation sinon on part complètement dans l'inconnu. Si on a deux points, aussi proches soient-ils, on ne sait pas ce que la fonction peut faire entre les deux. Donc, pour moi, il faut commencer par faire l'étude de la fonction. Et il y a beaucoup d'exercices comme ça où on commence à tracer point par point. Dans des activités de type géométrique, souvent on prend des valeurs et seulement après on calcule la fonction. Moi, je trouve que

---

142 Rappelons également que, lors de l'analyse du champ des possibles relatif à la notion de fonction dans le manuel utilisé dans la classe de Benjamin, le Pythagore, nous avons pointé que les auteurs proposent deux activités conduisant les élèves à étudier quatre fonctions usuelles (les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$). Pour ces deux activités, ils ont choisi la première démarche : ainsi, pour la fonction carré, après avoir fait tracer point par point sa représentation graphique, ils demandent de dresser son tableau de variation en s'appuyant sur le graphique, de démontrer les résultats conjecturés et d'expliquer pourquoi la fonction est paire.

143 C'est cette approche qui est privilégiée dans les deux autres manuels avec lesquels Benjamin travaille, le Fractale et le Pyramide.

c'est peut-être pas mal en troisième, je ne sais pas, mais je pense qu'en seconde, on doit leur faire comprendre que c'est pas assez.

L'approche par le graphique lui semble visiblement moins rigoureuse que l'approche plus traditionnelle et elle lui paraît davantage adaptée à un travail au collège. En fait, il considère que l'entrée dans le monde des fonctions en classe de seconde doit s'accompagner d'une rupture avec le travail mené au collège. Il entend donc la consommer dès la première étude de fonction nouvelle pour les élèves, en leur proposant une étude plus classique qui reproduit la structure la plus fréquente des problèmes d'étude de fonctions en première et en terminale.

Ce qu'il a trouvé dans le cahier de son frère ne lui a pas convenu non plus, car il n'y a trouvé qu'une institutionnalisation des propriétés de la fonction carré :

B : C'est donné comme ça dans le cours : la fonction x^2, son ensemble de définition c'est IR, elle est paire. Bon, il n'y avait rien de... Moi je voulais construire quelque chose pour le faire avec eux.

Pour cette séance, Benjamin a donc la volonté de faire participer ses élèves à l'étude de la fonction carré et ne veut pas uniquement faire un cours qui présenterait les différentes propriétés de cette fonction.

Conformément à sa vision de l'introduction de méthodes que nous avons étudiée précédemment, Benjamin choisit donc d'écrire une fiche-méthode. L'étude des fonctions constitue, pour lui, un type de tâches qui se prête bien à l'élaboration d'une telle fiche. Par ailleurs, lors de l'entretien, il revient sur le fait que ce type d'outil lui semble particulièrement bien adapté pour ses élèves :

B : Parce que, bon, dans cette classe-là, il leur faut vraiment des méthodes, il leur faut un travail mâché, donc je leur fais une fiche méthode, comme je l'ai déjà fait pour les mises en équation. Disons une fiche... Bon pour la mise en équation, cela a bien marché parce que les quatre étapes maintenant ils les connaissent sur le bout des doigts. Donc j'espère qu'avec ça... Ils ont quelque chose de propre... Disons un squelette assez propre.

En fait, l'objectif de Benjamin pour cette séance est double : il veut à la fois amener ses élèves à étudier la fonction carré et profiter de cette étude pour institutionnaliser un plan d'étude d'une fonction que les élèves pourront réinvestir lors de l'étude des autres fonctions usuelles du programme. Il élabore donc une fiche à compléter[144] :

Plan d'étude d'une fonction
1 – Recherche de l'ensemble de définition
2 – Etude de la parité éventuelle
Méthode :
3 – Etude des variations
Méthode :

[144] Un objectif de Benjamin est de faire noter sur cette fiche les techniques à utiliser pour étudier les variations et la parité d'une fonction, une remarque correspondant à une mise en garde quant à l'étude des variations ("Une fonction peut être alternativement croissante et décroissante (attention aux règles de calcul sur les inégalités)") et une remarque relative à l'intérêt d'étudier la parité d'une fonction ("Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, il suffit d'étudier ses variations et de tracer la courbe sur une "moitié" de l'ensemble de définition. On obtient l'autre moitié par symétrie")

Remarques : *4 – Tableau de valeurs* *5 – Tracé de la courbe*

Précisons que, lors de la séance de cours précédente, Benjamin aura mené avec les élèves l'étude des fonctions affines. L'étude de la fonction carré se situe donc, pour lui, dans la logique du cours. Il ne prévoit donc pas d'énoncé particulier pour introduire cette étude :

AL : Tu n'as pas prévu d'énoncé particulier ?

B : Non. [...] C'est la fin du cours. Donc, on aura étudié les fonctions affines et on arrivera à petit 2 : la fonction carré.

Au début de l'heure, Benjamin prévoit donc de distribuer sa fiche et d'amener ses élèves à étudier chacun des points du plan pour la fonction carré.

Enfin, au cours de la construction de son scénario, Benjamin prend en compte la différence entre temps d'enseignement et temps d'apprentissage. En effet, il estime que les différentes nouvelles notions étudiées dans ce chapitre se sont accumulées assez rapidement et que les élèves n'ont certainement pas encore tout assimilé :

B : C'est la fin de chapitre. Je leur ai donné toutes les définitions. Cela commence même à faire lourd parce que sens de variation, c'est nouveau. Parité, c'est nouveau. On fait un petit exemple, un exercice et on passe à la suite... Bon il y a des élèves qui ont vraiment du mal là. Donc, là, on va remettre les choses au point avec ça.

Pour les aider devant cette accumulation de nouveautés, Benjamin prévoit donc, pour l'étude de chacun des points de la fiche, un moment de remémoration des techniques à utiliser. Il compte ici laisser une certaine responsabilité à ses élèves en leur demandant de les rappeler eux-mêmes. Les techniques relatives à l'étude des variations et de la parité lui semblent plus problématiques pour ses élèves, il profitera donc de cette séance pour les remettre en mots et pour faire noter ces explicitations sur la fiche. Enfin, pour chacun des points de la fiche, Benjamin prévoit ensuite de laisser un moment à ses élèves pour mettre en œuvre sur la fonction carré la technique qui vient d'être rappelée. Après l'étude de chaque point, un bilan dans le cours est prévu pour institutionnaliser au fur et à mesure les propriétés de la fonction carré.

Centrons, maintenant, notre étude sur les difficultés et les prises en charge envisagées par Benjamin.

I.1.3 - Les difficultés et les prises en charge prévues :

D'après le scénario prévu, la séance va être constituée de quatre phases qui correspondent aux études des points figurant sur le plan distribué aux élèves : la recherche de l'ensemble de définition de la fonction carré, l'étude de sa parité, de ses variations, la construction d'un tableau de valeurs et le tracé de la courbe représentative de cette fonction.

Dans cette partie, nous allons donc considérer chacune de ces phases : nous commencerons par rappeler brièvement ce qui a été étudié précédemment par les élèves, puis nous ferons une analyse a priori des difficultés qu'ils pourraient rencontrer, enfin nous préciserons les difficultés envisagées par Benjamin, les interventions et les prises en charge qu'il prévoit.

I.1.3.1 - Phase 1 : Détermination de l'ensemble de définition :

Analyse a priori :

Ce type de tâches a été rencontré lors du premier paragraphe du cours où Benjamin a défini la notion d'ensemble de définition et où il a présenté trois exemples : les ensembles de définition des fonctions $x \longmapsto 2x + 1$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$. Nous ne savons pas comment Benjamin a géré l'étude de ces trois exemples et quelle responsabilité il a laissée aux élèves. Mais ce cours n'a été suivi d'aucun travail de la technique, ils n'ont donc pas travaillé ce type de tâches sur un nombre important de spécimens (ce qui s'explique par le fait que la recherche de l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas un objectif du programme de seconde). Certes, les élèves de Benjamin ont rencontré un type de tâches assez semblable lors de la recherche de valeurs "interdites" pour des équations et des inéquations avec une inconnue au dénominateur, mais la recherche de l'ensemble de définition d'une fonction qui est définie partout nécessite une autre réflexion et risque d'être plus difficile.

Prévisions de Benjamin :

Benjamin estime que les élèves ne devraient pas rencontrer de difficulté pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction carré dans la mesure où, pour lui, ils ont rencontré suffisamment de fois ce type de tâches (même si c'était dans un autre contexte, lors de l'étude des équations ou inéquations avec une inconnue au dénominateur).

I.1.3.2 - Phase 2 : Etude de la parité :

Analyse a priori :

Au cours de cette phase, Benjamin attend que ses élèves étudient la parité de la fonction carré dans le registre des écritures algébriques. Ce type de tâches a déjà été rencontré à travers trois spécimens[145] lors d'une séance de module qui a eu lieu quelques jours avant la séance filmée.

Ce type de tâches nécessite la mise en jeu de l'algèbre comme outil de preuve. Or, nous l'avons vu dans le chapitre 2, certains élèves rencontrent des difficultés à percevoir cette fonctionnalité. L'on peut donc s'attendre à des difficultés à utiliser des lettres et à des études menées uniquement à partir d'exemples numériques. L'étude de la parité met aussi en jeu le remplacement du symbole "x" par les symboles "– x" dans l'écriture $f(x) = x^2$, ce qui peut également poser des problèmes à des élèves. Enfin, le calcul de f(-x) peut aussi se montrer problématique en ce qui concerne la formation et le calcul de l'expression $(-x)^2$: une erreur classique est de considérer que le carré de $-x$ est $-x^2$.

Prévisions de Benjamin :

Au moment où a lieu l'entretien de préparation, la notion de parité a uniquement été rencontrée lors du cours où Benjamin a défini les notions de fonction paire, de fonction impaire et a exposé la propriété des représentations graphiques de ces deux types de fonctions. Lors de ce cours, Benjamin n'a pas proposé d'exemple d'étude algébrique de la

---

[145] Les élèves ont étudié la parité des fonctions $x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$, $x \longmapsto \frac{|x|}{x^2+1}$, $x \longmapsto 2x^2 + x$.

parité d'une fonction. La séance de module consacrée à l'étude de la notion de parité n'a pas encore eu lieu mais elle se déroulera avant la séance filmée.

Dans la mesure où cette notion est nouvelle pour les élèves, Benjamin estime que l'étude de la parité de la fonction carré risque de poser des problèmes aux élèves mais il n'a aucune idée précise quant à la nature exacte des difficultés qu'ils peuvent rencontrer :

> B : Je ne sais pas du tout comment ils vont... Je ne sais pas du tout ce qu'ils vont dire. Je m'attends à ce que cela bloque vraiment parce que c'est vraiment quelque chose de nouveau. Mais je ne sais pas du tout ce que cela va donner.

Benjamin a donc une confiance limitée dans ce que les élèves peuvent produire lorsqu'ils sont confrontés à un nouveau type de tâches. Par ailleurs, lorsqu'il a fait son cours, il a ressenti une certaine résistance de ses élèves face aux définitions et il a l'impression que le sens graphique de la parité est plus accessible que le sens symbolique :

> B : A mon avis, ils vont... C'est un peu ce que j'ai vu samedi : ils sont soulagés quand j'ai fait le graphique et qu'ils ont compris que c'était symétrique. Je leur ai dit que c'était f(x) = f(-x), on fait le dessin, et ils comprennent bien. Moi j'ai peur qu'ils bloquent là-dessus, symétrie. En plus c'est un peu ce qu'on va refaire aujourd'hui... Qu'ils oublient un petit peu le f(x) = f(-x)... Alors que là c'est vraiment ça dont on a besoin.

Benjamin ressent donc des difficultés, mais il ne réussit pas encore à les analyser clairement. Nous pouvons, en particulier, pointer ici qu'il ne semble pas avoir intégré à ce moment les problèmes que les élèves peuvent rencontrer avec le symbolisme fonctionnel dans son système d'interprétation des difficultés.

Pour prendre en charge un tel blocage, sa stratégie prévue est de faire rappeler aux élèves la définition d'une fonction paire et celle d'une fonction impaire et de les amener à dégager une technique algébrique d'étude de la parité :

> B : Pour la parité, je leur demanderai la définition. Et remarquer que pour les fonctions paires ou impaires, on a f(-x) en fonction de f(x). Donc il faut qu'on travaille sur f(-x). Leur faire dire : il faut qu'on parte de f(-x) et qu'on regarde ce qu'on obtient. Bon, après, j'espère quand même qu'avec ça cela devrait aller.

En ce qui concerne les manipulations algébriques qui accompagnent la mise en œuvre de cette technique algébrique, Benjamin ne semble pas prévoir de difficultés particulières puisqu'il nous explique :

> B : Et pour la parité, on calcule f(-x), c'est du calcul algébrique assez simple en général. Se rappeler que $(-x)^2$, ça fait x^2.

La substitution de x par –x lors de l'étude de la parité d'une fonction est complètement naturalisée pour Benjamin. L'étude du travail algébrique organisé a d'ailleurs montré que Benjamin n'a jamais proposé avant l'étude de la parité de situations qui conduisent à la substitution de symboles par d'autres symboles. Du fait de cette naturalisation, il ne perçoit pas que ce type de tâches algébriques peut être problématique pour un élève de seconde. Par ailleurs, il ne prévoit pas de difficultés particulières en ce qui concerne le calcul de $(-x)^2$.

Nous pouvons également repérer ici qu'il fait référence à l'algèbre comme à un ensemble de règles à mémoriser.

I.1.3.3 - Phase 3 : Etude des variations :

Analyse a priori :

Lors de l'entretien, l'étude des variations a déjà été abordée dans un cours où Benjamin a défini les notions de fonction croissante et de fonction décroissante et en a proposé des illustrations graphiques. Par ailleurs, dans ce cours, Benjamin a proposé les exemples d'étude algébrique du sens de variation des fonctions linéaires $x \longmapsto 2x$ et $x \longmapsto -2x$. Dans les exercices qui suivent ce cours, le travail autour du sens de variation d'une fonction s'est fait uniquement dans un cadre graphique.

Enfin, avant cette séance, Benjamin aura déjà fait étudier à sa classe les variations de deux fonctions affines ($x \longmapsto 3x - 2$ et $x \longmapsto -3x - 2$). Nous reproduisons ci-dessous les traces du cahier de cours d'une élève :

> *$f : x \longmapsto 3x - 2$, $D_f = IR$*
>
> *Variations : Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$*
>
> *$3a \leq 3b$*
>
> *$3a - 2 \leq 3b - 2$*
>
> *$f(a) \leq f(b)$, donc f est croissante sur IR*

Certaines difficultés envisageables pour l'étude des variations d'une fonction sont assez proches de celles que nous avons pointées pour l'étude de la parité. Ainsi, un premier niveau de difficultés concerne le symbolisme fonctionnel : les élèves doivent, en effet, substituer une lettre à une autre lettre dans l'écriture $f(x) = x^2$, ce qui n'est pas forcément évident pour certains élèves. Par ailleurs, l'étude des variations d'une fonction met en jeu l'algèbre comme outil de preuve. Ce type de tâches peut donc également générer les problèmes que nous avons évoqués précédemment lors de l'étude du type de tâches "étudier la parité d'une fonction".

Par ailleurs, la technique choisie ici par Benjamin nécessite la manipulation d'inégalités et, en particulier, la comparaison des carrés de deux nombres. Une erreur classique peut être attendue, celle qui consiste à considérer que les carrés de deux nombres a et b sont toujours rangés dans le même ordre que a et b.

Prévisions de Benjamin :

Lors de cet entretien, Benjamin nous explique qu'il s'attend bien à des difficultés lors de la manipulation des inégalités pour obtenir la comparaison de a^2 et b^2, lorsque a est inférieur ou égal à b :

> B : Par exemple pour les variations, je vais les laisser prendre eux-mêmes a inférieur à b et je m'attends à ce qu'ils me mettent a^2 toujours inférieur à b^2 et de leur faire remarquer, etc.

Rappelons que la question de la comparaison des carrés a été rencontrée dans le chapitre 3 "Inégalités, inéquations" lors d'une activité où les élèves ont démontré le résultat suivant, institutionnalisé ensuite dans le cours, mais que ce résultat n'a pas été réinvesti par la suite :

> <u>3) Rangement des carrés, des racines carrées et des inverses</u>
>
> *<u>Propriété :</u> Deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, c'est-à-dire : si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.*

<u>Attention :</u> si les nombres sont négatifs, alors l'ordre est inverse : $-3 \leq -2$ mais $(-3)^2 \geq (-2)^2$

Benjamin estime, par ailleurs, que le fait que les élèves n'aient rencontré pour le moment que des études algébriques de fonctions strictement monotones les poussera à commettre une telle erreur :

B : Bon là je m'attends à ce qu'ils fassent : on a toujours $a^2 < b^2$. Surtout que cela sera vraiment la première fonction qu'on verra où il y a d'abord décroissance puis croissance.

Pour la prise en charge de cette difficulté, Benjamin prévoit de mettre en place une des stratégies qu'il privilégie et qui lui semble porter ses fruits :

B : Là je vais prendre un contre-exemple. Ce que j'ai déjà fait dans des inéquations qu'ils devaient factoriser eux-mêmes et il y a des élèves, pour calculer le signe de x^2-1, qui disent que x^2 doit être inférieur à 1 donc... Donc là je prenais un contre-exemple et puis là ça marche à tous les coups. Donc là je compte prendre deux nombres négatifs et regarder ce que cela donne.

Contrairement à l'étude de la parité, il estime que les élèves ne devraient pas avoir de problème avec la technique d'étude des variations puisqu'ils ont déjà rencontré cette technique en cours :

B : Là, la méthode ils l'ont vue déjà. Pour les variation de "x donne 2x", on est parti de a < b, on a multiplié par 2, donc on a 2a < 2b donc f(a) < f(b). Ça la méthode, ils l'ont déjà vue alors que pour la parité ils ne l'ont pas encore.

I.1.3.4 - Le tracé de la courbe représentative :

Analyse a priori :

Au cours du chapitre, les élèves ont plusieurs fois rencontré le type de tâches "construire la représentation graphique d'une fonction" à travers différents exercices. Néanmoins, le nombre de spécimens du type de tâches "construire la représentation graphique d'une fonction définie par une expression algébrique" est réduit : les élèves l'ont rencontré lors de l'activité introductrice que Benjamin a proposée en début de chapitre et lors du traitement d'exercices où ils devaient représenter des fonctions affines ou affines par morceaux. Ils n'ont donc, pour le moment, tracé qu'une seule courbe qui ne soit pas une droite ou qui ne soit pas constituée de segments et de demi-droites. Nous pouvons donc envisager que des élèves veuillent joindre deux points de la courbe à l'aide de segments.

Prévisions de Benjamin :

En fait, comme nous l'avons vu lors de l'analyse de ses pratiques relativement au chapitre consacré aux fonctions, Benjamin a déjà été confronté à ce type de difficultés lors du travail sur une activité introductive (cf. la partie III.4.3.2 du chapitre 5). Il a par ailleurs rencontré ensuite d'autres problèmes lors de la correction d'un exercice dans lequel les élèves devaient tracer la représentation graphique d'une fonction dont on donnait le tableau de variation[146] . Il a donc la sensation que les élèves risquent encore de rencontrer des difficultés pour construire la courbe de la fonction carré :

---

[146] Benjamin nous explique ci-dessous ces questions :
" On avait les variations, il fallait en déduire le graphique. Ce qui m'a posé un peu de problèmes, quand même, parce qu'au départ je m'étais dit que les courbes étaient forcément des courbes, qui n'étaient pas des droites en

B : Oui. Bon j'ai essayé d'insister aussi sur le tableau de valeurs. Tout d'abord, prendre des valeurs entières : 0, 1, 2, 3. Et puis se rendre compte qu'entre 0 et 1, on ne sait pas trop comment les rejoindre donc prendre plus de valeurs et puis on va se rendre compte... [...] Donc là leur montrer qu'il faut un maximum de valeurs pour que la courbe soit la plus précise possible.

La prise en charge de cette difficulté est donc prévue directement dans le scénario de l'activité où Benjamin a l'intention d'insister sur la nécessité de prendre suffisamment de points pour avoir un tracé assez précis.

Nous retrouvons, en fait, dans cette analyse du scénario prévu par Benjamin et des difficultés et prises en charge envisagées, des caractéristiques qui sont déjà apparues au cours de l'analyse des pratiques de Benjamin dans le chapitre 5. Nous les synthétisons dans la partie suivante.

I.1.4 - Synthèse :

A travers l'étude de l'élaboration de cette séance, nous retrouvons donc des caractéristiques qui sont apparues lors de l'analyse des pratiques de Benjamin :

- le choix du scénario met en évidence sa volonté de faire participer ses élèves à l'étude de la fonction carré,
- nous repérons de nouveau, également, sa volonté d'aider les élèves à disposer de méthodes à travers l'établissement de la fiche relative au plan d'étude d'une fonction,
- l'entretien de préparation de cette séance montre aussi une centration assez forte autour des difficultés que les élèves peuvent rencontrer et une vision claire des prises en charge envisageables pour les difficultés prévues.

Par ailleurs, comme pour toutes les stratégies d'enseignement que nous avons analysées chez Benjamin, la gestion prévue pour cette séance ne laisse pas réellement de grandes responsabilités à sa classe. En effet, en distribuant le plan d'étude d'une fonction, Benjamin prend de nouveau à sa charge l'élaboration d'une technique. Par la suite, la gestion choisie pour l'étude de chacun des points figurant sur ce plan limite également les responsabilités puisque, pour chacun d'entre eux, il compte amener les élèves à se remémorer les techniques à appliquer avant de les mettre en œuvre pour la fonction carré. A travers ce type de pratiques, la tâche des élèves nous paraît donc très encadrée et simplifiée.

Par ailleurs, nous avons noté que la mise en place d'une telle gestion avait sans doute empêché Benjamin de prendre conscience de certains problèmes que ses élèves pouvaient rencontrer lors de la mise en équation de problèmes (par exemple, la mise en œuvre chez certains de démarche de résolution de type arithmétique). Or l'analyse des difficultés prévues pour l'étude de la parité de la fonction carré montre que Benjamin n'a pas envisagé que des élèves puissent utiliser des exemples numériques. En guidant de nouveau trop fortement sa classe, Benjamin risque donc à nouveau de ne pas rencontrer ce problème.

Au cours de l'entretien de préparation, nous avons donc fait le choix de perturber un peu son projet afin qu'il donne plus de responsabilités à ses élèves. Dans cette rencontre, nous

---

fait. Et rien ne le prouve, en fait, cela peut être des fonctions affines par morceaux. [...] J'ai tracé la courbe : "Ben, Monsieur, pourquoi vous la faites comme ça ?" ."

sommes d'abord revenue sur son choix de faire rappeler systématiquement les techniques pour l'étude de différentes propriétés d'une fonction avant de les mettre en œuvre pour la fonction carré :

AL : D'accord, tu veux déjà leur faire dire la méthode et l'appliquer après ?

B : Oui... Tu pensais que j'allais leur demander d'étudier la parité et, après quand tout le monde aura un peu cherché, on dégage la méthode ?

AL : Peut-être...

B : C'est vrai que je ne l'avais pas vu comme ça, ouais.

AL : En fait, moi je pense qu'il faut les laisser un peu chercher dans chacune des questions.

B : Oui, si on commence déjà par leur donner la méthode, le travail est mâché. [...] Donc oui, c'est peut-être... Pour les faire réinvestir ce qu'on aura vu [...], les laisser partir d'eux-mêmes et dégager la méthode après. Essayer de la leur faire dire, la méthode.

Suite à notre première question, Benjamin s'est donc tout de suite interrogé sur la gestion qu'il avait initialement envisagée et ce questionnement l'a conduit à pointer que ce choix va conduire à simplifier la tâche des élèves. Il envisage alors rapidement une autre gestion qui, cette fois, laisserait plus de responsabilité.

Puis, à la fin de l'entretien, nous sommes revenue sur son choix de distribuer a priori le plan d'étude d'une fonction :

AL : Mais, par rapport à ce que tu as prévu, je les laisserais parler sur ce qu'ils pensent qu'il faut étudier sur une fonction.

B : Oui c'est pas mal. C'est vrai que c'est directif ça.

AL : Toi, tu sais pourquoi tu utilises ce plan. Eux ils ne le savent pas. [...] Cela serait bien de justifier ce que tu leur fais faire.

A travers cette intervention, notre but était de l'amener à modifier le début de son scénario afin de laisser un peu de responsabilités aux élèves lors de l'élaboration de la technique d'étude d'une fonction. Benjamin semble ici assez réceptif à cette proposition. Mais, nous n'avons pas voulu réécrire avec lui un nouveau scénario, notre but étant de repérer comment il allait réagir à ces deux perturbations.

A la lumière de cette analyse a priori, nous proposons dans le paragraphe suivant l'analyse de la séance telle qu'elle s'est véritablement déroulée.

I.2 - Analyse de la séance :

Afin de rendre intelligibles nos analyses, nous avons fait le choix de présenter d'abord rapidement le déroulement effectif de la séance filmée. Puis, dans une deuxième partie, nous analyserons plus précisément certaines interactions entre les élèves et Benjamin qui permettent de mettre en évidence des caractéristiques fortes de ses pratiques en classe au cours de cette séance particulière.

I.2.1 - Le déroulement effectif :

Comme il l'avait prévu, Benjamin introduit la séance dans la logique du cours : après l'étude des fonctions affines, il propose aux élèves d'étudier la fonction carré.

Visiblement sensible à la discussion que nous avons eue lors de l'entretien de préparation, il a modifié son scénario initial et commence cette séance par un premier épisode de huit minutes consacré à l'élaboration collective, puis à l'explicitation d'un plan d'étude d'une fonction. A la fin de cette première phase, Benjamin institutionnalise ce plan en distribuant la fiche que nous avons présentée dans le premier paragraphe.

Il demande alors aux élèves d'étudier le premier point, la détermination de l'ensemble de définition de la fonction carré. Pour ce faire, il laisse d'abord un temps de recherche, puis reprend la parole pour conduire les élèves vers l'élaboration d'une réponse collective à la question posée. Le résultat obtenu est alors noté dans le cours.

Suite à cette institutionnalisation, Benjamin lance l'étude de la parité de la fonction carré. Après un temps de recherche assez court, il demande aux élèves de rappeler la technique algébrique d'étude de la parité d'une fonction introduite et étudiée quelques jours auparavant. Après une discussion avec les élèves qui conduit à l'explicitation de la méthode, Benjamin la fait noter sur la fiche distribuée :

<u>*2 – Etude de la parité éventuelle*</u> *Méthode : L'ensemble de définition est-il symétrique par rapport à 0 ? Si oui, on prend un élément x de D_f et on calcule f(-x).*

Puis, il laisse du temps aux élèves pour qu'ils appliquent cette technique à la fonction carré. Il circule alors dans les rangs, s'adresse individuellement aux élèves et prend en charge leurs problèmes éventuels. Au cours de cet épisode, les élèves rencontrent des difficultés qu'il n'avait pas prévues lors de sa préparation : l'utilisation d'exemples pour montrer que la fonction est paire et des difficultés liées à la formation et à la manipulation des écritures algébriques. Au bout de quelques minutes, Benjamin corrige lui-même la question en faisant participer la classe. Au cours de cette correction, il prend, en particulier, en charge les difficultés liées à l'utilisation des parenthèses et celles liées au calcul de $(-x)^2$. Il fait également référence à l'erreur faite par certains élèves qui voulaient utiliser des exemples numériques pour répondre à la question. Puis, comme pour l'ensemble de définition, il institutionnalise la propriété cherchée.

Le début du quatrième épisode consacré à l'étude des variations de la fonction carré se déroule sur le même schéma que celui mis en place pour l'étude de la parité ; Benjamin laisse du temps aux élèves pour se rappeler la technique à appliquer, puis consacre un moment à la formulation de la méthode qu'il fait ensuite noter sur la fiche :

<u>*3 – Etude des variations*</u> *Méthode : On prend deux éléments a et b dans Df, tels que $a \leq b$, on détermine alors la position de f(a) par rapport à f(b) en manipulant les inégalités.*

Benjamin met alors en jeu une nouvelle stratégie : il envoie un élève au tableau pour qu'il étudie les variations de la fonction carré et le laisse faire. Cet élève commet alors l'erreur prévue par Benjamin : il considère que les carrés de deux nombres sont toujours rangés dans le même ordre que ces deux nombres. Benjamin reprend la parole et tente de faire réagir le reste de la classe en proposant des contre-exemples, comme il l'avait envisagé lors de sa préparation de cette séance. Cette stratégie est efficace et certains élèves évoquent rapidement le fait que la véracité de ce résultat dépend de l'intervalle que l'on considère. Ces réponses permettent alors d'avancer dans l'étude de la question et Benjamin guide l'élève au tableau pour la poursuite de l'étude. Il est, à ce moment, confronté à une autre difficulté qu'il n'avait pas anticipée : un élève propose de désigner par –a un nombre négatif. Benjamin la prend en charge, puis fait rédiger à l'élève au tableau la fin de la réponse à la question posée. Il revient alors sur l'erreur relative à la comparaison des carrés et en profite pour expliciter la première remarque qu'il avait prévu de faire figurer sur la fiche :

> *Une fonction peut être alternativement croissante et décroissante (Attention aux règles de calcul sur les inégalités).*

Après que les élèves ont repris cette remarque, Benjamin envoie une élève au tableau pour dresser le tableau de variation de la fonction carré.

Un dernier épisode est ensuite consacré au tracé de la représentation graphique de cette fonction. Il commence par dresser un tableau de valeurs en demandant aux élèves de fournir des valeurs pour lesquelles ils veulent calculer l'image. Ils obtiennent alors le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Les élèves placent dans un repère les différents points de coordonnées (x ; f(x)) figurant dans ce tableau. Benjamin a prévu un repère sur un transparent où il reporte également ces points de la représentation graphique de la fonction carré. Lorsque les élèves ont terminé, Benjamin fait alors émerger la deuxième remarque de la fiche :

> *Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, il suffit d'étudier ses variations et de tracer la courbe sur la "moitié" de l'ensemble de définition. On obtient l'autre moitié par symétrie.*

Enfin, il aborde la question de la jonction des points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; 1) de la courbe représentative de la fonction carré. Après une rapide discussion sur la forme de la courbe entre ces deux points, Benjamin propose de calculer les coordonnées d'autres points d'abscisse comprise entre 0 et 1 pour avoir une plus grande précision du tracé. La séance se termine là.

Après cette rapide description de la séance, venons-en à l'analyse de certaines interactions entre Benjamin et ses élèves.

I.2.2 - Analyse de certains épisodes :

Au cours de l'analyse des pratiques de Benjamin, nous avons relevé différentes caractéristiques que nous avons synthétisées dans son profil à la fin du chapitre 5. Dans cette séance filmée, nous en retrouvons certaines. L'étude de ses pratiques, au cours de cette séance particulière, va nous permettre d'étudier comment elles se traduisent en classe.

Ainsi, nous avons relevé à plusieurs reprises l'attention particulière que Benjamin porte à ses élèves, qui est apparue à travers la volonté de les faire participer, la prise en charge de leurs difficultés, le souci de les amener à donner du sens à certaines notions… L'étude de certains épisodes de cette séance va mettre en évidence les gestes qu'il adopte en classe pour mener à bien ce projet. Nous avons donc sélectionné quatre interactions dans lesquelles nous voyons clairement apparaître les caractéristiques suivantes :

- Benjamin adopte une gestion des interventions des élèves qui leur laisse une certaine place,
- il n'ignore pas les idées qui n'entrent pas dans son projet,
- il porte une attention particulière à amener les élèves à comprendre leurs erreurs,
- il laisse des responsabilités aux élèves dans l'application de techniques.

L'analyse des pratiques de Benjamin avait également fait apparaître des points faibles concernant, en particulier, la place laissée aux élèves lors de l'élaboration ou de l'explicitation de techniques. Nous retrouvons, en partie, cette caractéristique au cours de la séance filmée. En effet, même si Benjamin a été sensible au fait de laisser une place aux élèves lors de l'élaboration du plan d'étude d'une fonction, nous verrons qu'il garde sous sa responsabilité l'explicitation de celui-ci.

Un deuxième point faible concerne la prise en charge de types de tâches qui lui semblent plus complexes en guidant très étroitement les élèves ou en leur simplifiant fortement la tâche. Cette caractéristique se retrouve au cours d'une interaction spécifique que nous analyserons aussi.

Enfin, la description du déroulement effectif a montré qu'au cours de cette séance Benjamin a été confronté à une difficulté qu'il n'avait pas prévue lors de l'étude de la parité de la fonction carré : des élèves ont cherché à étudier cette propriété en prenant des exemples numériques. Nous étudierons donc également l'interaction correspondant à cet épisode pour comprendre comment Benjamin a pris en charge cette difficulté non prévue.

Passons donc, tout d'abord, à l'étude des quatre interactions qui nous amènent à pointer comment se traduit en classe l'attention particulière que Benjamin porte à ses élèves.

Interaction 1 : Benjamin adopte une gestion des interventions des élèves qui leur laisse une certaine place :

L'attention particulière portée aux élèves apparaît dès le début de la séance avec la modification du scénario prévu, qui montre que Benjamin a été sensibilisé à l'intérêt de faire participer ses élèves à l'élaboration du plan d'étude d'une fonction. En fait, à première vue, il semble assez directif au cours de cet épisode puisque sa stratégie consiste à poser un ensemble de questions destinées à guider les élèves à expliciter les différents points à étudier. Le lancement de cet épisode en témoigne :

> B : Alors, à votre avis, quand on étudie une fonction, qu'est-ce qu'on veut faire ? Quel est le but de l'étude d'une fonction à votre avis ?
>
> E : Pouvoir représenter la fonction.
>
> B : Alors, selon Aziz, le but de l'étude d'une fonction c'est la représentation graphique. Alors on peut écrire ça. Vous ne le recopiez pas. On met toutes les idées en vrac... Alors à votre avis qu'est-ce qu'il nous faut pour faire la représentation graphique d'une fonction ?

Benjamin se saisit donc immédiatement du but exprimé par Aziz qui est tout à fait conforme à sa vision de l'étude d'une fonction et propose à la classe de lister les différentes propositions qui vont apparaître. Il pose alors aussitôt une question relative à la détermination de moyens pour obtenir cette représentation graphique. En posant cette question, Benjamin a vraisemblablement pour projet de faire émerger le quatrième point de sa fiche relatif à l'élaboration d'un tableau de valeurs. Mais, une fois cette question posée, la gestion des interventions des élèves traduit le souci de Benjamin de leur laisser une place.

En effet, la stratégie choisie est de laisser les élèves avancer des idées, d'en récupérer certaines et de leur demander des approfondissements :

B : Alors, à votre avis, qu'est-ce qu'il nous faut pour faire la représentation graphique d'une fonction ?

E : Des points.

B : Des points. Pour avoir des points, qu'est-ce qu'on fait ?

E : On dessine.

E : Des coordonnées.

B : Des coordonnées, voilà. On les obtient comment les coordonnées ?

E : On calcule.

B : Oui on calcule. On a dit qu'on faisait quoi ? On a déjà fait ça... Oui ?

E : On choisit...

B : On fait un tableau...

E : x est égal à...

E : Un tableau de variation.

B : Non pour avoir les points on a dit...

E : Un tableau de valeurs.

B : Un tableau de valeurs. D'accord, il nous faut un tableau de valeurs.

En adoptant cette stratégie, Benjamin négocie une gestion qui laisse une certaine place aux élèves et qui lui permet d'avancer assez rapidement dans son projet. Notons que, pour gagner du temps, Benjamin met, en particulier, en place ici une stratégie qui consiste à faire appel à la mémoire de la classe.

Cette caractéristique, qui apparaît dès cette première interaction, se retrouve à divers moments de la séance filmée, comme nous le verrons dans la suite des analyses.

Passons maintenant à la deuxième caractéristique que nous avons pointée précédemment.

Interaction 2 : Benjamin n'ignore pas les idées qui n'entrent pas dans son projet

Au cours de l'épisode relatif à l'élaboration commune du plan d'étude d'une fonction, d'autres indices permettent de pointer la réelle volonté de Benjamin de prendre en compte ses élèves lors de cette élaboration Ainsi, l'étude des différentes interactions montre qu'en général, lorsque des élèves proposent des idées qui ne sont pas celles qu'il attend, Benjamin ne les ignore pas et qu'il essaie de les amener à comprendre que leurs propositions ne répondent pas à la question en cours. Cet aspect apparaît en particulier lorsque, après l'évocation de la possibilité de dresser un tableau de valeurs, Benjamin tente d'amener sa classe à découvrir un nouveau point du plan : l'étude des variations de la fonction. Son but est alors de faire percevoir l'insuffisance d'un tableau de valeurs pour connaître la forme de la représentation graphique d'une fonction entre deux points connus. Pour ce faire, Benjamin dessine un repère au tableau sur lequel il place deux points :

> B : Bon, avec un tableau de valeurs on va avoir différents points qui vont nous permettre de tracer la courbe. Alors par exemple, si on a une représentation graphique, on sait qu'on a un point ici, on sait qu'on a un point ici...

Un élève propose immédiatement de tracer la droite passant par ces deux points, Benjamin reprend alors la première stratégie qu'il a mise en place dans l'interaction que nous venons d'analyser ; il reprend la réponse de l'élève en traçant la droite et demande un approfondissement au reste de la classe :

> B : Est-ce qu'on est sûr que ça c'est la courbe représentative ?
>
> E : Ben non, elle doit passer par les points.
>
> B : Elle doit passer par les deux points. Mais est-ce qu'elle fait ça ? Ou bien est-ce qu'elle fait ça ? Ou ça ?

Il s'appuie sur le schéma où il représente différentes courbes passant par les deux points et représentant des fonctions croissantes et des fonctions croissantes puis décroissantes. Les élèves font alors différentes propositions qui ne sont pas celles que Benjamin attend mais il ne les ignore pas :

> E : On peut faire une étude pour voir si elle est paire ou impaire... Comme ça on aura déjà une idée de...
>
> B : La parité... Oui Caroline, la parité qu'est-ce qu'elle nous dit ?
>
> C : Les symétries.
>
> B : Ça va être une symétrie, la parité. Là c'est pas des histoires de symétries.
>
> E : On peut voir si c'est affine.
>
> B : Alors si c'est une fonction affine, on est certain que c'est une droite. Ça d'accord. Ici on voit bien que c'est pas une fonction affine. Donc on ne sait pas trop ce que c'est.

Sa stratégie est alors de fournir un enrichissement de ces propositions (en sollicitant éventuellement un autre élève) pour mettre en évidence qu'elles ne répondent pas au problème posé. Notons également que, suite à ces réponses, Benjamin semble se rendre compte que son schéma ne suffit pas pour faire émerger rapidement l'étude des variations, il choisit donc, pour gagner du temps, de faire de nouveau appel à la mémoire de la classe :

> B : Qu'est-ce qu'on a vu d'autre sur les fonctions ? On a parlé de plein de choses. Il y en a une dont on n'a pas parlé encore.
>
> E : Le sens de variation.

Cette stratégie lui permet donc à nouveau d'avancer dans son projet. Mais, il ne se limite pas à reprendre la réponse de l'élève ; il reprend son schéma pour montrer que l'étude du sens de variation permet effectivement de déterminer plus précisément la forme de la représentation graphique d'une fonction entre deux points :

> B : La droite verte, là, la fonction elle est comment ?
>
> E : Croissante.
>
> B : Elle est croissante. Et celle-ci...

E : Croissante puis décroissante...

Brouhaha.

B : Oui elle est croissante puis décroissante. Et ça on le sait comment ?

E : Le tableau de variation.

B : Là il nous faut le tableau de variation. Si on nous dit que la fonction est croissante entre les deux points... Et bien ce ne sera pas forcément une droite hein, ce sera quelque chose de croissant. Si elle est croissante et décroissante, on est sûr qu'elle va avoir une forme qui va avoir cette allure. Donc il est aussi nécessaire d'avoir un tableau de variation. Le tableau de valeurs ne suffit pas. Parce qu'on ne sait pas ce qui se passe entre deux points. Donc il nous faut aussi un tableau de variation.

Nous retrouvons ici une autre caractéristique que nous avons relevée lors de l'analyse du travail algébrique proposé par Benjamin au cours de l'année : il est particulièrement vigilant à ce que ses élèves mettent du sens et une finalité derrière les activités qu'il propose.

Cette vigilance que nous avons repérée à plusieurs reprises apparaît également clairement lors de la prise en charge de difficultés rencontrées, comme nous allons le voir dans l'étude d'une troisième interaction.

Interaction 3 : Benjamin porte une attention particulière à amener les élèves à comprendre leurs erreurs

L'attention portée aux élèves apparaît également lors de la prise en charge de certaines difficultés, notamment celles rencontrées lors de l'étude de la parité et des variations de la fonction carré. Lors de ces moments, Benjamin a clairement la volonté de faire participer ses élèves. Par ailleurs, il apporte une attention particulière à amener ses élèves à comprendre leurs erreurs et à leur donner des moyens pour les éviter. Ces caractéristiques sont particulièrement visibles lors de la prise en charge des difficultés relatives à la formation et au calcul de l'expression $(-x)^2$ lors de l'étude de la parité de la fonction. Après avoir revu avec les élèves la technique d'étude algébrique de la parité d'une fonction, Benjamin laisse un temps de recherche pendant lequel il circule dans les rangs et se rend compte que les élèves rencontrent des difficultés avec le calcul de $(-x)^2$. Au cours de la préparation de la séance, Benjamin n'avait pas prévu ce type de difficulté, mais il l'a rencontrée lors de la séance de module consacrée à l'étude de la parité de fonctions, qui a eu lieu après l'entretien de préparation. Au cours de cette séance, il a déjà été amené à prendre en charge cette difficulté. Mais, devant le constat que certains élèves ont toujours du mal avec cette tâche, son souci d'aider ses élèves le pousse sans doute à refaire un point :

B : Alors la parité. On a dit que, tout d'abord, on vérifie que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. Ici ça a été vérifié : IR est symétrique par rapport à 0. C'est vite fait. Il n'y a pas de problème. On note : D_f = IR est symétrique par rapport à 0. Voilà ! première étape. Je vous l'ai dit : si vous tombez sur un ensemble de définition qui n'est pas symétrique, vous pouvez répondre tout de suite à la question. La fonction ne sera pas paire, ni impaire. La deuxième étape : on suit ce qui a été écrit ici. On prend un nombre x dans l'ensemble de définition, on calcule f(-x). Soit x appartenant à D_f, f(-x) il est égal à quoi ? Il est égal à $(-x)^2$.

Il note au tableau : f(-x)= -x.

B : Qu'est-ce que je fais pour mettre au carré ?

E : On met des parenthèses...

B : Où ça ?

E : *Inaudible.*

B : Autour de -x. C'est -x qui est élevé au carré. Ça on l'a vu lundi. Il y en a qui avaient fait l'erreur : ils écrivaient moins, puis x^2. Ils ne prenaient pas la précaution de mettre des parenthèses et puis évidemment après tout était faux. Alors $(-x)^2$, c'est égal à quoi ?

E : x...

B : C'est pas égal à x...

E : x^2...

B : C'est égal à x^2. Ça aussi on l'a vu lundi : $(-x)^2$... Moins par moins ça fait plus, donc c'est exactement la même chose que x^2. Pour vous souvenir de ça, vous calculez $(-2)^2$, ça fait 4 et c'est exactement la même chose que 2^2.

Devant la résistance de ses élèves face à ce calcul, Benjamin prend donc ici le parti de reprendre les explications qu'il a visiblement déjà fournies au cours de la séance de module consacrée à la parité. Il choisit également de leur donner un moyen pour éviter certaines erreurs lors du calcul de ce type d'expressions : il leur propose de faire ce calcul avec un nombre et de généraliser le résultat obtenu. Nous retrouvons ici les deux stratégies privilégiées par Benjamin pour la prise en charge des difficultés en algèbre de ses élèves, que nous avons pointées lors de l'étude des difficultés qu'il a repérées tout au long de l'année : la réexplication et le passage au numérique.

Par ailleurs, nous repérons ici le souci de faire participer la classe en posant des questions relatives à la formation de l'expression et à son calcul ("Qu'est-ce que je fais pour mettre au carré ? ", " Alors $(-x)^2$, c'est égal à quoi ? "). Nous pouvons toutefois également noter que Benjamin garde ici sous sa responsabilité la justification des réponses fournies par les élèves.

En revanche, l'étude d'une quatrième interaction montre qu'il a le souci de laisser une certaine responsabilité à ses élèves lors de l'application de techniques.

Interaction 4 : Benjamin laisse des responsabilités aux élèves pour l'application de techniques

Nous relevons ainsi que pour les deux premiers points étudiés figurant sur le plan (recherche de l'ensemble de définition, étude de la parité de la fonction carré), Benjamin laisse un temps de recherche individuel qui permet aux élèves de s'approprier la question en jeu. Pour le point suivant (étude des variations), il laisse encore du temps pour que les élèves se remémorent la technique à appliquer, mais une fois cette méthode rappelée, il organise directement une étude collective. Ce changement de pratiques peut sans doute s'expliquer par le fait qu'il essaie de gagner du temps pour pouvoir finir l'étude de la fonction carré avant la fin de la séance. En effet, au moment de l'étude des variations, la moitié du temps est déjà écoulée et il reste encore deux points à étudier. Il met alors en place une stratégie qu'il n'avait pas envisagée lors de l'entretien de préparation : il envoie un élève au tableau. C'est également un geste qu'il nous a décrit à plusieurs reprises lors des entretiens et qui lui permet d'impliquer sa classe dans l'étude en cours (dans cette séance, nous retrouvons également ce geste lors de la construction du tableau de variation). Pour l'étude des variations, Benjamin choisit de ne pas trop guider l'élève au tableau qui commet alors l'erreur qu'il avait prévue lors de la préparation de la séance :

B *à un élève* : Tiens, tu viens nous le faire au tableau. La méthode est écrite juste à côté. Tu n'as qu'à la suivre. Première chose. Qu'est-ce qu'on a dit ? Soient a et b deux nombres réels, etc.

E_t : Je l'écris.

B : Oui. Bon d'abord tu mets un petit tiret et tu dis qu'on cherche le sens de variation. Soient a et b appartenant à D_f... On les prend de quelle manière on a dit ?

E_t : Tels que a soit inférieur ou égal à b.

B : Tels que a soit inférieur ou égal à b. On a dit ici que manipuler les inégalités cela voulait dire élever au carré.

E_t : Je l'écris ?

Il écrit : on élève au carré.

B : Ah ça, ce n'était pas la peine de l'écrire.

L'élève écrit $a^2 \leq b^2$.

B : Donc on obtient a^2 inférieur ou égal à b^2...

Un autre élève : Ensuite on sait que $f(a) = a^2$ et $f(b) = b^2$. Donc on obtient $f(a) \leq f(b)$.

B : Hm, hm.

L'autre élève : Cela veut dire que la fonction est croissante.

B : D'accord. Alors, a et b on les a pris où ça ?

E : Dans l'ensemble de définition.

B : L'ensemble de définition, c'est quoi ?

E : C'est IR.

B : C'est IR. Donc a et b sont deux nombres réels tout à fait quelconques. Par exemple on va prendre $a=-4$ et $b=-2$. On a bien $a \leq b$ parce $-4 \leq -2$. On élève au carré qu'est-ce qu'on obtient. $(-4)^2$ c'est combien ?

E : 16.

B : $(-2)^2$ c'est combien ?

E : 4.

B : Est-ce que $16 \leq 4$?

E : Non.

B : Pourtant c'est ce qu'on déduit de ce qui est écrit au-dessus.

E : Ouais, il y a pas les parenthèses.

B : Si a est entre parenthèse qu'est-ce que cela fait de plus ?

E : Cela revient au même.

B : Si a est égal à 2 et b=4, on a toujours $a \leq b$, cela n'a pas changé. a^2 c'est quoi ? C'est 4. b^2, c'est 16. Ah, cette fois...

E : Cela dépend de l'intervalle.

E : Il faut prendre IR*.

B : IR*, c'est IR privé de 0, je ne pense pas que c'est ça que tu as voulu dire.

E : IR avec un plus.

B : C'est à dire l'ensemble des réels positifs. Ce qui a été fait au tableau marche parfaitement quand a et b sont deux nombres positifs. Par contre quand ils sont négatifs, qu'est-ce qu'il faut faire ?

E : On change le sens...

B : Il faut changer le sens de l'inégalité. Et ça on l'avait vu dans une activité qu'on avait faite sur les inégalités. Lorsque a et b sont deux réels positifs tels que $a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$. Dans le cas où ils sont négatifs, on change le signe de l'inégalité.

Suite à cette mise au point, Benjamin reprend avec les élèves l'étude des variations et finit la rédaction de cette étude dans le cas où a et b sont négatifs.

Au cours de l'analyse des pratiques de Benjamin, nous avons relevé qu'un de ses moyens pour pallier les difficultés d'un élève au tableau est de le guider pas à pas (ceci était en particulier le cas lors d'une activité dans laquelle les élèves devaient démontrer le théorème relatif au rangement des carrés de deux nombres positifs, cf. page 146). Pour l'étude des variations, Benjamin prévoit que les élèves risquent d'oublier de prendre en compte le signe de a et b lors de la comparaison de a^2 et b^2. Dans la mesure où cette erreur va permettre d'expliciter une des deux remarques qu'il a prévu de faire noter et dans la mesure où il sait comment la prendre en charge, il laisse donc l'élève écrire "$a^2 < b^2$". Il laisse alors quelques secondes à la classe pour réagir, mais les élèves n'ont visiblement pas perçu l'erreur et un élève propose de conclure que la fonction est croissante. Benjamin met alors en place la stratégie de prise en charge prévue : il choisit des exemples pour que les élèves prennent conscience de l'existence d'un problème et pour qu'ils trouvent où il se situe. Notons que Benjamin a choisi ici de garder sous sa responsabilité le choix des exemples. Il aurait pu choisir d'autres moyens : il aurait pu demander à ses élèves leur avis sur ce que leur camarade avait écrit au tableau ou leur demander de calculer a^2 et b^2 pour des valeurs de leur choix afin qu'ils s'aperçoivent du problème. La stratégie de Benjamin lui permet d'avancer plus rapidement dans son projet tout en faisant participer sa classe, mais l'on peut se demander si les réponses des élèves ("Cela dépend de l'intervalle", "Il faut prendre IR*", "On change le sens") ne sont pas dues à des effets de contrat. Dans la mesure où Benjamin ne leur demande pas d'approfondissement ou de justification de leur réponse, il est difficile de déterminer ce que ces élèves ont réellement compris.

Suite à l'analyse de ces quatre premières interactions, nous proposons l'analyse de deux autres dans lesquelles nous retrouvons deux points faibles que nous avons déjà pointés lors de l'analyse des pratiques de Benjamin dans le chapitre 4.

Interaction 5 : Benjamin garde à sa charge l'explicitation du plan d'étude d'une fonction

Suite à la discussion entre Benjamin et l'ensemble de la classe relative à l'élaboration du plan d'étude d'une fonction, les différents points à étudier sont apparus dans l'ordre suivant : représentation de la fonction, tableau de valeurs, tableau de variations, étude de la parité, détermination de l'ensemble de définition (c'est-à-dire dans l'ordre inverse du plan prévu par Benjamin). Il prend alors à sa charge l'explicitation du plan qu'il souhaite institutionnaliser :

> B : Et bien faire l'étude d'une fonction, c'est chercher toutes ces choses là mais exactement dans le sens inverse où c'est marqué. On commence par chercher l'ensemble de définition pour savoir où on travaille, ensuite on va chercher la parité, le tableau de variation, le tableau de valeurs et on termine par la courbe.

Benjamin ne fournit donc ici aucun élément qui permettrait de justifier l'ordre adopté.

Dans l'interaction suivante, nous retrouvons la tendance de Benjamin à simplifier la tâche des élèves lorsqu'elle lui semble trop complexe.

Interaction 6 : Benjamin a tendance à faciliter la tâche des élèves

Au cours de l'analyse des pratiques de Benjamin, nous avons également repéré que l'attention qu'il porte se traduit par une tendance à faciliter la tâche de ses élèves lorsque le travail proposé lui semble trop complexe. Malgré la discussion que nous avons eue lors de l'entretien de préparation à ce sujet, nous retrouvons cette caractéristique au cours de cette séance. En effet, comme nous l'avons vu lors de l'étude de la préparation de Benjamin, l'étude des variations et de la parité de la fonction lui semblait plus complexe que l'étude des autres points. Cette prévision de difficultés le pousse donc, pour ces deux points, à "mâcher" le travail des élèves en leur demandant de commencer par rappeler la méthode à appliquer. Ce n'est qu'après une explicitation de cette technique que les élèves commencent à étudier les propriétés de la fonction carré. L'analyse de la séance montre, de nouveau, le souci de Benjamin de faire participer ses élèves au rappel de cette technique, comme le montre l'extrait suivant relatif à l'explicitation de la technique d'étude algébrique des variations d'une fonction :

> B : Etape suivante, c'est quoi... Etude des variations. Je vous laisse chercher un petit peu. On en a déjà fait des études de variations. Donc la méthode, normalement vous devez la connaître, je vous laisse vous en souvenir.
>
> *Les élèves cherchent.*
>
> B : Ceux qui ne se souviennent plus prennent leur cours. Ils regardent la définition du sens de variation d'une fonction, la méthode est contenue dans la définition.
>
> *Les élèves cherchent, Benjamin circule dans les rangs.*
>
> B : Qui est-ce qui se souvient de ce qu'on fait pour étudier les variations ?
>
> E : Il faut dire si la fonction est croissante ou décroissante.
>
> B : D'accord. Le but est de déterminer si la fonction est croissante ou décroissante. Pour ça qu'est-ce qu'on fait ?
>
> E : On prend deux réels.
>
> B : On prend deux réels. On les prend comment ces deux réels ?
>
> E : Ils appartiennent à l'ensemble de définition.

B : Alors évidemment la première condition est qu'ils appartiennent à l'ensemble de définition. Ensuite comment ils doivent être ?

E : a inférieur ou égal à b.

B : On prend a inférieur ou égal à b. Ensuite qu'est-ce qu'on fait ?

E : Si f(a) inférieur ou égal à f(b) on sait que...

B : Alors pour obtenir f(a) et f(b) qu'est-ce qu'on fait ?

E : On prend...

B : Alors on va manipuler les inégalités en appliquant les règles qu'on connaît : quand on multiplie une inégalité par un nombre positif, cela ne change pas de sens, etc. Ça, c'est toutes les petites règles sur les inégalités que l'on connaît. Pour obtenir à la fin f(a) et f(b), avec un symbole entre les deux et puis déterminer si elle est croissante ou décroissante. La méthode, on l'écrit.

Benjamin remplit la fiche projetée.

B : On prend deux éléments a et b dans l'ensemble de définition D_f tels que a soit inférieur ou égal à b, on manipule les inégalités pour déterminer la position de f(a) par rapport à f(b).

Pour faire participer les élèves à ce rappel, Benjamin met donc en place une stratégie que nous avons décrite précédemment et qui consiste à lancer le débat par une question ("Qui est-ce qui se souvient de ce qu'on fait pour étudier les variations ?") et à reprendre les réponses des élèves en leur posant des questions pour les approfondir. Notons également que Benjamin garde sous sa responsabilité l'explicitation finale de la méthode à utiliser. Nous avons déjà repéré cette caractéristique lors de l'étude du premier épisode et nous la retrouvons également pour l'explicitation de la technique d'étude algébrique de la parité d'une fonction.

La tendance à faciliter la tâche des élèves se retrouve également de manière plus subtile lorsque le travail demandé aux élèves semble plus simple à Benjamin. En effet, lors de l'entretien de préparation, Benjamin avait précisé qu'il pensait que la recherche de l'ensemble de définition ne poserait pas de problèmes aux élèves, pourtant lorsqu'il lance la recherche des élèves, nous pouvons voir qu'il pose une question qui facilite la tâche des élèves :

B : Bon alors l'ensemble de définition de la fonction qui à x associe x^2, à votre avis c'est quoi ? Pour quelles valeurs de x peut-on calculer x^2 ?

E : Tous les réels sauf 0.

B : Alors Aziz nous propose tous les réels sauf 0. C'est-à-dire que pour Aziz on ne peut pas calculer 0^2.

E : Si.

B : 0^2 ça fait 0.

De même, lorsqu'il reprend la réponse d'Aziz pour faire réagir les autres élèves et les amener à l'invalider, il l'enrichit, ce qui contribue également à faciliter la tâche.

Enfin, nous terminerons notre étude de certaines interactions extraites de la séance filmée dans la classe de Benjamin par l'étude de la prise en charge d'une difficulté non prévue par Benjamin.

Interaction 7 : la prise en charge d'une difficulté non prévue

Au cours de la séance, lors de l'étude individuelle de la parité d'une fonction, Benjamin s'approche d'un élève qui semble avoir du mal à commencer et il découvre alors une procédure erronée qu'il n'avait pas prévue :

> B : Là est-ce que tu as étudié la parité ? Non, tu ne l'as pas fait.
>
> Le voisin : f(-4) = f(4)... f(-4)...
>
> B : Pourquoi tu parles de –4 ?
>
> E : On prend un réel...
>
> B : Mais le réel on le prend... Si tu prends f(-4), tu vas démontrer quelque chose sur f(-4). Cela ne sera pas une généralité. Nous, on veut quelque chose de général, on veut quelque chose qui soit vrai pour tous les nombres réels x. C'est pour cela que dans la méthode on a dit qu'on prenait un nombre x réel dans l'ensemble de définition et on calcule f(-x). C'est exactement ce qu'on a fait lundi.

Benjamin est donc confronté ici à une difficulté "classique" lors de l'étude de la parité d'une fonction : l'utilisation d'un exemple pour prouver une généralité. L'analyse de l'entretien de préparation a montré que cette difficulté n'avait pas été prévue par Benjamin. Il découvre donc ici ce type de procédure et semble assez surpris au départ ("Pourquoi tu parles de –4 ?"). Il prend alors cette difficulté en charge en faisant remarquer à l'élève l'insuffisance de sa démarche pour prouver une généralité et fait de nouveau appel à ce qui a été fait lors du module consacré à l'étude de la parité de fonctions. Benjamin s'adresse alors immédiatement à la classe entière :

> B : Alors ici f(-x), qu'est-ce qu'on obtient ? Comment on fait pour calculer f(-x) ? On l'a dit lundi.
>
> E : On remplace x par -x.
>
> B : On remplace x par -x. A chaque fois qu'on voit apparaître x dans l'expression, on le remplace par -x. Allez-y.

A travers ce commentaire relatif à la technique à appliquer, Benjamin semble faire en sorte que les autres élèves utilisent bien une lettre pour étudier le résultat général à prouver.

Lors de la correction collective de cette question, Benjamin passera du temps sur la prise en charge des difficultés de formation et de manipulation de l'expression $(-x)^2$, comme nous l'avons vu précédemment. C'est sans doute son souci de prendre en charge toutes les difficultés de ses élèves qui va le pousser à faire un commentaire sur la procédure erronée repérée pendant la recherche :

> B : Alors $(-x)^2$, on a dit que c'était la même chose que x^2. Et x^2 c'est quoi ?
>
> E : C'est f(x).
>
> B : C'est f(x). Donc pour n'importe quel nombre x de D_f, je dis bien pour n'importe quel... Non pas comme certains d'entre vous voulez faire : en prendre un et regarder si ça marche. Non, si ça marche pour un, ça ne marche pas forcément pour les autres. Là on a prouvé que cela marchait pour tous les nombres réels. Pour tous les nombres réels x, f(-x) = f(x). Conclusion : la fonction f est paire.

Visiblement, Benjamin n'a pas d'autre moyen de prendre en charge cette difficulté que celui qui consiste à mettre en garde les élèves.

En conclusion, l'analyse du déroulement effectif de cette séance et de différentes interactions a montré, de nouveau, la sensibilité de Benjamin à laisser une place à ses élèves. Néanmoins, nous avons également noté qu'à certains moments, il garde à sa charge certaines tâches pour lesquelles il pourrait laisser plus de responsabilité à sa classe. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue qu'un enseignant est une personne soumise à certaines contraintes (Rogalski, 2000) et que le système de ces contraintes n'est pas toujours compatible avec le fait de laisser de réelles responsabilités pour toutes les tâches rencontrées par les élèves au cours d'une séance. L'étude des pratiques de Benjamin au cours de cette séance spécifique montre bien qu'à certains moments, face à la contrainte du temps, il a dû prendre des décisions. Ceci apparaît, en particulier, dans l'analyse de l'interaction n° 4 à travers laquelle nous avons pu noter un changement de pratiques quant à la responsabilité laissée aux élèves lors de l'application de techniques. Cet aspect apparaît également à travers la stratégie qui consiste à faire appel à la mémoire de la classe, que Benjamin a mise en œuvre à plusieurs reprises au cours de l'heure.

La dernière partie de ce paragraphe consacré à la séance filmée dans la classe de Benjamin portera, comme annoncé, sur l'analyse que fait Benjamin de ses propres pratiques.

I.3 - L'analyse de Benjamin :

Comme nous l'avons déjà précisé, cette analyse s'est déroulée en deux temps : suite à la séance, nous avons pris un moment avec Benjamin pour recueillir ses impressions à chaud sur ce qui venait de se passer et ses premières analyses. Puis, nous nous sommes rencontrés environ trois mois après le tournage pour visionner ensemble le film. Le but de ce troisième entretien était d'accéder à l'analyse que faisait Benjamin avec une certaine prise de recul.

Après une description rapide du contenu de nos discussions au cours de ces deux entretiens, nous centrerons notre analyse sur la naissance de questionnements nouveaux chez Benjamin, phénomène que nous avons, par ailleurs, déjà signalé lors de l'élaboration de son profil à la fin du chapitre 5. Il s'agit d'une part d'un questionnement relatif à l'élaboration des techniques et aux responsabilités à laisser aux élèves lors de ce moment didactique, d'autre part d'un questionnement concernant l'apprentissage de la notion de contre-exemple.

Présentons donc rapidement le contenu des deux entretiens dans lesquels nous avons demandé à Benjamin d'analyser la séance filmée.

I.3.1 - Le contenu des entretiens

Au début de l'analyse à chaud de la séance, Benjamin regrette d'avoir manqué de temps pour finir l'étude de la représentation graphique et surtout pour faire une synthèse de ce qui a été étudié au cours de la séance. Mais, il semble plutôt satisfait de ce qui vient de se passer. Il estime, par exemple, que ses élèves ont déterminé assez rapidement les différents points à aborder pour étudier une fonction (" J'étais bien content quand je leur ai demandé ce qu'ils entendaient par étude de fonctions, ils ont dit exactement ce qu'on faisait et vraiment dans le sens... ") et il constate des adéquations entre ce qu'il avait prévu et la réalité : il est, ainsi, particulièrement satisfait qu'un élève ait repéré lui-même la symétrie de la courbe et qu'il ait su la justifier avec la parité de la fonction. Il signale aussi qu'en ce qui concerne l'étude des variations de la fonction, les élèves ont rencontré la difficulté qu'il avait prévue.

Au cours de cette analyse, Benjamin pointe également un décalage entre ce qu'il avait prévu et ce qui s'est effectivement passé lors de l'étude de la parité de la fonction carré : il considère que les élèves ont rencontré plus de difficultés que ce qu'il avait prévu. Au cours de ce premier entretien, il revient donc assez longuement sur ces difficultés.

Enfin, Benjamin a un regard critique sur son choix d'expliciter lui-même le plan d'étude d'une fonction sans justifier l'ordre des différentes étapes et il propose alors des modifications dont il discute les limites.

L'entretien qui a lieu trois mois après la séance filmée est l'occasion pour Benjamin d'approfondir certaines réflexions menées au cours du premier entretien (celles relatives aux difficultés rencontrées alors par les élèves ou celle concernant l'explicitation du plan d'étude d'une fonction, par exemple). Il revient, en particulier, sur la difficulté de certains élèves à mettre en œuvre l'algèbre comme outil de preuve, ce qui le conduit à une analyse critique de ses propres pratiques de prise en charge des difficultés de ses élèves faisant appel à des exemples numériques et des contre-exemples. Le visionnement de la bande vidéo le conduit aussi à analyser certains aspects de sa gestion de la classe.

Au cours de l'analyse de cette séance, nous retrouvons certaines caractéristiques que nous avons pointées lors de l'analyse des pratiques de Benjamin en algèbre : l'attention portée aux difficultés des élèves, son souci de structure et de rigueur et des questionnements relatifs à ses propres choix didactiques. Mais, cette analyse fait également naître des réflexions nouvelles notamment en ce qui concerne les responsabilités qu'un enseignant peut laisser à ses élèves lors du travail en classe, les difficultés rencontrées par les élèves lors de la mise en œuvre de l'algèbre comme outil de preuve et leurs conséquences sur les choix didactiques.

Nous avons fait le choix ici de centrer notre étude sur la naissance de deux questionnements nouveaux que nous avons présentés dans le profil de Benjamin et dont la mise en place de la séance filmée et son analyse semblent, en partie, être la source.

C'est ce que nous allons analyser dans les parties suivantes.

I.3.2 - Le début d'une réflexion sur la responsabilité à laisser aux élèves :

Lors de l'élaboration du profil de Benjamin, nous avons noté son souci d'aider les élèves à disposer de méthodes et à acquérir des réflexes. Cette vision de l'enseignement de l'algèbre apparaît de nouveau très clairement au cours des deux entretiens. Dans le chapitre 5, nous avions fait l'hypothèse de l'influence d'éléments de sa logique personnelle : son goût pour les démonstrations structurées et son besoin de méthodes pour réussir certains examens à l'université. Les analyses menées par Benjamin relativement à cette séance confirment cette hypothèse, comme nous le verrons dans une première partie. Il s'avère que l'analyse de la séance conduit également Benjamin à un début de réflexion sur les possibilités et l'intérêt de laisser plus de responsabilité aux élèves pendant le travail en classe, en particulier lors de l'élaboration de techniques. Nous pouvons, en fait, repérer deux axes de réflexion (que nous étudierons dans les parties I.3.2.2 et I.3.2.3) : le premier est relatif à une amélioration d'une partie du scénario mis en œuvre par Benjamin afin de laisser plus de place aux élèves, le second concerne la gestion de la classe.

Etudions, dans un premier temps, l'influence du souci de rigueur de Benjamin sur la conception de certains moments didactiques.

I.3.2.1 - Le souci de structure et de rigueur :

Dans l'analyse que Benjamin fait de cette séance, apparaît de nouveau son souci de proposer aux élèves un savoir mathématique structuré et de les aider à développer une certaine rigueur dans leur travail. Il aborde le premier de ces deux points, dès le début de l'analyse à chaud, en regrettant de ne pas avoir eu le temps de proposer une synthèse sur ce qui a été étudié au cours de la séance :

> B : Et puis ce que j'aime bien quand j'ai fait un truc comme ça, c'est plus ou moins rappeler tout ce qu'on a fait. Ensemble de définition, parité, tableau de variation, tableau de valeurs, la courbe. Montrer tout le cheminement. Voilà on a fait ça, ça et ça. Toutes les propriétés de la courbe sur un seul tableau, quoi.

Comme l'analyse du scénario l'a montré, au cours de cette séance de cinquante minutes, Benjamin organise différents moments didactiques : première rencontre avec le type de tâches "étudier une fonction", élaboration et institutionnalisation d'une technique pour ce type de tâches, travail de cette technique sur la fonction carré et des différentes techniques associées aux propriétés d'une fonction déjà introduites, institutionnalisation des propriétés de la fonction carré. L'analyse à chaud de Benjamin montre qu'il semble conscient du fait que le contenu de cette séance est lourd et qu'il est soucieux d'aider ses élèves à dégager ce qu'il faut retenir de la séance :

> B : Pour moi, quand on fait une synthèse comme ça, ça leur donne en même temps le plan d'étude de la fonction. Et puis retirer l'essentiel. Il y a eu pas mal de calculs, pas mal de choses. On a revu les règles d'inégalités qui n'ont finalement pas grand-chose à voir avec l'étude d'une fonction.

Cette synthèse lui permet donc d'amener les élèves à distinguer les éléments qui ont concouru à la construction du savoir en jeu et ceux qui constituent ce qu'il faut retenir plus spécifiquement de la séance.

Benjamin n'avait encore jamais évoqué cette pratique lors des entretiens de suivi, mais elle paraît être usuelle pour lui puisqu'il précise, au cours de l'entretien bilan, qu'il essaie de faire une synthèse à chaque fin de séance de module. Il semble attentif à faire participer les élèves à cette tâche, même s'il en garde, en général, la responsabilité pour une raison de temps :

> B : Dans un cas comme ça, c'est moi qui fait la synthèse à la fin, à moins d'avoir vraiment cinq minutes et que je peux dialoguer avec les élèves. Mais s'il reste deux minutes, je prends l'initiative.

Dans le cas de la séance filmée, en particulier, Benjamin prévoit de consacrer le début de la séance suivante à cette synthèse et, dans la mesure où il disposera de temps, il compte demander à un élève ce qu'il peut dire à propos de la fonction carré.

Le souci d'aider les élèves à acquérir une certaine rigueur apparaît aussi lors de l'analyse, après visionnement de la bande vidéo, de l'épisode consacré à l'étude des variations de la fonction carré, pendant lequel il avait fait le choix d'envoyer un élève au tableau. L'analyse ce cet épisode avait montré l'attention particulière que Benjamin portait à une rédaction rigoureuse de la solution. Au cours de l'analyse de la bande vidéo, il choisit de revenir sur ce point et évoque alors la volonté d'amener ses élèves à expliquer leurs procédures. Il semble douter du sens qu'ils mettent derrière certains gestes :

> B : Pour les tableaux de signes, par exemple, on veut connaître le signe de 3x+2, je leur avais dit on écrit : on cherche les valeurs de x pour lesquelles 3x+2>0 et on fait les calculs. Et bien non ils commencent tous

par 3x+2>0 et ils calculent. Alors que j'aimerais bien qu'ils m'expliquent ce qu'ils font. Moi j'ai l'impression que c'est pas clair dans leur tête.

D'une manière plus générale, il évoque les difficultés de ses élèves à expliciter les techniques à mettre en jeu lors du traitement de certaines tâches mathématiques :

B : Quand je leur demande "qu'est-ce qu'on fait pour étudier les variations ? ", la réponse c'est pas la méthode, c'est en gros la définition de la variation. Ça, je l'ai constaté aussi, quand on leur demande : "qu'est-ce qu'on fait pour étudier la parité ?", on regarde si f est paire ou impaire. C'est plutôt la conclusion qu'ils donnent plutôt que la méthode. [...] Ils disent ce qu'ils veulent faire mais pas comment.

Benjamin semble donc avoir essayé d'aider ses élèves en leur présentant aussi souvent que possible des rédactions-types pour les différents exercices rencontrés. Nous retrouvons donc ici son souci d'amener ses élèves à disposer de modèles, ce que nous avons déjà repéré à plusieurs reprises au cours de l'analyse du travail algébrique proposé par Benjamin. Mais, ses élèves ne rédigent visiblement pas comme il l'attend, ce qui lui pose un problème didactique et il s'interroge donc sur des moyens qui lui permettrait de remédier à ce problème :

B : J'essaie de faire ça pour chaque exercice, mais alors ils ont un mal fou à recracher quelque chose de correct. Là je ne vois pas comment faire, à part leur faire faire des pages et des pages de rédaction, ce qui est complètement stupide. Mais ils ont du mal à se mettre en tête une rédaction correcte, pourtant je leur en fais mettre le minimum.

L'analyse de Benjamin le conduit donc à repérer les difficultés des élèves à donner du sens aux techniques à utiliser lors du traitement de différentes tâches et à les expliciter. La référence à l'étude du signe d'expressions du type ax+b[147] montre que, bien avant cette séance filmée, il avait déjà repéré de tels problèmes. Visiblement, le seul moyen qu'il a trouvé pour y remédier est de proposer des rédactions-types, mais la citation ci-dessus montre qu'il ne lui convient pas forcément. Cette première analyse montre donc que Benjamin rencontre ici un problème didactique pour lequel il n'a pas encore trouvé de solution qui le satisfasse. En fait, il ne semble pas s'être interrogé sur la place laissée aux élèves lors de l'élaboration des techniques et sur le fait que leur donner plus de responsabilités lors de ce moment didactique pourrait contribuer à aider les élèves à donner du sens aux techniques mises en jeu.

Or, comme nous l'avons vu lors de l'analyse de la séance, Benjamin, prenant en compte notre discussion lors de l'entretien de préparation, a intégré dans le scénario initialement prévu une première phase consacrée à une élaboration collective du plan d'étude d'une fonction. Cette perturbation dans ses pratiques habituelles va le conduire à une réflexion sur le déroulement de la séance, que nous analysons ci-dessous.

I.3.2.2 - Une réflexion sur le scénario :

Cette réflexion débute dès la fin de la séance. En effet, lors de l'analyse à chaud, Benjamin regrette d'avoir explicité trop vite le plan figurant sur la fiche distribuée aux élèves. Après le visionnement de la bande vidéo, il confirmera cette impression de vitesse et expliquera que, dans la mesure où il avait déjà rajouté cet épisode, il avait peur de ne pas avoir assez de temps pour terminer l'étude de la fonction carré. Au cours de l'entretien qui suit immédiatement la séance, il regrette aussi de ne pas avoir pris de temps pour justifier l'ordre

[147] Ce type de tâches a été introduit à la fin du mois de novembre.

des points à aborder lors de l'étude d'une fonction figurant sur cette fiche. Mais, il constate alors qu'à ce moment de la séance, la justification de certains points était problématique :

> B : Bon c'est pareil, ce que j'aurais bien aimé, c'est montrer le lien plus précisément entre les deux[148] : d'abord l'ensemble de définition pour savoir où est-ce qu'on calcule... Bon je ne pouvais pas donner la justification de la parité à ce moment-là, parce que je n'avais pas encore dit que cela nous permettait de travailler sur une moitié d'intervalle, c'est dommage aussi.

Nous retrouvons ici la tendance de Benjamin à s'interroger sur ses pratiques et sur les possibilités qu'il a pour les modifier, lorsqu'elles ne lui conviennent pas. Ce questionnement le conduit alors aussitôt à envisager un nouveau scénario qui laisserait plus de place aux élèves :

> B : J'ai pensé que cela serait pas mal de consacrer une séance complète où ils font l'étude en vrac. [...] Suivre en fait l'idée des élèves. Tu vois, faire un peu ce qu'on avait dit au début : on va commencer par quoi, etc. Et puis à la fin construire la fiche ensemble.

Benjamin considère qu'un tel scénario lui éviterait d'inciter les élèves à étudier certains points et que l'ordre s'établirait alors naturellement à la fin de l'étude de la fonction carré, comme il nous l'explique à propos de l'étude de la parité :

> B : Tu vois, j'ai été obligé de leur dire : il y a pas autre chose qu'on a vu ? Ben si, la parité. Cela arrive plus ou moins comme un cheveu sur la soupe. Alors que si on fait l'étude sans la parité, là tu as vu comme il a réagi, il aurait dit : oh ben, c'est symétrique. Et lui demander alors ce qu'on aurait pu faire. Je trouve que c'est mieux.

Au cours de cet entretien, qui a lieu juste après la séance filmée, Benjamin ne se souvient plus très bien de ce qui s'est réellement passé à ce moment : il n'a pas eu à faire appel à la mémoire de la classe pour que quelqu'un propose d'étudier la parité. En fait, il s'est saisi d'une proposition faite par un élève lorsqu'il guidait sa classe vers la découverte d'un autre point à aborder lors de l'étude d'une fonction : la détermination de l'ensemble de définition[149]. Mais, cette citation montre que Benjamin semble tout à fait conscient que sa technique d'appel à la mémoire de la classe ne laisse pas forcément beaucoup d'initiative aux élèves. Au cours du visionnement de la bande vidéo, Benjamin repère qu'il fait souvent appel à cette technique et il souhaite alors justifier cet aspect de ses pratiques :

> B : Ce qui est frappant, aussi, c'est que je suis tout le temps en train de dire : rappelez-vous ce qu'on a fait lundi, rappelez-vous ce qu'on a fait tel jour. Et je suis toujours obligé de faire ça, parce que si je ne fais pas appel à leur mémoire comme ça, il n'y a rien qui vient. Ils attendent parce qu'ils n'apprennent pas très bien leur cours, ils ne regardent pas très bien les exercices. Donc en essayant de les faire se souvenir, en général, ça marche.

Même s'il semble convaincu de l'intérêt de laisser plus de responsabilité aux élèves quant à la construction du sens qu'ils peuvent donner à l'ordre d'étude des différents points, Benjamin émet une réserve quant à la mise en place d'un tel scénario. En effet, contrairement

---

148 Benjamin fait référence ici à ce qui est ressorti de la discussion avec les élèves lors du premier épisode de la séance et le plan figurant sur la fiche distribuée.

149 Nous reprenons ci-dessous l'extrait de la retranscription de la séance qui correspond à ce moment :

" B : A votre avis, qu'est-ce qu'il nous faut d'autre ? [...] Aziz : Il faut avoir des nombres réels. B : Tous les nombres réels ? A : Cela dépend si c'est une fonction paire ou... B : Alors la parité. La parité c'est intéressant, cela va nous donner les propriétés de symétrie."

à ce qu'il fait habituellement, ce scénario conduit à une séparation entre le moment d'élaboration d'une technique et l'institutionnalisation et il pense que cela occasionnerait une certaine perte de temps :

> B : Mais bon ça fait perdre deux heures. Parce qu'après il faut quand même qu'ils aient l'étude de x^2 entre guillemets propre. Il faut la remettre en ordre après.

Au cours de l'entretien qui a lieu après le visionnement de la bande vidéo, Benjamin nous fait part d'un incident critique qui a eu lieu quelque temps après la séance filmée et pendant lequel il prend conscience que certains élèves n'ont pas saisi l'intérêt d'étudier les différents points dans l'ordre proposé sur la fiche :

> B : Bien que j'aie essayé de leur faire construire eux-mêmes le plan d'étude d'une fonction, quinze jours après quand je leur ai demandé : maintenant qu'est-ce qu'on fait ? On étudie la parité. Pourquoi ? Parce que c'est marqué sur la fiche méthode. Ça c'est décevant. Pour eux les cinq ou six minutes n'ont servi à rien. Soit il fallait pas les faire du tout, mais je ne pense pas, soit il fallait y passer plus de temps. [...] En tout cas il ne fallait surtout pas passer très vite comme je l'ai fait à la fin.

Ce constat le conforte donc dans l'idée qu'il est passé trop rapidement à l'explicitation du plan lors de la séance filmée et que la justification de l'ordre méritait qu'il s'y attarde. Il confirme alors la possibilité de fabriquer un scénario qui laisserait plus de responsabilité aux élèves. Néanmoins, en cette fin d'année de stage, il semble avoir encore des réticences à mettre en place une telle situation :

> B : Je ne sais pas si je me sentirais d'attaque pour les laisser partir comme je te disais. J'ai peur c'est que, pour eux, une fois que c'est écrit... On l'a fait une fois en module, donc on peut se permettre de le refaire plus tard. C'est une sorte de module brouillon et j'ai peur que pour eux ce ne soit pas clair.

Il est clair qu'en cette fin de stage, même s'il semble avoir perçu un certain intérêt à laisser plus de responsabilité aux élèves, Benjamin éprouve encore des appréhensions face à ce type de situation. Nous repérons deux raisons qui peuvent expliquer ce sentiment. La première concerne le fait que, dans ce type de situation, les élèves sont moins cadrés et l'enseignant maîtrise moins ce qui peut se passer. Rappelons que Benjamin avait déjà précisé qu'il n'aimait pas improviser lors des premiers entretiens de suivi, il ne semble donc pas encore prêt à "lâcher" sa classe en cette fin de stage. La seconde réside dans le fait que la mise en place de ce type de situation entraînerait un bouleversement du schéma didactique qu'il a mis en place dès le début d'année et qui lui a permis de faire tourner sa classe. Nous pouvons noter, dans la citation précédente, la difficulté qu'il a à envisager un autre schéma didactique qui consisterait à organiser un moment d'élaboration de techniques avant le moment d'institutionnalisation.

L'analyse de la séance filmée est également l'occasion de réfléchir sur la place à donner aux élèves à travers un deuxième axe, celui de la gestion des interventions.

I.3.2.3 - Un questionnement sur la gestion des interventions des élèves :

Comme nous l'avons vu précédemment, au cours des deux entretiens consacrés à l'analyse de cette séance, Benjamin évoque sa technique qui consiste à faire appel à la mémoire de sa classe. Même s'il semble alors percevoir un biais de cette technique lors de l'entretien qui suit immédiatement la séance, il semble qu'il considère cette technique efficace avec cette classe et le visionnement de la bande vidéo ne le conduit pas à se questionner davantage sur cette pratique. En revanche, après avoir regardé le film, Benjamin est sensibilisé par le fait que ses interventions sont parfois très directives et que cela peut être problématique, comme il le constate lors de son analyse de l'épisode pendant lequel est déterminé l'ensemble de définition de la fonction carré :

B : Là quand ils disent l'ensemble de définition c'est [0 ; +∞[, je dis non et je repose la question. Alors c'est peut-être dommage d'être trop directif. Non c'est pas ça, c'est autre chose. Cela les incite à dire n'importe quoi jusqu'à ce qu'ils donnent la bonne réponse. Mais d'un autre côté, si je leur dis : calculez $(-2)^2$, est-ce que vous pouvez le faire ? Et ben, là ça fait tilt tout de suite. Ça c'est des choses vraiment pas évidentes.

Benjamin a visiblement du mal à concevoir d'autres types d'intervention et il ne lui semble pas forcément naturel de demander à ses élèves d'approfondir leurs réponses ou de leur demander de les justifier, comme le montre la suite de l'entretien :

AL : Qu'est-ce que tu pourrais faire d'autre ?

B : ... Non je vois pas. C'est le genre de choses où la réponse est donnée dans la question. [...]

AL : Mais est-ce que tu ne peux pas avoir une autre technique ?

B : ... Leur demander de choisir un nombre au hasard et de l'élever au carré. Mais je suis sûr que les seize qui sont là vont choisir un nombre positif... Ou alors, ne pas dire tout de suite non et demander : pourquoi [0 ; +∞[? Demander la justification de ça. Et là normalement ils se rendent compte.

L'analyse de cette séance fait également naître des réflexions nouvelles notamment en ce qui concerne les difficultés rencontrées par les élèves lors de la mise en œuvre de l'algèbre comme outil de preuve et de leurs conséquences sur les choix didactiques. Nous présentons ci-dessous ce questionnement.

I.3.3 - Un questionnement relatif à la notion de contre-exemple :

Au cours de l'entretien qui a lieu juste après la séance, Benjamin revient sur le moment où un élève propose d'étudier la parité de la fonction carré en choisissant un exemple numérique. Il confirme alors qu'il ne s'attendait pas à cette difficulté, même s'il l'avait déjà rencontrée en début d'année ("J'ai été confronté à ce problème-là, au début de l'année, pour prouver une égalité par exemple : ils t'en prennent deux et ça y est. "). Il semble pourtant avoir fait un choix didactique destiné à anticiper ce problème. En effet, lors de la séance de modules précédente, Benjamin avait fait étudier à ses élèves la parité de la fonction $f : x \longmapsto 2x^2 + x$, extraite d'un exercice du manuel pour lequel les auteurs donnent des éléments de solution et proposent, en particulier, de calculer $f(1)$ et $f(-1)$ et de conclure que f n'est ni paire, ni impaire. Au cours de l'entretien, Benjamin se montre tout à fait critique relativement à ce choix :

B : Dans le bouquin, il y a un exercice qui est corrigé, c'est une fonction qui n'est ni paire ni impaire, cela doit être $2x^2$-x. Cet exercice est corrigé dans le livre et, pour prouver qu'elle n'est ni paire ni impaire, ils calculent f(-1). Et ça, pour eux [*les élèves*], c'est le piège parce qu'ils ne font pas la différence entre le contre-exemple et la généralisation. [...] Si on leur donne une valeur, il y en a qui vont l'utiliser pour montrer que c'est pair ou impair.

Pour étudier la parité de cette fonction, Benjamin choisit donc de faire calculer $f(-x)$ et d'amener les élèves à constater que l'expression obtenue n'est ni $f(x)$, ni $-f(x)$. Il soupçonne, alors, certains élèves d'avoir repris la méthode donnée par les auteurs du manuel :

B : Il y en a un qui me l'a dit, quand j'ai demandé : comment on a fait l'autre jour ? Il a répondu : on a calculé f(-1). C'est pas du tout ce qu'on a fait. C'est pas vrai, j'en ai même pas parlé du tout. Mais ils ont été regarder dans le bouquin et c'est plus facile de calculer f(-1) que f(-x) pour eux.

Mais, finalement, cette erreur ne l'a pas particulièrement dérangé ("Bon je ne m'y attendais pas plus que ça mais cela ne m'a pas tellement désarçonné. J'ai dit : non, tu ne peux pas généraliser avec un seul exemple, etc. "), même si, finalement, il ne sait pas vraiment comment la prendre en charge autrement :

B : Mais, ça, je trouve que c'est vraiment difficile à leur faire comprendre que traiter sur des exemples comme ça, ça ne généralise pas. Je ne vois vraiment pas comment on peut leur démonter ça. A moins de donner un contre-exemple, c'est vrai. Mais euh... Ça, c'est tout ce qui me pose vraiment problème.

Après le visionnement du film, Benjamin revient sur ce type de difficulté qu'il a encore rencontré dans la suite du travail sur les fonctions lors d'études de parité, mais aussi lors d'études de variations. Il reprend alors la technique qu'il a choisie lors de la séance pour prendre en charge la réponse de l'élève qui lui propose de calculer f(– 4) pour étudier la parité de la fonction carré et il ne semble plus forcément convaincu de la pertinence de son choix :

B : Ça c'est pas évident de leur faire comprendre que c'est pas bon. Là j'essaie de m'en sortir en disant : tu montres un truc sur –4, mais tu ne généralises pas. C'est quelque chose qu'ils n'ont pas, la généralisation.

Sa réflexion semble toutefois avoir évolué quant au type de contre-exemple que l'on peut proposer aux élèves pour mettre en évidence l'insuffisance de la justification à partir d'exemples :

B : Pour le "on calcule f(-4)", il y a peut-être un truc qui serait pas mal, cela serait de leur donner un contre-exemple. Si on montre quelque chose sur un seul exemple, cela ne marche pas toujours. Par exemple, si tu leur dis que 1^2 ça fait 1, donc on en déduit que pour tout x, x^2 égale x. Cela pourrait être pas mal pour leur montrer qu'il n'y a aucune généralisation avec ce qu'ils font.

Le fait d'envisager une telle prise en charge l'amène alors à s'interroger sur sa stratégie consistant à donner des exemples numériques, relevée à plusieurs reprises lors de l'étude de la vision des élèves et de leurs difficultés, et qu'il a mise en jeu au cours de cette séance pour réexpliquer aux élèves que $(-x)^2 = x^2$. Il prend alors conscience d'une certaine ambiguïté dans ses pratiques, qu'il exprime ainsi :

B : Et alors après je me contredis pas mal : quand je leur dis que pour se souvenir que x^2 égale $(-x)^2$, je leur dis de calculer $(-2)^2$. Je suis en train de prendre un exemple et de généraliser en quelque sorte. Et je leur redis en dessous : il ne faut surtout pas généraliser...

Cette réflexion se poursuit ensuite par l'analyse de la prise en charge du problème rencontré lors de l'étude des variations de la fonction carré, lorsque l'élève envoyé au tableau considère que les carrés de deux nombres a et b sont toujours rangés dans le même ordre que a et b[150] :

---

[150] Nous reprenons ci-dessous l'extrait de la retranscription de la séance qui correspond à ce moment :

L'élève écrit $a^2 \leq b^2$.
B : Donc on obtient a^2 inférieur ou égal à b^2...
[...]
B : D'accord. Alors, a et b on les a pris où ça ?

B : l'exemple pour les négatifs, quand on élève au carré. [...] En fait cela m'étonne qu'aucun élève ne m'ait fait la remarque. Je leur dis : ne prenez jamais un exemple pour montrer quelque chose. Et puis là c'est ce que je fais, même si moi je sais que c'est un contre-exemple. Moi je suis certain que sur les trente-trois il n'y en a pas un qui a compris la notion de contre-exemple. Et cela m'étonne qu'il y en ait pas un qui m'ait dit : vous prenez un exemple pour montrer quelque chose. Pour eux c'est sur le même plan. Et il y en a pas un qui fait la remarque. C'est dommage car cela pourrait être l'occasion de dire : non ça c'est un contre-exemple.

I.4 - Conclusion :

L'analyse de la préparation de Benjamin met en évidence des priorités que nous avons déjà repérées lors de l'étude de ses stratégies d'enseignement dans le chapitre 5. En effet, l'attention particulière qu'il porte aux élèves apparaît clairement à travers différents aspects : la volonté de faire participer sa classe à l'étude de la fonction carré, son souci d'aider les élèves à disposer de méthodes à travers la distribution d'une fiche relative au plan d'étude d'une fonction, une centration assez forte autour des difficultés susceptibles d'être rencontrées par les élèves et une vision claire des prises en charge envisageables.

Nous y retrouvons également une caractéristique que nous avons pointée à plusieurs reprises lors de l'analyse des pratiques de ce stagiaire : tout en laissant une place certaine aux élèves, la gestion prévue ne leur donne pas de grandes responsabilités mathématiques (Benjamin garde, en particulier, à sa charge l'élaboration du plan d'étude d'une fonction). Or, comme nous l'avons expliqué dans l'introduction de ce chapitre, l'analyse des profils de Benjamin, Marie, Julien et Claire nous a amenée à constater qu'ils rencontraient généralement des difficultés à donner une réelle responsabilité mathématique à leurs élèves. De ce fait, nous avons fait le choix, pour ce dispositif vidéo, d'essayer de rendre les professeurs stagiaires plus sensibles à cette dimension et de les aider à accroître localement, si besoin, cette responsabilité, sans perturber pour autant la logique de leur séance. C'est ce que nous avons fait lors de l'entretien de préparation avec Benjamin. L'étude du déroulement effectif de la séance fait apparaître une certaine sensibilité à la discussion que nous avons eue lors de cet entretien puisqu'il modifie son scénario initial pour organiser une phase d'élaboration collective du plan d'étude d'une fonction.

L'analyse du déroulement effectif de la séance met en évidence certains gestes de Benjamin adoptés en classe pour faire participer ses élèves, pour prendre en charge leurs difficultés, pour les amener à donner du sens à certaines notions. Ainsi l'étude d'interactions montre que sa gestion des interventions des élèves leur laisse une certaine place (il n'ignore pas notamment les réponses qui n'entrent pas dans son projet). Nous observons aussi que

---

E : Dans l'ensemble de définition.
B : L'ensemble de définition, c'est quoi ?
E : C'est $\mathbb{R}$.
B : C'est $\mathbb{R}$. Donc a et b sont deux nombres réels tout à fait quelconques. Par exemple on va prendre a=-4 et b=-2. On a bien $a \leq b$ parce $-4 \leq -2$. On élève au carré qu'est-ce qu'on obtient. $(-4)^2$ c'est combien ?
E : 16.
B : $(-2)^2$ c'est combien ?
E : 4.
B : Est-ce que $16 \leq 4$?
E : Non.
B : Pourtant c'est ce qu'on déduit de ce qui est écrit au-dessus.
[...]

Benjamin porte une attention particulière à amener les élèves à comprendre leurs erreurs et à leur laisser des responsabilités dans l'application de techniques.

L'analyse des pratiques de Benjamin dans cette séance fait également apparaître quelques points faibles concernant, en particulier, la place laissée aux élèves lors de l'élaboration ou l'explicitation de techniques. Un deuxième point faible est relatif au fait que, lorsqu'une tâche lui semble trop complexe, Benjamin a tendance à guider très étroitement les élèves ou à leur faciliter fortement la tâche.

Au cours des analyses relatives à cette séance menée par Benjamin, ce stagiaire s'est montré tout à fait sensible à ces problèmes didactiques. En particulier, ces analyses ont été l'occasion pour lui de s'interroger sur le scénario construit et de questionner certains de ses choix relatifs à la gestion de la classe. A travers ces considérations, nous avons pu repérer le début d'une réflexion sur les possibilités et l'intérêt de laisser plus de responsabilités mathématiques aux élèves.

Par ailleurs au cours de la séance, Benjamin a été confronté à une difficulté non prévue et rencontrée par certains élèves lors de l'étude de la parité de la fonction carré. Ces élèves proposaient d'étudier cette propriété en travaillant sur un exemple numérique. Sur le moment, cette procédure ne l'a pas particulièrement gêné mais, dans la suite du travail sur les fonctions, Benjamin a pris conscience de la résistance de cette difficulté. Au cours de l'analyse menée trois mois après cette séance, il a donc souhaité revenir sur les prises en charge envisageables. Le fait de se questionner sur ce point le conduira, en fait, à une réflexion beaucoup plus poussée sur l'introduction et l'apprentissage de la notion de contre-exemple en mathématiques et l'amènera à prendre du recul et à avoir un regard critique sur certaines de ses pratiques mises en place pour aider les élèves.

Etudions maintenant la séance filmée dans la classe de Claire.

II - Analyse de la seance filmee de Claire

Cette séance de module de une heure et demie se déroule le 20 mars 2000[151]. Le but de Claire est d'introduire le chapitre consacré à l'étude des généralités sur les fonctions.

Comme pour Benjamin, l'analyse que nous proposons va être menée en trois temps : dans une première partie, nous étudierons les potentialités de la situation construite par Claire[152]. Puis dans une deuxième, nous nous centrerons sur la séance elle-même. Enfin, nous consacrerons une troisième partie à l'analyse des deux entretiens qui ont eu lieu suite à cette séance[153].

[151] Dans le cadre des séances de module, les classes de seconde sont partagées en deux. Dans le cas de Claire, les deux séances consacrées à la situation que nous allons présenter, une par groupe, étaient consécutives. Nous avons donc pu filmer cette stagiaire avec les deux groupes. L'entretien à chaud, mené à la fin de la deuxième séance, portait donc sur les deux séances. Mais, trois mois plus tard, nous n'avons visionné avec Claire que le film relatif à la première. Et dans ce qui suit nous nous limiterons à l'analyse à l'analyse du travail avec le premier groupe.

[152] Le lecteur pourra se reporter en annexe 25 pour consulter la fiche de préparation de Claire et en annexe 26 pour l'entretien de préparation qui a eu lieu trois jours avant la séance.

[153] Cf. annexes 28 et 29.

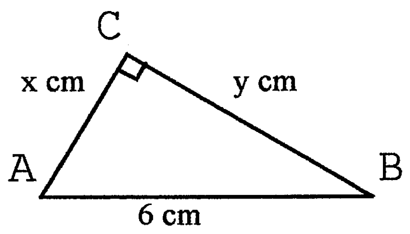
II.1 - Analyse a priori de la séance :

Avant de débuter cette analyse, nous présentons brièvement la situation et le contexte dans laquelle elle s'est déroulée.

Cette séance de module se situe donc au début du chapitre sur les fonctions que Claire a commencé, à la fin de l'heure de cours précédente, en donnant rapidement la définition d'une fonction :

> *<u>Définition :</u> Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles*
> *Lorsqu'à chaque nombre réel x de D on associe un unique nombre réel noté f(x)., on dit que l'on définit sur D une fonction f. On note : $x \longmapsto f(x)$.*
> *<u>Exemple :</u> la fonction définie sur IR par $h(x) = 2x - 1$ associe à chaque réel x le réel $2x - 1$.*

Pour introduire le reste du cours, Claire choisit alors une situation géométrique dans laquelle les élèves vont rencontrer un certain nombre de notions concernant les fonctions qui seront ensuite travaillées de façon plus détaillée. On y considère une famille de triangles rectangles dont l'hypoténuse [AB] est fixe et a pour longueur 6 centimètres :



On appelle glénatri tout triangle rectangle, comme celui dessiné ci-dessus, dont l'hypoténuse [AB] est fixe et a pour longueur 6 cm.

Le but visé est l'étude de la fonction f qui à x associe y et celle de la fonction g qui à x associe l'aire du triangle ABC (ensemble de définition, tableau de valeurs et représentation graphique, monotonie et tableau de variation, extremum et résolution d'équations du type : $f(x) = \lambda$).

L'analyse a priori de cette séance va être menée en deux temps. Une première partie sera consacrée à l'étude de ses potentialités mathématiques. Dans une deuxième, nous analyserons le scénario et le fonctionnement prévus par Claire.

II.1.1 - Les potentialités mathématiques de la situation :

A un premier niveau d'analyse, nous pouvons d'abord pointer que, si les buts de cette activité sont l'étude des variations de l'aire et la recherche de l'aire maximale, le choix de la variable x, la longueur d'un des côtés de l'angle droit, n'est pas pertinent. En effet, la symétrie géométrique de la situation étant détruite, la résolution du problème est inutilement complexifiée. Mais, rappelons que l'objectif de cette partie de notre recherche est d'analyser les choix des professeurs stagiaires lors de l'élaboration de stratégies d'enseignement, les priorités qu'ils se donnent, et d'étudier ensuite comment ces choix et priorités se traduisent dans les pratiques effectives en classe. Lors de l'entretien de préparation, nous avons donc choisi de ne pas bouleverser la logique de la préparation de Claire. L'analyse des potentialités mathématiques de la situation du glénatri va donc se faire ici en respectant le choix de Claire de prendre comme variable indépendante l'un des côtés de l'angle droit.

Pour cette étude des potentialités, nous nous appuierons, en partie, sur une analyse produite par un groupe de formateurs de l'IUFM de Créteil lors d'une journée de formation centrée sur l'observation et l'analyse des pratiques enseignantes, que nous avons co-animée avec M.Artigue et E.Roditi au mois de mars 2002. Au cours de cette formation, les participants ont, notamment, travaillé sur le film réalisé dans la classe de Claire. Ce travail a été organisé en trois temps. Dans un premier temps, nous leur avons présenté le thème de la séance (introduction de la notion de fonction) et le contexte géométrique qui allait servir de support à cette séance. Puis, nous les avons placés dans une position d'enseignant en leur demandant d'analyser, dans un travail de groupe, les potentialités du contexte par rapport au thème et de concevoir une séance d'une heure et demie sur la base de ce contexte. Dans un deuxième temps, après un bilan collectif, les participants ont été placés en position de formateurs et nous leur avons demandé d'analyser le projet effectif de Claire. Enfin, nous sommes passés, dans un troisième temps, au visionnement d'un montage de 45 minutes réalisé à partir de la vidéo. Cette phase a été suivie d'une discussion pendant laquelle les participants ont confronté le déroulement effectif de la séance à leurs anticipations et ont explicité comment ils mèneraient l'entretien avec le professeur stagiaire suite à une telle observation. Ce sont donc les résultats obtenus lors de la première phase de ce travail qui nous intéressent pour l'analyse des potentialités mathématiques de la situation du glénatri.

Au cours du travail de groupe, les formateurs ont produit quatre scénarios relativement proches qui faisaient tous apparaître une centration sur l'exploitation du contexte proposé pour problématiser la notion de dépendance fonctionnelle. Selon les formateurs en effet, dans cette situation, la fonctionnalité n'allait pas de soi et ne pouvait être considérée comme un phénomène transparent. Pourquoi à une valeur de x correspondrait nécessairement une seule valeur de y ? Dans le cadre géométrique, à une valeur de x comprise entre 0 et 6 cm correspondaient en fait deux glénatris isométriques donc conduisant à la même valeur de y. Les formateurs voyaient dans cette non-transparence une caractéristique positive de la situation, et avaient élaboré des scénarios qui permettaient de l'exploiter, en demandant par exemple à chaque élève de tracer un glénatri et de mesurer les côtés de l'angle droit, puis en reportant l'ensemble de ces données dans un tableau. Ces scénarios se caractérisaient également par la proposition d'utiliser collectivement l'outil informatique (logiciels de géométrie dynamique ou tableur) pour soutenir cette problématisation et les raisonnements qui allaient l'accompagner. A la fin de cette séance, la notion de dépendance fonctionnelle devait avoir pris corps et pouvoir être exprimée dans différents registres sémiotiques : la langue naturelle, le registre des tableaux de nombres, le registre des représentations graphiques, le registre des écritures algébriques. En ce qui concerne le registre graphique, les formateurs étaient aussi sensibles au problème posé par la jonction des points déterminés et anticipaient sa gestion en problématisant cette jonction.

L'analyse du scénario et du fonctionnement prévus nous montrera si Claire a été sensible ou non à ces problématisations de la notion de dépendance fonctionnelle et de la jonction de deux points appartenant à la courbe représentative d'une fonction.

Un deuxième niveau de cette analyse a priori est relatif aux potentialités offertes par les deux fonctions que Claire souhaite faire rencontrer à sa classe ($f : x \longmapsto \sqrt{36 - x^2}$ et

$g : x \longmapsto \frac{x\sqrt{36-x^2}}{2}$) pour l'étude des notions qu'elle souhaite introduire (ensemble de définition, représentation graphique, sens de variation, extremum et la résolution d'équations du type : $f(x) = \lambda$). L'étude de ces deux fonctions montre qu'il est difficile d'envisager une étude algébrique simple pour toutes ces notions. En effet, seule l'étude de l'ensemble de définition des deux fonctions paraît être réellement accessible aux élèves dans le registre algébrique : cette question nécessite l'étude du signe de l'expression $36 - x^2$ et les élèves de Claire ont à leur disposition des outils qui leur permettent cette étude[154]. Notons que, pour cette question, une résolution dans le cadre géométrique peut être aussi envisagée : elle met en jeu la propriété : "dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus long des trois côtés" ou la propriété : "dans un cercle, le diamètre est la corde la plus longue".

En ce qui concerne la notion de sens de variation, les deux fonctions f et g correspondent à deux situations différentes : f est croissante sur l'intervalle de définition et g est croissante, puis décroissante. La fonction g possède donc un maximum atteint en un point intérieur à l'intervalle de définition, que Claire compte faire déterminer aux élèves. Une étude algébrique des variations de la fonction f peut être envisageable pour un élève de seconde : en considérant deux nombres a et b de l'intervalle de définition, avec $a \leq b$, il est possible de comparer f(a) et f(b) en utilisant différents théorèmes de comparaison que les élèves de Claire ont déjà rencontrés dans l'année. Mais, l'enchaînement des raisonnements requis par une telle démarche est complexe pour des élèves de ce niveau et en fait une démarche peu appropriée à une première rencontre avec la notion de variation. C'est pourquoi elle nous semble a priori peu envisageable dans cette séance. L'étude des variations de la fonction g est, quant à elle, impossible à ce niveau d'enseignement. Par ailleurs, la preuve algébrique de l'existence d'un maximum pour la fonction g est possible mais difficile car elle conduit à faire l'étude du signe de l'expression $\frac{x\sqrt{36-x^2}}{2} - 9$, ce qui nécessite l'utilisation d'une expression conjuguée qui n'est pas plus au programme de seconde en vigueur en 1998/1999. Notons que l'utilisation d'une calculatrice symbolique faciliterait ici le calcul mais son pilotage n'aurait cependant rien d'évident pour des élèves ce niveau[155].

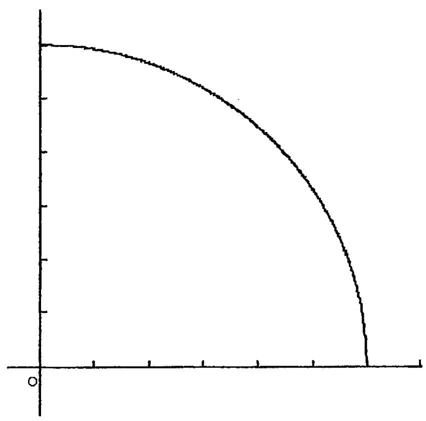
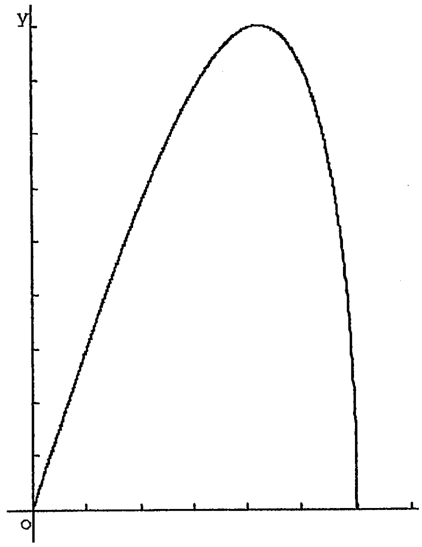
L'étude des variations de ces fonctions et la détermination du maximum de la fonction g sont en revanche envisageables en s'appuyant sur des raisonnements menés dans le cadre géométrique ou dans le registre graphique, en exploitant les courbes représentatives que nous présentons ci-après. Dans le cadre géométrique, une démonstration est en particulier accessible pour la détermination du maximum de g. Elle repose sur un changement de point de vue. En exprimant l'aire du glénatri comme demi-produit de l'hypoténuse du triangle par la hauteur correspondante, on montre facilement que l'aire est maximum lorsque la hauteur est maximum. Ceci se produit lorsque la hauteur est égale au rayon du cercle circonscrit au glénatri, c'est à dire lorsque le glénatri est un triangle rectangle isocèle. La valeur correspondante de x est $3\sqrt{2}$. En revanche, les raisonnement basés sur les représentations

---

154 Dans le deuxième chapitre consacré à l'algèbre, les élèves ont résolu des inéquations non élémentaires à l'aide de tableaux de signes et ont étudié le théorème relatif au rangement des carrés de deux nombres positifs.

155 En effet, une calculatrice comme la TI89 ne factorise pas l'expression concernée, mais si l'on multiplie par la quantité conjuguée, la calculatrice renvoie l'expression : $-(x^4-36x^2+324)/2(x\sqrt{36-x^2}+18)$. Puis elle factorise, ensuite, par la commande *Factor* $x^4 - 36x^2 + 324$ en $(x^2-18)^2$.

graphiques des courbes de f et g ne permettent que des conjectures et une estimation approchée de la valeur de x correspondant au maximum de g. Le maximum a en revanche une valeur entière : 9, plus facilement repérable, mais l'absence de symétrie de la courbe représentative de la fonction g ne favorise pas l'établissement d'un lien avec le glénatri isocèle.

	
Courbe représentative de f	Courbe représentative de g

A la lumière de cette étude des potentialités offertes par la situation choisie, nous proposons, dans la partie suivante, l'étude du scénario et du fonctionnement prévus par Claire.

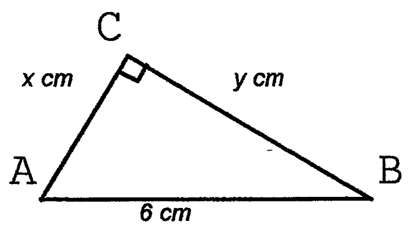
II.1.2 - Le scénario et le fonctionnement prévus :

Comme nous l'avons déjà précisé, Claire a pour objectif d'amener ses élèves à rencontrer, à travers une première activité préparatoire, différentes notions concernant les fonctions avant de les introduire dans le cours. Elle commence donc par consulter les manuels avec lesquels elle travaille. Mais, les activités qu'elle y trouve introduisent le plus souvent une seule notion et ne lui conviennent donc pas. Elle expose, ensuite, son projet à une autre stagiaire qui lui présente alors le texte d'une activité que sa conseillère pédagogique a proposée à une classe de seconde pour introduire le chapitre sur les fonctions.

Claire s'approprie ce texte, le modifie en supprimant certaines questions car elle le juge trop long pour une séance d'une heure et demie et prépare une fiche qu'elle prévoit de proposer aux élèves dès le début de la séance. Comme nous le lui avons demandé, Claire rédige également une fiche de préparation composée de deux parties : dans un premier temps, elle précise d'abord l'objectif général de cette activité, sa situation par rapport à la progression dans le chapitre sur les fonctions, l'organisation prévue et elle anticipe des difficultés liées à la nouveauté pour les élèves de la tâche mathématique : "représenter graphiquement une fonction". Dans une deuxième partie, elle repère les contenus et les objectifs pour chacune des questions qu'elle envisage de poser et elle anticipe les difficultés que les élèves pourraient rencontrer[156].

Claire prévoit alors une séance qui se compose de trois parties. Une première priorité pour Claire est d'amener ses élèves à s'approprier la situation géométrique en jeu. Pour ce faire, elle organise, dans une première partie, l'étude de deux questions géométriques qui vont conduire les élèves à établir deux résultats qui seront utilisés dans la suite :

Activité introduisant les fonctions



On appelle glénatri tout triangle rectangle, comme celui dessiné ci-dessus, dont l'hypoténuse [AB] est fixe et a pour longueur 6 cm.

I – Préliminaires :

1) Quelle est la figure géométrique où se trouve le sommet C de chaque glénatri ?

2) Déterminer la valeur de x correspondant à un glénatri isocèle. Quelles est alors l'aire d'un tel glénatri ? Faire une figure.

Le début risque de poser quelques difficultés aux élèves. En effet, l'étude de lieu géométrique, qui est mise en jeu dans la première question, n'est certainement pas un type de tâche routinier pour des élèves de seconde. Les connaissances géométriques nécessaires pour la résolution de la deuxième question (le théorème de Pythagore, la formule d'aire pour un triangle rectangle) sont, quant à elles, des connaissances plus familières à ce niveau, mais cette question met également en jeu des types de tâches algébriques comme la résolution d'une équation de la forme : $ax^2 = b$, un calcul avec des racines carrées, qui peuvent encore poser des problèmes à certains élèves.

Au cours de la préparation de sa séance, Claire s'est montrée particulièrement vigilante aux difficultés que ses élèves pourraient rencontrer lors du traitement de ces questions. Ceci apparaît clairement à travers l'analyse a priori qu'elle a rédigée lors de sa préparation. Relativement à cette première partie, Claire prévoit différents problèmes : l'oubli par les élèves de la propriété géométrique à mettre en jeu dans la première question, un essai de calcul non judicieux de l'aire du triangle en prenant AB comme base et, pour les élèves les plus faibles, des difficultés algébriques liées à la résolution de l'équation $2x^2 = 36$, à la simplification du nombre $\sqrt{18}$ sous la forme $3\sqrt{2}$ et à l'effectuation d'un calcul en présence de racines carrées.

En ce qui concerne la gestion de cette séance, Claire prévoit de laisser une place aux élèves en alternant des temps de recherche individuelle et la mise en commun des résultats. Elle compte, ainsi, laisser ses élèves chercher seuls la première question :

[156] Le lecteur pourra consulter en annexe 25 les documents produits par Claire pour l'élaboration de sa séance.

C : Là, au départ, c'est vraiment une recherche individuelle, sur la première question. En général, quand ils sont en module, je passe voir ce qu'ils font. Là, je pense que rapidement ils vont être bloqués.[...] Je pense qu'il va falloir donner une aide en essayant d'interroger les élèves, en essayant de voir comment ils voient la situation, comment on peut évoluer.

Cette citation montre bien la volonté de Claire de laisser des responsabilités à ses élèves, mais elle s'interroge sur les moyens qu'elle a pour prendre en charge les difficultés qu'ils vont sans doute rencontrer, selon elle, dans la résolution de cette première question :

C : C'est une question pour laquelle je ne sais pas comment les mettre sur la piste sans leur donner la réponse. C'est une question que je me pose. [...] Je pensais bien insister en reprenant les hypothèses, en fait. Que c'était bien un triangle rectangle. Et qu'en plus [AB] était fixe. Donc essayer d'insister sur ces deux points pour essayer de leur faire voir que le point C varie comme x et y.

Mais, elle ne semble pas persuadée que répertorier avec les élèves les hypothèses de la situation va suffire pour leur permettre de répondre à la question posée. En revanche, la prise en charge des difficultés qu'ils peuvent rencontrer dans la seconde question lui semble moins problématique. Elle prévoit alors de laisser encore les élèves travailler seuls et d'aider individuellement ceux qui produiraient des résultats erronés :

C : La deuxième question, je pense qu'il n'y a pas trop de problèmes. Des fois ce que je fais quand il y a une question qui passe bien, je ne la corrige même pas quand c'est quelque chose qu'on a déjà vu plusieurs fois. Bon si je vois qu'il y a des erreurs : soit il y a deux élèves qui ont fait l'erreur dans la salle donc je passe sur leur cahier pour corriger. S'il y a vraiment beaucoup d'erreurs, je fais une correction au tableau.

Suite à ce travail préliminaire, Claire prévoit une deuxième partie dans laquelle elle organise, pour ses élèves, une première rencontre avec une fonction non affine ($f : x \longmapsto \sqrt{36-x^2}$) et avec des types de tâches nouveaux (modélisation d'une situation géométrique à l'aide d'une fonction, détermination d'un ensemble de définition, calcul d'images, tracé de la courbe représentative d'une fonction, détermination d'un tableau de variations...) dont l'étude sera reprise dans la suite du chapitre :

<u>II – Une première fonction de x :</u>

1) Calculer y en fonction de x.

Donner l'ensemble I des valeurs que peut prendre le réel x.

Donner la fonction qui exprime comment y varie en fonction de x.

2) Compléter le tableau ci-dessous en donnant l'arrondi au dixième près;

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
f(x)													

3) Sur une feuille de papier millimétré, placer un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) avec 1 cm pour unité. Construire les points de la courbe représentative C_f de f obtenus avec le tableau précédent.

Tracer la courbe C_f représentative de f.

Dresser le tableau de variation de f.

Au cours du traitement de cette partie, les élèves risquent d'être confrontés à différentes difficultés, en particulier :

- celles liées au changement de statut de la lettre entre le préliminaire, où elle a le statut d'inconnue, et la question II.1 dans laquelle elle prend le statut de variable,
- celles liées à la manipulation d'écritures algébriques pour obtenir l'expression de y en fonction de x à partir de l'égalité $x^2 + y^2 = 36$ ou lors de la substitution numérique pour remplir le tableau de valeurs,
- celles liées à la résolution de l'inéquation du second degré $36 - x^2 \geq 0$, si les élèves déterminent algébriquement l'ensemble de définition,
- celles liées à l'emploi de théorèmes géométriques adéquats pour déterminer les valeurs que peut prendre le réel x, s'ils choisissent de répondre à cette question dans le cadre géométrique,
- celles liées à l'utilisation de l'écriture fonctionnelle à la fin de la question II.1,
- celles liées au tracé de la courbe représentative de la fonction et, en particulier, à la jonction entre deux points successifs déterminés.

L'analyse de la fiche de préparation de Claire montre, encore une fois, une réelle réflexion sur les difficultés que ses élèves peuvent rencontrer lors de la détermination de l'ensemble de définition de la fonction, en particulier si les élèves traitent la question dans le cadre algébrique, ce qui lui semble la démarche la plus probable. Elle estime, ainsi, qu'ils risquent d'abord de rencontrer des problèmes pour déterminer les conditions que doit vérifier le réel x, puis qu'ils vont avoir du mal avec la résolution de l'inéquation $36 - x^2 \geq 0$, qui met en œuvre des résultats étudiés pendant l'année mais qu'ils ont sans doute oubliés, comme elle nous l'explique lors de l'entretien :

> C : On peut regarder soit géométriquement, soit regarder en fait que y égale $\sqrt{36-x^2}$. [...] Je pense que eux vont partir algébriquement, mais ils vont avoir des difficultés à résoudre, parce que cela fait appel à plusieurs notions qu'on a vues depuis le début de l'année. Le fait que les carrés soit rangés dans le même ordre quand c'est un nombre positif... A mon avis ça va poser problème. [...] Ils pourraient faire une factorisation et faire le tableau de signes. [...] En fait, le tableau de signes c'était vraiment au début de l'année. Bon, on l'a revu une fois au mois de janvier, mais je pense que c'est encore plus loin.

Claire est donc tout à fait consciente que l'étude algébrique de l'ensemble de définition de la fonction f peut être particulièrement ardue pour certains élèves[157]. La démarche géométrique lui semble plus simple et elle prévoit d'aider les élèves en difficulté avec l'algèbre en les guidant vers cette démarche :

> C : S'ils le voyaient géométriquement, je pense que c'est beaucoup plus facile. Donc je pense que s'ils ont des difficultés là, je vais d'abord les inciter à regarder géométriquement pour trouver déjà le résultat

Toutefois, pour cette question qui lui semble difficile, Claire exprime, de nouveau, la volonté de laisser d'abord la classe chercher et de n'apporter de l'aide qu'en cas de besoin :

---

[157] Même si elle ne l'exprime pas dans ces termes mais dans des termes d'ancienneté et d'oubli possible, il y a également ici en jeu un changement de statut des connaissances mathématiques concernées qui, selon la catégorisation introduite par A. Robert, doivent passer du statut de connaissances « techniques » et « mobilisables » qu'elles ont eu pendant la phase de leur enseignement officiel au statut de connaissances « disponibles ».

C : Au début, je vais les laisser faire eux-mêmes pour voir comment ils se débrouillent. En fait, là le but c'est en même temps faire une activité où il y a des phases de recherche. Les laisser un peu libres, voir comment ils se débrouillent sur ce genre d'activité.

Les autres questions de cette partie lui semblent visiblement moins problématiques : elle considère que la détermination de l'expression de y en fonction de x n'est qu'un "petit calcul algébrique" et elle ne pressent pas de difficultés particulières lors du changement de statut de la lettre et de l'écriture de l'expression de la fonction f puisque, lors de l'entretien, elle nous explique :

AL : Là quand tu dis "donner la fonction qui exprime comment y varie en fonction de x", c'est pour leur faire écrire f ?

C : Voilà c'est ça, c'est juste pour leur faire reprendre la notation qu'on aura vue samedi.

La notion de variable, la notation fonctionnelle, la notion de dépendance fonctionnelle sont, en fait, complètement naturalisées chez Claire et, contrairement aux experts que nous avons rencontrés lors de la formation de formateurs de l'IUFM de Créteil, elle ne ressent donc pas la nécessité de problématiser la notion de dépendance fonctionnelle. De même, elle n'a pas encore les connaissances qui lui permettraient d'anticiper les procédures erronées que les élèves pourraient mettre en œuvre pour joindre deux points de la représentation graphique et ce malgré une réelle réflexion sur les difficultés qu'ils peuvent rencontrer avec ce type de tâches et sur les aides à prévoir, dont elle nous fait part lors de l'entretien :

AL : Tu n'auras pas du tout parlé de la courbe représentative ?

C : Voilà. Là je leur donne le nom mais on va expliquer oralement vraiment à quoi cela correspond. [...] Donc là c'est pareil il va falloir que je les guide pour qu'ils comprennent que le premier point ce sera 0 son abscisse et son ordonnée ce sera la valeur qu'on aura trouvée ici. Et après les laisser terminer. [...] Moi, a priori, je pensais que cela n'allait pas leur poser trop de problèmes, que c'était assez intuitif chez eux. x, f(x)... Comme ils ont déjà vu un peu les fonctions affines en troisième, bon x ce sera l'abscisse, l'ordonnée ce sera y. Même s'ils n'arrivent pas à formaliser par écrit, dire qu'un point appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées c'est x et f(x). Mais je pense qu'ils arriveront à placer les points sur la courbe et à tracer la courbe.

La dernière partie de l'activité est consacrée à l'étude des propriétés d'une autre fonction plus complexe modélisant l'aire du triangle ABC ($g : x \longmapsto \dfrac{x\sqrt{36-x^2}}{2}$). Le but de Claire dans cette partie est de faire découvrir deux nouveaux types de tâches concernant les fonctions : la détermination d'un maximum et la résolution d'équations de la forme $g(x) = \lambda$.

III – Aire du glénatri : soit z cm² l'aire d'un glénatri.
1) Calculer z en fonction de x. Donner la fonction g qui exprime comment z varie en fonction de x.
Voici la courbe représentative de C_g de la fonction g (voir feuille jointe)[158]
2) Quelle est l'aire maximale que peut avoir un glénatri et pour quelle valeur de x cette aire maximale est-elle atteinte ? Démontrer ce résultat géométriquement.
4) Dresser le tableau de variation de g.

[158] Pour gagner du temps, Claire a fait le choix de fournir à la classe une photocopie d'un tracé de la courbe représentative de la fonction g qu'elle a obtenue en utilisant un logiciel de géométrie.

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : g(x) = 7 et donner une valeur approchée de ces solutions.
Dessiner le plus soigneusement possible un glénatri d'aire 7 cm².

La résolution de certaines questions de cette partie met en jeu des articulations entre registres sémiotiques : l'articulation du registre du langage naturel et celui des représentations graphiques dans la question III.2, l'articulation du registre des écritures fonctionnelles et celui des représentations graphiques dans la question III.5. L'on peut donc supposer que les élèves de Claire pourraient rencontrer des difficultés dans l'interprétation et le traitement de ces questions. La lecture de la fiche de préparation de Claire montre qu'elle est tout à fait consciente de ce type de difficultés puisqu'elle y note que ses élèves risquent de rencontrer des difficultés lors de la traduction du fait que l'aire est maximale lorsque la courbe atteint son maximum et qu'ils peuvent avoir du mal à établir un lien entre l'écriture g(x) = 7 et la représentation graphique de la fonction g. Mais, elle ne semble pas avoir prévu de prise en charge particulière pour ce type de problèmes.

La fin de la question III.2 nécessite un changement de cadre et, comme nous l'avons expliqué plus haut, de point de vue qui peut lui aussi être problématique pour certains élèves et, de nouveau, Claire a tout fait conscience de la difficulté de cette question puisque, sur sa fiche de préparation, elle écrit :

> Cet exercice est compliqué car : c'est un exercice de recherche (aucune question intermédiaire), il faut réutiliser les résultats du I, puis exprimer l'aire du triangle d'une façon différente que précédemment.

La démonstration géométrique attendue sort du champ mathématique que Claire veut que ses élèves rencontrent dans cette activité, mais elle voit un intérêt particulier à leur faire déterminer la valeur exacte du maximum de l'aire : cela lui permet de montrer à sa classe que la lecture graphique ne permet d'obtenir que des valeurs approchées. Notons que nous retrouvons une caractéristique forte du profil de cette stagiaire : son attention particulière portée à la justification (cf. la partie III.5 du chapitre 6).

En conclusion, nous tenons à pointer le sérieux du travail de préparation de cette stagiaire, notamment en ce qui concerne la cohérence dans la construction de la séance. Ceci se repère, en particulier, à travers le choix de proposer un préliminaire qui conduit les élèves à établir deux résultats utilisés dans la suite. Le sérieux de la préparation apparaît aussi à travers la réflexion sur des points permettant un gain de temps lors du déroulement effectif : elle fournit, ainsi, le tableau de valeurs à remplir pour la fonction f et la courbe représentative de la fonction g.

L'étude menée ci-dessus nous amène également à repérer un véritable souci de laisser des responsabilités aux élèves, que nous avons déjà pointé dans le profil dressé dans le chapitre 6. Pour cette séance, ce souci se traduit par la prévision de moments de recherche. Par ailleurs, lorsqu'elle envisage plusieurs prises en charge pour certaines difficultés, elle exprime toujours la volonté de privilégier celles qui laissent le plus de responsabilités aux élèves.

Enfin, cette préparation met aussi en évidence une réflexion sérieuse sur les problèmes que les élèves peuvent rencontrer. Mais, l'étude de ses prévisions et de ses analyses montre bien qu'elle est restée centrée sur des difficultés de type algébrique qu'elle a déjà rencontrées et pour lesquelles elle s'est construit visiblement des moyens d'anticipation et des gestes de prise en charge. En revanche, il apparaît clairement dans cette préparation, pour soignée qu'elle soit, que Claire ne dispose pas de connaissances équivalentes pour anticiper des difficultés particulières liées au travail sur les fonctions (construction de la courbe représentative, notion de variable, dépendance fonctionnelle). Ceci se manifeste au niveau du scénario et contribue sans aucun doute au décalage important observé avec les différents scénarios élaborés par les formateurs, mais aussi au niveau des prévisions effectués relativement à la séance construite.

Venons-en maintenant à l'analyse du déroulement effectif de la séance.

II.2 - Analyse de la séance :

Comme pour Benjamin, nous donnerons dans une première partie les grandes lignes du déroulement de la séance sans entrer dans le détail des analyses.

II.2.1 - Le déroulement effectif :

Claire débute la séance en distribuant l'énoncé de l'activité, puis elle consacre quelques instants à la présentation du contexte. Elle demande alors à ses élèves d'étudier la première question, la recherche du lieu géométrique du point C, et propose directement une piste pour ceux qui auraient du mal à commencer : tracer un glénatri avec x égal à 2. Après environ trois minutes de recherche pendant lesquelles elle circule entre les rangs et s'adresse individuellement à des élèves, elle interroge sa classe sur les procédures utilisées et obtient différentes propositions, dont une qui entre dans son projet. Elle demande alors à l'élève qui l'a proposée de l'expliciter. Puis, elle laisse de nouveau du temps (trois minutes environ) pour que les autres terminent leur construction et répondent à la question posée dans l'activité. Elle sollicite alors des élèves pour qu'ils formulent cette réponse et termine l'étude de cette question en demandant à un élève d'exposer une technique de tracé d'un glénatri avec x égal à 2.

L'étude de la deuxième question[159] se fait suivant le même scénario : Claire laisse chercher les élèves et circule dans les rangs en prenant en charge individuellement certaines difficultés. Au bout de cinq minutes, après s'être rendue compte que des élèves avaient du mal à mettre cette situation géométrique en équation et que d'autres sont gênés par le changement de statut de la lettre x entre la première question, où elle a désigné le nombre 2, et la deuxième question, où elle devient une inconnue, Claire choisit d'interrompre la recherche pour faire un point collectif, en particulier sur les hypothèses à prendre en compte pour obtenir l'équation qui va permettre de répondre à la question posée. Puis, elle laisse de nouveau cinq minutes pour que tous les élèves trouvent la valeur de x cherchée et calculent l'aire du glénatri isocèle. Claire reprend alors la parole pour corriger cette question avec l'aide des élèves.

Les élèves cherchent alors le début de la question II.1[160] pendant environ cinq minutes au cours desquelles Claire précisera à toute la classe, en s'appuyant sur la proposition d'une élève, qu'il s'agit d'utiliser le théorème de Pythagore. Les élèves ne rencontrent donc pas de grosses difficultés pour obtenir l'égalité $y = \sqrt{36 - x^2}$, mais, en circulant dans les rangs, Claire

[159] Déterminer la valeur de x correspondant à un glénatri isocèle. Quelle est l'aire d'un tel glénatri ?

[160] Calculer y en fonction de x.

se rend compte que certains élèves simplifient abusivement l'expression $\sqrt{36-x^2}$ et obtiennent alors l'égalité y = 6 – x. Lors de la correction de cette question, elle fait donc le choix de prendre en charge cette erreur.

Pour la suite de la question II.1[161], Claire décide de conduire ses élèves vers l'élaboration d'une réponse collective. Contrairement à ce qu'elle avait prévu, les propositions de certains élèves conduisent à déterminer l'ensemble de définition en s'appuyant sur des arguments géométriques. Mais, après la rédaction de la réponse obtenue, Claire aborde la possibilité d'une autre démarche qui consiste à s'interroger sur les valeurs "interdites" pour l'expression $\sqrt{36-x^2}$ et elle guide les élèves vers un moyen d'obtenir ces valeurs. Par manque de temps, elle reporte cette étude algébrique à plus tard. L'expression de la fonction f est ensuite également obtenue de manière collective.

Les questions II.2 et II.3[162] sont résolues suivant le même schéma que celui choisi pour la première partie de l'activité : après un temps de recherche individuelle pendant lequel les seules difficultés rencontrées sont liées à la non prise en compte des priorités opératoires lors de l'utilisation des calculatrices[163], Claire organise une correction collective pour le tableau de valeurs et présente au rétroprojecteur une courbe qu'elle a construite avec un logiciel de géométrie. Claire modifie alors, quelque peu, le scénario prévu et prend quelques instants pour aborder la lecture graphique d'images de nombres par la fonction f. Puis, elle reprend le fil de l'activité et construit le tableau de variation de f en faisant participer sa classe.

Au bout d'une heure et dix minutes, la troisième partie est abordée de manière collective avec, après un court temps de recherche individuelle, l'élaboration du calcul de l'aire du triangle (désignée par la lettre z) en fonction de x et la détermination de l'expression de la fonction g qui exprime comment z varie en fonction de x. Claire distribue alors une photocopie de la courbe représentative de cette fonction, qu'elle a également construite à l'aide du logiciel, et, comme dans la deuxième partie, elle prend quelques instants pour amener ses élèves à lire graphiquement l'image de certains nombres. Après avoir laissé un court temps de recherche (une minute environ) pour la question III.2[164] qui n'a visiblement pas posé de difficulté particulière à la majorité des élèves, Claire conduit une mise au point collective. La séance se termine sur l'élaboration du tableau de variation de la fonction g.

Pour terminer, nous voulons pointer une impressionnante attention des élèves pendant toute l'heure et demie consacrée à l'étude de cette situation : dès qu'une phase de recherche est démarrée, tous se mettent aussitôt au travail et, lors des phases de mise en commun, beaucoup d'entre eux cherchent à intervenir.

Après cette rapide description de la séance, passons à l'analyse des épisodes qui nous semblent les plus intéressants, compte tenu de notre problématique.

---

[161] Donner l'ensemble I des valeurs que peut prendre le réel x. Donner la fonction qui exprime comment y varie en fonction de x.

[162] Il s'agit des questions relatives au remplissage du tableau de valeurs pour la fonction f et au tracé de sa courbe représentative.

[163] Aucun élève n'a rencontré de difficulté liée à la jonction de deux points de la courbe représentative de f.

[164] Il s'agit de la question relative à la détermination graphique de la fonction g.

II.2.2 - Analyse de la séance :

L'analyse du déroulement effectif de cette séance et de différentes interactions va nous amener à pointer des caractéristiques qui confirment ou qui complètent le profil déjà dressé de Claire.

L'étude du fonctionnement prévu par Claire a mis en évidence son souci de laisser une place aux élèves en organisant de véritables phases de recherche et en privilégiant des prises en charge de difficultés qui leur laissent le plus de responsabilité possible. Dans une première partie, nous analyserons diverses interactions afin de repérer des gestes adoptés par Claire pour mener à bien ce projet. En revanche, l'analyse de certains moments nous a amenée à pointer un décalage entre ce que Claire avait envisagé et la réalité de la classe ; nous verrons, dans une deuxième partie, que certaines pratiques tendent à simplifier la tâche des élèves.

Dans le paragraphe II.1, nous avons pu également noter le manque de connaissances de Claire relativement aux problèmes que les élèves pouvaient rencontrer lors du traitement de types de tâches spécifiques au travail sur les fonctions. Une troisième partie sera alors consacrée à l'étude de certains incidents qui ont vraisemblablement joué un rôle dans l'évolution de la vision de Claire relativement aux difficultés à utiliser les lettres, évolution que nous avons relevée lors de l'élaboration de son profil.

Enfin, nous terminerons notre analyse par la considération de certains épisodes de la séance qui nous semblent problématiques et sur lesquels nous aimerions connaître les analyses a posteriori de Claire.

Passons tout d'abord à l'étude des pratiques de Claire en classe qui contribuent à laisser une place à ses élèves.

II.2.2.1 - Le souci de laisser une place aux élèves :

Au cours de l'analyse du scénario et du fonctionnement prévus par Claire, nous avons pu pointer son souci de laisser une place au travail personnel des élèves en alternant des phases de recherche et des moments de mise en commun des résultats obtenus. L'analyse du déroulement effectif montre que les élèves ont, effectivement, disposé de temps de recherche assez importants au cours de cette séance, surtout lors de l'étude des deux premières parties. Dans la troisième partie, les temps de recherche sont plus courts, ceci s'expliquant sans doute par un manque de temps.

L'analyse des interactions met également en évidence une volonté de Claire de prendre en compte les élèves, de leur donner la parole lors des moments de mise en commun. Ainsi, au cours de ce module, elle semble particulièrement attentive à s'appuyer sur les propositions de ses élèves pour faire avancer la recherche. Lorsque des élèves font des propositions qui entrent dans son projet, elle s'en saisit mais elle semble particulièrement tenir à ce qu'ils exposent eux-mêmes ce qu'ils proposent. L'exemple suivant, où après avoir laissé du temps à la classe pour chercher un moyen afin de construire un glénatri avec x égal à 2, elle lance le débat pour obtenir les procédures des élèves l'illustre bien :

> C : Bon alors, on va essayer de regarder ensemble comment on peut faire pour le tracer précisément. C'est vrai qu'il y en a qui l'ont tracé à peu près. Première chose : qu'est-ce que vous avez tracé en premier en général ?

Nous pouvons donc constater qu'à travers cette intervention, Claire essaie de bloquer les procédures par "tâtonnement" qui ne permettraient pas de répondre immédiatement à la question posée. Différents élèves demandent alors la parole, dont une fille qui propose d'utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur BC. Claire rejette également cette démarche en ajoutant une contrainte à la question (tracer sans calcul) et interroge une autre élève qui a trouvé la procédure qu'elle attend :

C : Alors au début on va le tracer sans calcul. J'ai oublié de le préciser, c'est sans calcul. Amélie ?

Amélie : On va faire un arc de cercle.

C : Un arc de cercle de quel centre ?

A : A.

P : Voilà, de centre A et de rayon ?

A : 2.

C : Voilà, 2 cm. Pour savoir où se trouve le point C. Comme on sait que la distance AC fait 6 cm, on sait que le point C se trouve sur cet arc de cercle-là. Quelle est l'hypothèse que l'on n'a pas encore utilisée ?

E : Il y a un angle droit.

C : Voilà, c'est que le triangle est rectangle. Donc il y a un angle droit, si tu préfères. Alors, il y en a certains, j'ai vu, qui ont essayé avec l'équerre, à peu près, pour essayer de trouver le point C.

Ce moment met en évidence une stratégie que Claire met en œuvre à chaque fois qu'elle demande à des élèves de décrire des procédures au cours de cette séance : elle commence par laisser s'exprimer l'élève, puis lui pose des questions qui le conduisent à préciser ses réponses. Cet extrait permet de pointer, également, un autre aspect des pratiques de Claire que l'on retrouve également à plusieurs moments : elle semble particulièrement vigilante à l'apport d'éléments technologiques pour justifier les réponses fournies et la formulation définitive de ces justifications reste en général à sa charge, même si, par moment, elle laisse une certaine responsabilité à ses élèves dans cette tâche, comme nous allons le voir dans l'extrait suivant. Enfin, dans l'exemple précédent, nous pouvons pointer la volonté d'associer les autres élèves à ces moments d'explicitation de procédure : en effet, en posant la question "Quelle est l'hypothèse que l'on n'a pas encore utilisée ?", elle cherche visiblement à conduire le reste de la classe à suivre le raisonnement d'Amélie.

Au moment où elle évoque les procédures par "tâtonnement" mises en œuvre par certains élèves, un garçon, Nasser, demande la parole pour exposer une autre stratégie qui visiblement semble correspondre aux contraintes imposées par Claire : elle permet d'obtenir de façon précise et sans calcul un glénatri avec x égal à 2[165]. Claire repousse momentanément cette réponse, mais propose de l'examiner après qu'Amélie aura fini d'exposer sa méthode (ce qu'elle fera effectivement). Il est vraisemblable que Claire a vu la construction de Nasser pendant que les élèves cherchaient et qu'elle circulait dans les rangs. Comme cette procédure

[165] Nasser a, en fait, commencé par tracer le segment [AC], puis une droite d perpendiculaire à (AC) passant par C. Il a ensuite construit le cercle de centre A et de rayon 6 cm, puis a placé le point B à l'une des intersections du cercle et de la droite d.

n'entre pas dans son projet, Claire préfère l'ignorer provisoirement. Elle demande alors à Amélie de poursuivre sa description :

A : J'ai utilisé la règle avec le cercle *inaudible*.

C : Alors explique un peu plus, voilà. Qu'est-ce que tu sais sur le cercle circonscrit ?

A : J'ai dit que [AB] est le diamètre. On divise par deux, on trouve le milieu. On trace le cercle qui passe par A et B. Et après on sait que tous les points... Que si [AB] est l'hypoténuse du triangle, ce triangle est rectangle en ce point...

C : Alors on va reprendre ce qu'a dit Amélie en essayant d'expliquer un peu plus aux autres. Les autres, est-ce que vous avez compris ce qu'Amélie a dit ?

Brouhaha.

C : Amélie a rappelé la règle : si dans un cercle de diamètre [AB]... Si on a un cercle de diamètre [AB], alors, si on prend un point du cercle, M par exemple, alors ce triangle-là sera rectangle en M. C'est ce qu'elle a dit. Donc elle dit : on prend le milieu de [AB], c'est ce qu'elle a dit, on divise par deux, on prend le milieu de [AB], on trace le cercle de ce centre-là, c'est-à-dire on trace le cercle de diamètre [AB]. Et je sais que partout... Si je prends un point M ici, ABM sera rectangle. Et, en plus, le point C appartient à quel cercle ?

E : A l'autre.

C : A l'autre le premier. Si on l'appelle C_1, ici on peut l'appeler C_2. Donc le point C doit appartenir à C_1 parce qu'on sait que la distance AC vaut 2 et à C_2 puisqu'on sait que le triangle il est rectangle. Donc le point C il se trouve ici. D'accord ? Vous allez essayer de le tracer... Bon une fois que vous avez tracé celui-ci, vous essayez de répondre par une phrase claire à la première question.

Cet extrait nous permet de pointer que Claire cherche effectivement à faire participer Amélie à la justification de la démarche qu'elle décrit ("Qu'est-ce que tu sais sur le cercle circonscrit ?")., mais elle garde sous sa responsabilité l'explicitation précise de la méthode et la formulation finale d'éléments justificatifs.

Enfin, cet extrait illustre une autre caractéristique des pratiques de Claire pendant l'étude de cette situation : elle cherche à ce que ses élèves soient réellement actifs. En effet, alors que la question du tracé du glénatri avec x égal à 2 est quasiment résolue et qu'il manque peu d'éléments pour répondre à la question I.1, Claire pourrait guider ses élèves pour terminer l'étude de cette question, mais elle fait le choix de relancer la recherche des élèves. Nous retrouvons cette caractéristique à deux autres reprises au cours de la séance. Ainsi, lors des temps de recherche qu'elle laisse aux élèves pour traiter les questions I.2 et II.1, elle interrompt le travail des élèves pour faire des mises au point collectives destinées à débloquer certains élèves et elle laisse ensuite, de nouveau, un moment pour que ces élèves mettent en jeu les indications fournies. Cette stratégie est un moyen pour aider les élèves en difficulté, tout en leur laissant des moments de travail effectif.

Enfin, sa volonté de donner la parole à ses élèves apparaît lorsqu'il s'agit de formuler la réponse à une question donnée. Cette caractéristique apparaît, par exemple, lorsque Claire sollicite sa classe pour obtenir la formulation de la réponse à la question concernant la figure où se situe le sommet C de chaque glénatri, après qu'une élève a fourni la réponse attendue :

C : Si je vous dessine à chaque fois un glénatri avec x égale 3, x égale 4, à chaque fois le point C il va être sur un endroit et cela va décrire une figure géométrique qu'on nous demande.

Brouhaha.

C : On lève le doigt pour répondre. Audrey ?

A : Sur le cercle de diamètre [AB].

C : Alors maintenant tu essaies de m'expliquer pourquoi c'est sur le cercle de diamètre [AB].

A: Parce que quand un triangle a sa base qui est le diamètre d'un cercle, il est rectangle.

C : Alors, qu'est-ce qu'on a nous en hypothèse ? On sait qu'il est rectangle. Ça, il faut l'utiliser. Qui essaie de me faire une phrase claire pour me dire que C va se trouver sur le cercle de diamètre [AB] ? Quelle propriété on utilise ? Fatima ?

F : Si un cercle a pour diamètre l'un des côtés du triangle, le triangle sera rectangle.

C : Est-ce que c'est dans ce sens-là qu'on l'utilise ?

E : C'est dans l'autre sens.

C : C'est dans l'autre sens. On sait qu'il est rectangle. Alors Amélie, tu essaies de nous formuler.

A : *Inaudible.*

C : Alors. tu sais plus comment formuler. Par hypothèse on a un triangle rectangle donc on va l'écrire : le cercle circonscrit, donc on rappelle déjà que le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse. Ça, c'est la règle que vous connaissez. Donc à chaque fois qu'on aura pris ce cercle de diamètre [AB], le point C appartiendra forcément à ce cercle. Donc c'est ce qu'on écrit : donc C appartient... Qui me termine la phrase ?

E : *Inaudible.*

C : Au cercle de diamètre [AB].

Dans cet extrait, nous relevons de nouveau l'attention de Claire à demander une justification à l'élève donnant la réponse attendue. La justification d'Audrey étant incorrecte, Claire sollicite le reste de la classe. Elle facilite la tâche en rappelant que le triangle est rectangle, puis interroge Fatima qui demande la parole. Devant sa réponse incorrecte, Claire guide les élèves en évoquant le "sens" d'utilisation du théorème évoqué par Fatima et Audrey. Elle obtient alors une réponse qui lui permet de poursuivre et c'est à ce moment qu'elle sollicite une autre élève pour qu'elle formule la réponse. Cette stratégie semble être habituelle pour Claire puisqu'elle l'évoquera à plusieurs reprises lors des trois entretiens de suivi : lorsqu'une question est collectivement résolue, elle demande en général à un élève de la classe d'expliciter une réponse qui sera notée par les autres élèves. Relativement à l'extrait ci-dessus, nous pouvons noter que devant les difficultés d'Amélie dans cette tâche, Claire choisit de prendre cette formulation sous sa responsabilité, en prenant soin toutefois de demander aux élèves de terminer afin de leur ménager une certaine place.

En conclusion, la volonté de faire participer les élèves, de leur laisser une certaine place à différents moments de la résolution d'un problème (phase de recherche individuelle, phase d'explicitation de démarches ou de formulation de réponse, phase de justification) apparaît clairement à travers les extraits précédents. Mais il s'avère que, dès que les élèves sollicités sont en difficulté, notamment pendant les moments de justification ou de formulation, Claire a tendance à reprendre rapidement la main et à prendre ces tâches sous sa responsabilité, tout en usant de stratégies qui permettent d'associer les élèves, au moins en surface. Certes, la contrainte du temps ne permet pas de relancer sans cesse le débat dans la classe et l'enseignant doit faire en sorte que son projet avance. Les stratégies mises en place par Claire contribuent à cette avancée. Mais, il semble qu'elles s'expliquent aussi par une tendance à simplifier la tâche des élèves, que nous avons pu relever à plusieurs reprises au cours de la séance, comme nous le présentons dans la partie suivante.

II.2.2.2 - Une tendance à simplifier la tâche des élèves :

L'analyse du scénario prévu par Claire a fait apparaître une volonté de laisser des responsabilités aux élèves en leur laissant, en particulier, un temps de recherche même lorsque les questions lui semblent plus difficiles. Ainsi, au cours de l'entretien préliminaire, Claire a exprimé le souci de d'abord laisser d'abord chercher les élèves et de n'apporter de l'aide qu'en cas de besoin, notamment lors du traitement de deux questions qui lui paraissent plus complexes : la recherche de la figure géométrique où se trouve le sommet C de chaque glénatri, la détermination de l'ensemble de définition de la fonction f: $x \longmapsto \sqrt{36-x^2}$. L'analyse du déroulement effectif de la séance montre que Claire n'a pas mis, en réalité, en place cette stratégie et qu'elle semble plutôt avoir cherché à faciliter la tâche de ses élèves. Cette caractéristique apparaît clairement lors du lancement de la première question consacrée à la détermination du lieu géométrique du point C, où, après avoir demandé à un élève de lire la question, elle reprend la parole pour guider les élèves avec l'aide qu'elle avait prévu de proposer en cas de difficulté :

> C : Bon je vous laisse faire, je vous laisse chercher. Et si vous avez du mal, vous pouvez en dessiner au moins un, un glénatri avec x égale 2.
>
> E : C'est quoi un glénatri ?
>
> C : Un glénatri, c'est le triangle, on vient de le dire. Un glénatri, c'est le triangle là. D'accord ? Donc à chaque fois qu'on parlera d'un glénatri, ça sera du triangle rectangle d'hypoténuse 6cm... Alors première chose vous allez dessiner un glénatri avec x égale 2.

Dans sa première intervention, Claire propose donc une aide avant que les élèves n'aient commencé à chercher la question et donc avant qu'ils n'aient rencontré de difficulté. Puis, cette proposition se transforme en tâche à traiter dans la deuxième intervention[166].

Cette transformation du scénario prévu apparaît également lors de l'étude de la question relative à la détermination de l'ensemble de définition de la fonction f. En effet, après qu'une élève a lu l'énoncé de la question, Claire expose la tâche à traiter :

> C : Alors, le réel x, a priori, il ne peut pas prendre toutes les valeurs, c'est ce qu'on nous dit. Jérémie je suis en train d'expliquer la question et on va la corriger, alors tu écoutes. Donner l'ensemble I des valeurs que peut prendre le réel x. Est-ce que le réel x, pour vous, peut prendre toutes les valeurs ?

---

[166] On notera que ce choix (fixer la valeur de x) conduit à faire intervenir le cercle de diamètre [AB] comme élément nécessaire à la construction exacte recherchée. Si l'on ne fixe pas la valeur de x, d'autres procédures de constructions exactes sont possibles comme celle consistant à tracer une demi-droite passant par A, puis la perpendiculaire à cette demi-droite passant par B. Dans ces conditions, le cercle apparaît plutôt comme engendré par les positions des différents points C obtenus à travers des tracés. Mais ceci suppose bien sûr que plusieurs tracés soient effectués. C'est cette stratégie et non celle de Claire qui avait été privilégiée par les formateurs.

E : Pas négatives.

C : Alors de quoi, pas négatives ? x ne peut pas prendre les valeurs négatives ? Alors pourquoi ?

E : C'est une longueur.

C : C'est une longueur, voilà. Première chose, c'est une longueur donc déjà x ne peut pas être négatif. [...][167]

Afin de faciliter le travail des élèves, Claire fait donc le choix d'expliciter cette tâche et de poser une question pour lancer la recherche des élèves. Une élève fournit alors immédiatement une réponse qui entre dans le projet de Claire et qui permet d'expliciter une des deux contraintes que doit vérifier la variable x. A ce moment, Claire peut laisser un temps de recherche aux élèves pour qu'ils puissent déterminer la deuxième contrainte, comme elle l'a prévu initialement. Mais, elle choisit ici de continuer l'échange précédent afin de conduire les élèves vers l'élaboration collective de la réponse. Visiblement, cette décision était prise dès sa première intervention puisqu'elle prévient Jérémie que cette question va être corrigée.

Dans les deux cas précédents, Claire fait donc le choix de modifier le scénario initial pour guider ses élèves dans la résolution de ces questions qui lui semblaient particulièrement complexes a priori. Mais, cette tendance à simplifier le travail des élèves apparaît aussi, de façon plus subtile, pour la question III.2 relative à la lecture graphique du maximum de la fonction représentant l'aire du glénatri en fonction de x. L'analyse du scénario prévu par Claire a montré qu'elle paraissait consciente que les articulations de registres nécessaires pour cette étude pouvaient engendrer des difficultés, mais elle n'a pas prévu de prise en charge particulière. L'étude de la séance met en évidence un changement de scénario. En effet, après avoir déterminé avec les élèves l'expression de la deuxième fonction et après avoir distribué la représentation graphique, Claire introduit une question, non prévue initialement, relative à la lecture graphique d'images : déterminer l'aire d'un glénatri de côté AC de longueur 2 cm. Ce type de tâches a déjà été rencontré dans la deuxième partie, où, après que les élèves ont tracé la représentation graphique de la fonction f, elle leur a demandé de déterminer la valeur de y lorsque x est égal à 1 :

C : Alors normalement une fois que vous avez tracé la courbe, vous devez arriver à cette courbe-là. Alors, on va réexpliquer et on va voir si on retrouve ce qu'on a vu sur le dessin, tout à l'heure. Alors quand x a une petite valeur, par exemple 0,5, y ça a une valeur comment ? La valeur de y ? Si je prends par exemple ici 1, elle est comment la valeur de y ? Quand x vaut 1, y vaut combien ?

E : 5,9.

C : Mais comment on le retrouve aussi sur le graphique ?

E : On monte jusqu'à...

C : Voilà. Donc je vais pouvoir faire, en fait, une droite et on va pouvoir relire la valeur qu'on avait trouvée. Voilà je trace ça. J'arrive à f(x) et f(x) ça vaut bien 5,9 si vous mesurez.

L'étude de cette tâche est donc l'occasion de décrire une technique qui permet de la traiter. Lors de l'étude de la question "déterminer l'aire d'un glénatri de côté AC de longueur 2 cm", Claire commence par reprendre cette technique avec les élèves :

[167] Nous reviendrons ultérieurement sur la suite de cet épisode.

C : Pour x égale 2, quelle est l'aire du glénatri ?

E : *Inaudible.*

C : Sans le calcul.

E : *Inaudible.*

C : Bon, alors on va voir ce que tu trouves.

E : 5,7.

C : 5,7 ? Tout le monde trouve ça ? Bon, Emilie, tu m'expliques comment tu fais.

e : Je mesure au niveau du 2.

C : Tu mesures quoi au niveau du 2 ? Lequel de 2, celui des abscisses ou celui des ordonnées ?

e : Abscisses.

C : A partir de celui des abscisses, je trace quoi ?

e : Une droite jusqu'à temps que ça croise la courbe.

C : Une droite verticale.

e : Et après on lit 5,7.

Lors de la reprise de cette technique, nous pouvons repérer la volonté de Claire d'amener Emilie à mettre en mots les gestes à accomplir. Suite à cette explicitation, Claire apporte quelques éléments technologiques qui justifient cette technique :

C : Voilà. Bon on va expliquer. Je connais... L'axe des abscisses représente le côté x, l'axe des ordonnées c'est quoi ?

E : L'aire.

C : L'axe des ordonnées, c'est l'aire puisque c'est g(x). En fait pour une valeur x donnée, je regarde la valeur de g(x). Hop... Et après je fais verticalement et après vous lisez 5,6 , 5,7. Finalement on se rend compte qu'avec la courbe c'est bien, ça va vite mais le problème c'est que c'est pas très, très précis.

Cette justification est vraisemblablement l'occasion pour Claire de préparer la question suivante relative à la détermination du maximum de la fonction g. En effet, en interprétant les axes du repère, elle semble préparer l'articulation entre le registre du langage naturel et celui des représentations graphiques qui va intervenir lors de la lecture graphique de ce maximum. Elle profite également de ce moment pour préparer les élèves à l'idée que la lecture d'un graphique ne fournit que des valeurs approchées, ce qui va être le moyen de motiver la détermination du maximum avec un raisonnement géométrique.

Analysons, dans la partie suivante, certains épisodes de la séance qui ont certainement contribué à faire évoluer la vision de Claire relativement aux difficultés des élèves dues aux changements de statut de la lettre en algèbre.

II.2.2.3 - Une première rencontre avec des difficultés liées à la lettre et à la notation fonctionnelle :

Comme nous l'avons noté lors de l'analyse de la fiche de préparation de Claire et de l'entretien préliminaire, Claire n'a jamais exprimé la possibilité que ses élèves rencontrent des problèmes liés aux changements de statut de la lettre qui vont se produire au cours de l'activité, ou avec la notation fonctionnelle. Elle ne semblait donc pas à ce moment sensible à ces types de difficultés. Pourtant, à deux reprises au cours de la séance, nous notons que Claire prend quelques précautions. Ainsi, lors du lancement de l'activité, nous constatons qu'elle prépare les élèves à la notion de variable en exposant la situation :

> C : Donc voilà. On a un triangle rectangle ABC, rectangle en ? Il est rectangle en quoi ?
>
> E : C.
>
> C : C. Et l'hypoténuse, elle vaut toujours la même distance 6 cm. On regarde : sur le dessin on voit bien que AC vaut x cm, on ne connaît pas a priori, et BC y cm. Ça, on peut le faire varier, on va voir après.

Puis, dans la deuxième partie de l'activité, nous pouvons noter que Claire semble prendre en charge a priori les problèmes que les élèves pourraient rencontrer avec la notation fonctionnelle et, plus précisément, la substitution numérique pour le remplissage du tableau de valeurs associé à la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{36 - x^2}$, cette prise en charge n'étant pas prévue initialement. En effet, pour le type de tâches : "remplir le tableau de valeurs d'une fonction", l'étude de la préparation de Claire n'a pas fait apparaître de questionnement particulier sur les difficultés que les élèves pouvaient rencontrer au cours du traitement de cette tâche et ne semble pas avoir prévu d'introduction particulière pour cette question. L'analyse du déroulement effectif montre qu'après avoir obtenu l'expression de la fonction f, elle choisit d'introduire une question supplémentaire pour préparer la question suivante :

> C : Voilà. f(x) égale $\sqrt{36 - x^2}$ définie sur [0 ; 6]. Voilà, on a une fonction : pour une valeur de x, on trouve la valeur de y. C'est ce qu'on appelle une fonction... Bon pour voir tout de suite si vous avez compris : si je vous dis x égale 3 cm, trouvez-moi la valeur de y.
>
> E : C'est pareil que remplir le tableau.
>
> C : Voilà, exactement, on va voir que c'est pareil que remplir le tableau. Comment je fais directement pour trouver la valeur de y si j'ai x égale 3 cm ? Si j'ai x égale 3 ?
>
> E : *Inaudible.*
>
> C : Comment on fait ? Non je ne vous demande pas le résultat, je vous demande comment on fait.
>
> E : On remplace x.
>
> P : Voilà, on remplace x par 3. Donc en fait, ça c'est ce qu'on nous demande à la question d'après : remplir le tableau.

Au cours de cette séance, Claire va être confrontée à des difficultés qui sont susceptibles de lui faire prendre conscience que ces précautions ne suffisent pas et que les changements de statut de la lettre et l'introduction de la notation fonctionnelle méritent une attention particulière. En effet, les élèves rencontrent des difficultés avec le changement de statut de la lettre entre la question I.1, dans laquelle la lettre x représente le nombre 2, et la question I.2, dans laquelle x devient une inconnue :

> C à un élève : Il faut que tu me donnes une valeur : x égale y ne suffit pas. Je te demande une valeur.
>
> E : x égale 2.
>
> C : Non. x était égal à 2, tout à l'heure. C'était un exemple. x, il varie.

C à la classe : Alors, on explique la question. Tout à l'heure on a pris un exemple pour x, on a choisi x égale 2 cm. Mais, en fait, x ça peut varier. On peut choisir 1 cm, 2 cm, 3 cm...

E : *Inaudible.*

C : Non. C'était au départ de l'exercice. Mais, là, on nous demande de trouver la valeur de x, donc c'est une valeur bien déterminée, pour que le glénatri soit isocèle. C'est à toi de déterminer la valeur de x, tu ne choisis pas. Tu dois prendre les hypothèses : il est isocèle et rectangle et, avec ça, tu dois trouver combien vaut x.

L'étude du déroulement effectif de la séance confirme que Claire considère comme naturelle la notation fonctionnelle, puisque après avoir obtenu l'expression de y en fonction de x, elle demande aux élèves de déterminer l'expression de la fonction f et elle semble alors considérer cette question comme une simple application de la définition donnée dans le cours précédent[168] :

C : Alors : donner la fonction f qui exprime comment y varie en fonction de x... On avait vu déjà, samedi, comment on notait une fonction. Alors, comment je vais la noter, la fonction ?

E : f(x).

La suite de cette interaction met en évidence que cette notation n'a en fait rien de naturel pour les élèves de Claire :

P : On l'appelle f(x) égale... Egale quoi ? (*Silence)* Comment y varie en fonction de x ? (*Silence)* Donc f(x), il est égal à quoi ?

E : y égale $\sqrt{36-x^2}$.

P : Voilà : $\sqrt{36-x^2}$. Et f(x) est définie sur quoi ? (*Silence)* On a dit que x était compris entre quoi et quoi ?

E : 0 et 6.

P : Voilà. f(x) égale $\sqrt{36-x^2}$ définie sur [0 ; 6]. Voilà, on a une fonction : pour une valeur de x, on trouve la valeur de y. C'est ce qu'on appelle une fonction.

Au cours du reste de la séance, lorsque Claire pose une question à la classe, des réponses fusent immédiatement et, à plusieurs reprises, elle est obligée de demander à ses élèves de lever le doigt pour qu'ils puissent s'entendre. Dans cette interaction, nous pouvons noter que lorsque Claire demande l'expression de la fonction, elle n'obtient pas de réponse et elle est obligée de poser plusieurs fois la question pour obtenir une réponse, qui n'est certainement pas celle attendue, mais dont elle va oublier la première partie : « y égale » pour faire avancer l'activité. Dans le cas présent, les élèves n'expriment pas directement de difficultés, mais leurs silences sont éloquents et mettent en évidence que la question posée n'a rien d'évident pour eux. Nous retrouvons exactement la même situation lors du travail sur la deuxième fonction :

168 Définition : Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles
Lorsqu'à chaque nombre réel x de D on associe un unique nombre réel noté f(x). On dit que l'on définit sur D une fonction f. On note : $x \longmapsto f(x)$.

C : Après qu'est-ce qu'on nous dit ? Donner la fonction g qui exprime comment z varie en fonction de x. Qu'est-ce que je vais écrire ? *(Silence)* Qu'est-ce que c'est la fonction g ? *(Silence)* La fonction qui exprime comment z varie en fonction de x... *(Silence)*

E : C'est la même chose.

C : Voilà alors tu me dis ce que j'écris.

E : *Inaudible.*

C : C'est f qu'on l'appelle ? On l'appelle comment ?

E : g(x).

C : Voilà, g(x) égale...

E : $\frac{x \times \sqrt{36 - x^2}}{2}$.

P : Définie sur, comme là on a le même problème, [0 ; 6]. Géométriquement c'est toujours la même chose. Le glénatri n'existe que si x appartient à [0 ; 6].

De nouveau, les élèves ne savent pas répondre à la question de Claire.

II.2.2.4 - Un épisode problématique :

Dans cette dernière partie, nous souhaitons analyser un épisode problématique de la séance : celui relatif à la détermination de l'ensemble de définition. Comme nous l'avons vu précédemment, Claire a modifié son scénario en guidant ses élèves vers une élaboration collective. Contrairement à ce qu'elle avait prévu, les réponses des élèves orientent la résolution vers le cadre géométrique. Comme nous l'avons déjà vu, une élève commence par rejeter les nombres réels négatifs en s'appuyant sur le fait que x désigne une longueur. Après la détermination de cette première contrainte pour x, Claire relance le débat pour obtenir la deuxième contrainte :

C : Après, est-ce que l'on peut prendre toutes les valeurs de x ? Est-ce que l'on peut prendre tous les positifs ?

E : Il faut pas que ça sorte du cercle.

C : Alors, si ça sort du cercle. On va redessiner un glénatri. Un triangle ABC et le cercle. Alors tu me dis que c'est quoi qui peut pas sortir du cercle ?

E : Ben le point C.

C : Voilà, le point C on a vu qu'il était tout le temps sur le cercle. Donc je peux le prendre là, on va marquer C_1, je peux le prendre là C_2, je peux le prendre là C_3, je peux le prendre là C_4. Donc à chaque fois on a une valeur de x différente. Ça c'est toutes les valeurs de x.

Claire se saisit donc de la réponse incomplète de l'élève pour apporter elle-même les éléments qui permettent de justifier que x est inférieur ou égal à 6 :

C : En fait au maximum le point C peut venir jusque-là donc là la distance x vaut combien ?

E : 6 cm.

C : 6. Et la plus petite qu'elle va pouvoir prendre ?

E : 0.

C : 0. Pourquoi ? Parce que ça commence au point A. Et on peut le continuer aussi de l'autre côté... On peut le prendre aussi... Et on trouve la même chose. On peut tomber seulement jusque là. Donc d'après la figure, qu'est-ce qu'on vient de voir ?... Que le nombre x appartient à quel intervalle ?

E : [0 ; 6].

C : [0 ; 6]. Et on va prendre l'intervalle fermé parce qu'on va considérer que si C est au point A ou au point B c'est un triangle plat. Donc on va l'écrire ça maintenant. D'accord ? Donc on va écrire : géométriquement... Donc ça c'est une première preuve géométrique. géométriquement, le point C appartient au cercle de diamètre [AB], donc la distance AC est comprise entre 0 cm et 6 cm. Donc x appartient à... Comment je le note ?

E : *Inaudible.*

C : Voilà, crochets fermés, l'intervalle [0 ; 6]...

Ce moment de l'épisode nous semble particulièrement problématique dans la mesure où la justification de Claire est imprécise : elle semble ici confondre les positions limites du point C et les valeurs extrêmes de x et elle ne fournit pas d'argument géométrique qui permette de conclure. La suite de l'épisode nous amène à nous questionner sur le ressenti de Claire à ce moment. En effet, après avoir fait noter la conclusion par les élèves, elle demande à une élève ce qu'elle pense du raisonnement qui vient d'être produit :

C : Est-ce que ça c'est une preuve ? Est-ce que ça c'est une démonstration, Karine ?

K : Non.

C : Non. Alors, en fait, on peut faire une vraie démonstration. Comment on pourrait faire une vraie démonstration ? On va pas la faire aujourd'hui mais on va regarder comment on pourrait faire. Est-ce qu'il y a quelqu'un qui a une idée de comment on pourrait faire la démonstration ?... Qu'est-ce qu'on fait quand on regarde cette expression-là ? Qu'est-ce qu'on sait sur une racine carrée ?

Plusieurs hypothèses nous semblent envisageables à ce niveau : il se peut que Claire se soit rendue compte qu'il manquait un argument dans son raisonnement géométrique et que, sur l'instant, ne trouvant plus cet argument, elle préfère revenir au cadre algébrique où elle se sent plus à l'aise. Il se peut également que Claire tienne absolument à introduire une technique algébrique de détermination de l'ensemble de définition d'une fonction qui lui semble plus générale et que les élèves devront utiliser ultérieurement, mais qu'elle ne sache pas comment introduire cette nouvelle méthode. En mettant en doute la véracité du raisonnement géométrique elle peut donc présenter une autre démarche comme plus rigoureuse.

Mais la construction de cette nouvelle démarche, qui parait plus naturelle à Claire, se montre particulièrement difficile dans la mesure où les élèves ne perçoivent pas à quelle condition la racine carrée est définie : ils confondent, en particulier, le fait qu'une racine carrée est toujours positive et le fait qu'elle n'est définie que pour les nombres positifs. Nous le voyons bien apparaître dans ce qui suit :

C : Qu'est-ce qu'on fait quand on regarde cette expression-là ? Qu'est-ce qu'on sait sur une racine carrée ?

E : C'est tout le temps positif.

C : C'est quoi qui doit être tout le temps positif ?

E : y.

E : La racine carrée.

E : L'inconnue.

C : C'est quoi l'inconnue ? x doit être toujours positif ?

E : Non le résultat.

C : Donc ça ? $\sqrt{36- x^2}$, ça doit toujours être positif. Forcément c'est une racine. Une racine, c'est toujours positif. Mais quelles vont être les valeurs interdites pour x ?

E : Eh ben euh

E : 6.

Devant ces difficultés, Claire fait le choix de présenter une écriture incorrecte pour faire réagir sa classe, mais la réaction n'est pas immédiate comme le montre l'extrait suivant :

C : Est-ce que j'ai le droit de marquer ça : $\sqrt{-2}$?

E : Ben non.

C : Ben non. Et pourquoi j'ai pas le droit de marquer ça ?

Brouhaha.

E : Il faut mettre $-\sqrt{2}$

C : Oui, mais cela ne me donne pas la même chose. Moi je veux... Pourquoi j'ai pas le droit de marquer ça ? Bien sûr, on a le droit d'écrire $-\sqrt{2}$, ça c'est vrai qu'on a le droit de le marquer... Qu'est-ce qu'on a appris sur les racines ?

E : Sous une racine, c'est jamais un nombre négatif.

P : Voilà, sous une racine, c'est jamais un nombre négatif. Donc, là, c'est quoi qui est sous la racine ?

E : $36-x^2$.

P : Voilà ce qu'il faudrait démontrer... On le démontrera un autre jour... Il faudrait chercher les valeurs pour que $36 - x^2$ soit ?

E : Positif.

P : Positif. d'accord ? Bon ça on y reviendra un autre jour. Pour l'instant on va en rester là.

Ici, Claire rencontre une difficulté à problématiser la question en jeu et le seul moyen qu'elle a de réfuter l'écriture qu'elle propose est le passage au registre légal et l'appel à la mémoire de la classe. Ce type de prise en charge a, en fait, déjà été mis en œuvre lors de la mise en commun relative à l'écriture de l'expression de y en fonction de x (question II.1). Nous reprenons cet épisode ci-dessous :

C : Tout le mode a pris le théorème de Pythagore. Vous avez tous trouvé : y égale racine carrée de AB^2, enfin AB, x, tout le monde a trouvé ça ? AB^2 moins 36. Vous avez tous trouvé ça au départ. Et après, ... Non, c'est pas AB^2 moins 36, c'est 36 moins AC^2. Et là on peut mettre directement x^2. Et après il y en a certains qui me font ça : y égale 6 moins x. Est-ce que j'ai le droit de faire ça ? Audrey, tu ne dis rien parce que toi je t'ai déjà expliqué!

E : Non.

C : Pourquoi non ?

E : Parce que dans Pythagore, on fait pas ça.

C : Pythagore on l'a appliqué, mais maintenant c'est un calcul. Karine ?

K : *Inaudible.*

C : Voilà, sous la racine on a une soustraction. Est-ce qu'il y a une formule de ce type qui existe :

$\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$?

E : *Inaudible.*

C : Il faut que l'on ait une multiplication ou ?

E : Une division.

C : Ou une division. Donc, là ce qu'on a fait, eh bien, on n'a pas le droit. Si ? Si tu crois que si, on va regarder un exemple. Vous prenez, par exemple, $\sqrt{6^2-3^2}$, vous calculez. Tu calcules de l'autre côté 6 moins 3. Et tu regardes si cela fait la même chose. Prends un exemple si tu n'est pas convaincu. On l'avait déjà fait ça au début de l'année. Donc ça on n'a pas le droit. Donc en fait on s'arrête à y égale $\sqrt{36-x^2}$. D'accord ? Et on va pas plus loin.

La prise en charge de la difficulté classique rencontrée ici par certains élèves se fait bien de nouveau en faisant appel, en particulier, au légal (ce type de pratique est, en fait, très fréquent chez les PLC2). Pourtant, nous avons pu noter que la sensibilité de Claire à la justification est une caractéristique forte de son profil. Nous aimerions savoir si Claire y sera sensible lors du visionnement du film.

La dernière partie de ce paragraphe consacré à l'analyse de cette séance est justement relative à l'analyse a posteriori de Claire, menée lors des deux entretiens qui ont suivi.

II.3 - L'analyse de Claire :

Au cours de l'analyse à chaud, Claire considère avoir passé trop de temps sur le préliminaire géométrique, ce qui ne lui a pas permis d'approfondir le travail sur les fonctions comme elle l'avait initialement prévu. Toutefois, elle semble relativement satisfaite du travail fourni par les élèves. Ce premier entretien est alors l'occasion pour Claire de s'interroger sur d'autres gestions possibles de l'activité pour avoir plus de temps à consacrer aux fonctions.

Elle revient également sur différents problèmes rencontrés par les élèves : elle exprime ainsi sa surprise face aux difficultés à manipuler les racines carrées et elle se questionne sur leur compréhension de la notion de variable et de la notation fonctionnelle.

Lors de l'entretien qui a lieu trois mois après la séance filmée, Claire a d'abord un regard réflexif sur son comportement en classe : elle trouve, par exemple, qu'elle parle trop vite ou qu'elle ne s'exprime pas de façon assez rigoureuse ("Déjà, quand je parle, je dis toujours "d'accord", je n'avais jamais remarqué. Bon je parle toujours vite. [...] Quand je dis une équation comme ça, c'est peut-être pas très rigoureux. J'aurais dû dire de la forme $x^2 = a$. Eux ils ont tendance à dire justement "comme ça" et là je rentre dans leur jeu en parlant un peu comme eux."). Après ces premiers constats, elle revient sur l'analyse de son scénario et du manque de temps pour mener à bien le travail sur les fonctions, ce qui la conduit à reprendre sa proposition de modification déjà évoquée lors de l'entretien à chaud. Puis, elle aborde de nouveau certains problèmes spécifiques au travail sur les fonctions et les difficultés à manipuler les racines carrées. Elle semble alors particulièrement démunie face à la résistance de ce type d'erreurs malgré un gros travail autour de la notion de racine carrée. La considération de ce type de problème va aussi la conduire à avoir un regard critique sur une de ses stratégies de prise en charge : le passage au registre du légal ("Et c'est pareil qu'on écrive pas $\sqrt{-2}$, je pense que j'aurais pas dû l'expliquer comme ça, j'aurais dû revenir sur le fait qu'écrire $\sqrt{-2}$, c'est chercher en fait $x^2=-2$. Donc c'est pour ça, comme un carré est toujours positif... Réexpliquer pourquoi en fait c'était incohérent d'écrire $\sqrt{-2}$.").

Enfin, comme Benjamin, le visionnement de la bande vidéo est l'occasion pour Claire de prendre un certain recul par rapport à certaines de ses pratiques de gestion d'interventions de ses élèves. Elle prend ainsi conscience qu'à certains moments elle a tendance à ne pas leur laisser assez de place à l'oral ("Quand il y a une élève qui commence à parler, peut-être que je ne la laisse pas assez continuer vers son idée. J'ai tendance à vouloir l'aider trop rapidement sur l'oral... Sur leur cahier, je pense que je leur laisse bien le temps de chercher. Mais je pense que, quand ils expliquent, je devrais leur laisser plus le temps d'expliquer. Parce que, des fois, ils commencent une phrase et je la termine à leur place. Je savais que j'avais tendance à le faire, parce que des fois pour aller plus vite on a envie de... Surtout que là on commence seulement à y entrer, on est à peine entré dans l'histoire de la fonction, j'avais envie d'avancer.").

Malgré ce regard critique sur certaines de ses pratiques, l'essentiel des analyses menées par Claire relativement à cette séance est centré autour de deux axes : une proposition de modification du scénario et une réflexion sur les difficultés des élèves face aux notions de variable et de notation fonctionnelle. Ce sont ces deux points que nous reprenons pour notre étude.

II.3.1 - Une proposition de modification du scénario :

Dès le début de l'analyse à chaud, Claire considère qu'elle a laissé trop de temps pour la recherche des deux questions posées dans le préliminaire, ce qui ne lui a pas permis d'atteindre tous les objectifs concernant les fonctions qu'elle s'était fixés :

> C : Mais j'aurais voulu faire un travail plus approfondi au niveau des fonctions. Le problème, c'est que j'ai voulu en même temps faire un exercice de recherche pour laisser vraiment chercher sur des choses qui étaient un peu inconnues et, en même temps, je voulais introduire des notions sur les fonctions que je n'ai pas pu approfondir.

Du fait, comme nous l'avons remarqué lors de l'analyse du déroulement effectif de la séance, elle note qu'elle a été obligée de supprimer l'étude algébrique de l'ensemble de définition de la fonction f et, sur ce point, elle précise :

> C : Bon j'ai enlevé la démonstration de l'ensemble de définition en fait. Je n'avais pas le temps. Mais je pense qu'ils ont bien compris que, là, on l'a vu géométriquement mais que cela se démontrait.

Ouvrons une parenthèse ici pour noter qu'à ce moment, Claire ne semble pas considérer que le raisonnement géométrique qu'elle a produit pour justifier que le réel x appartient à l'intervalle [0 ; 6] comme une réelle démonstration, puisqu'elle précise de nouveau que la démarche algébrique permettrait de montrer le résultat cherché. Après le visionnement du film, son avis change puisqu'elle explique :

> C : Il y a quelque chose qui me gêne dans ce que je dis : c'est quand même une démonstration qu'on a faite. En plus, je leur dis c'est une démonstration géométrique et, après, je leur dis que c'est pas une démonstration. C'est un peu gênant. C'est pas vrai ce que je leur dis. Je voulais leur dire qu'on pouvait faire une démonstration algébrique sans s'appuyer sur la figure.

Mais même en ayant revu cet épisode, Claire ne prend pas conscience qu'il manque un argument pour justifier rigoureusement que x appartient à l'intervalle [0 ; 6].

Lors de l'analyse à chaud, Claire s'interroge également sur des moyens qui lui permettraient de gagner du temps pour approfondir les points relatifs aux fonctions. Une première solution qu'elle envisage est de se montrer plus dirigiste au début de l'activité. Mais, cette stratégie ne lui convient pas forcément car elle ne correspond pas à sa vision de l'enseignement, comme elle nous le précise :

> C : Moi, j'aime bien qu'ils cherchent seuls et qu'on corrige. Parce qu'une fois qu'ils se sont trompés, peut-être qu'ils retiennent plus, je me dis. Alors que quand tu corriges au tableau : ben ouais, c'est ça... Mais on n'est pas sûr qu'ils ont compris.

De nouveau, Claire affirme donc ici sa volonté de laisser une place à ses élèves et précise les avantages qu'elle trouve à cette stratégie. Elle propose alors un autre scénario qui lui permettrait à la fois de gagner du temps, mais aussi de laisser du temps de recherche aux élèves :

> C : Donc faire le préliminaire en travail à la maison. Ils cherchent eux-mêmes et, même s'ils n'ont pas trouvé, cela permet après de faire juste une correction. Je pense que là en dix minutes, c'est fait. Ce qui peut permettre de faire un travail plus approfondi sur les notions et ce qui permet après d'aller jusqu'à la fin[169].

Après le visionnement du film, Claire confirme cette proposition. Notons, enfin, que, lors des deux entretiens, Claire n'a jamais remis en question la logique de la construction de cette séance et qu'elle n'a, en particulier, pas envisagé de modification du scénario qui permettrait une problématisation de la dépendance fonctionnelle, même si une réflexion sur la notion de variable et les difficultés des élèves face à la notation fonctionnelle semble être née suite à la séance filmée, comme nous le montrons dans la partie suivante.

II.3.2 - Un début de réflexion sur la notion de variable et la notation fonctionnelle :

Comme nous l'avons vu au cours de l'analyse de la séance, les élèves ont rencontré des difficultés avec les changements de statut de la lettre qui se sont produits au cours de l'étude de la situation du glénatri, avec la notion de dépendance fonctionnelle et la notation fonctionnelle. Même si Claire n'avait visiblement pas envisagé de telles difficultés lors de

---

[169] Nous ne savons cependant pas comment elle conçoit exactement ce travail à la maison. Sera-t-il basé sur les questions du préliminaire ? S'agira-t-il de construire un glénatri avec x=2, ou plusieurs glénatris ?

l'analyse a priori, nous avons pu relever à travers certaines de ses interventions des prises en charge de certains de ces problèmes.

L'analyse à chaud de cette séance montre que Claire s'est bien aperçue au cours de la séance que les élèves ont rencontré des difficultés lorsqu'elle leur a demandé, dans la question II.1, de donner la fonction qui exprime comment y varie en fonction de x :

> C : Je me suis demandé s'ils avaient bien compris la notion de fonction : f(x) égale $\sqrt{36 - x^2}$, qu'en fait cela exprimait y en fonction de x. Une fois qu'une courbe a été faite, je pense qu'ils l'avaient bien assimilé. Mais, en fait, au départ quand on a marqué f(x), c'était assez difficile à venir pour marquer que c'était $\sqrt{36 - x^2}$. Et là je me suis dit : est-ce qu'ils ont vraiment compris ce qu'était une fonction ?

De même, elle a repéré, en fait, assez vite que ses élèves avaient du mal à concevoir la lettre x comme une variable. Elle nous explique alors que ce constat l'a conduite a prendre des précautions qu'elle n'avait pas prévues a priori :

> C : Il m'a semblé qu'ils n'avaient pas compris que x variait, que tout bougeait. C'est pour cela que je leur ai dit plusieurs fois : x peut valoir 1, 2, 3...

La prise de conscience de cette difficulté non prévue l'a alors conduite à modifier quelque peu son scénario lors du travail sur la même activité dans le deuxième groupe :

> C : C'est pour cela que dans le deuxième groupe j'ai tout de suite dessiné le cercle avec plusieurs valeurs. Alors que dans le premier, je ne l'ai fait que plus tard. Et dans le deuxième groupe, j'ai dessiné pour plusieurs valeurs pour leur montrer qu'en fait x c'est un nombre qui peut varier.

Elle ne revient pas sur l'analyse de ces difficultés lors de l'entretien qui a lieu suite au visionnement du film. Mais elle commente les difficultés rencontrées par certains élèves face aux changements de statut de la lettre survenant lors de la question I.2, dans laquelle les élèves doivent déterminer la valeur de x correspondant à un glénatri isocèle :

> C : Déjà il y en avait qui n'avaient pas compris le but de la question, qu'il fallait déterminer x. Ils n'avaient pas compris que c'était un calcul qui était demandé, je pense. [...] C'est aussi une question du rapport à la lettre. Ils n'avaient pas compris que x était une valeur, que cela représentait un nombre, et comme on ne le connaissait pas, on l'a appelé x.

Comme nous l'avons déjà pointé dans son profil, Claire a donc bien intégré dans son système d'analyse des problèmes les changements de statut de la lettre qui interviennent lors du travail algébrique en général.

Après le visionnement du film, elle repère également qu'elle est passée vite sur un type de tâches spécifique au travail sur les fonctions : la lecture d'images à partir d'une courbe représentative. Elle exprime alors que certains points auraient mérité d'être problématisés et elle nous explique qu'elle a pris soin de le faire lors de l'étude d'une autre situation traitée ultérieurement avec sa classe :

> C : Sur l'interprétation graphique, je trouve que je n'ai pas assez insisté sur pourquoi c'était une valeur approchée. J'aurais dû exploiter leurs réponses pour bien leur prouver : vous avez vu que vous avez trouvé différentes valeurs, donc en fait on n'est pas sûr parce qu'en fonction de la construction de chaque courbe on n'arrive pas à une valeur... En fait je le dis, je ne leur fais pas trouver. J'aurais dû leur faire sentir que l'utilisation d'un graphique pour un calcul de valeurs est beaucoup plus approximative qu'un vrai calcul algébrique.[...] Et après, ça je l'ai refait plus tard mais là c'était l'activité donc... J'ai été trop vite sur cette partie. J'aurais dû leur montrer qu'ils n'étaient pas d'accord alors que par le calcul tout le monde était

d'accord. Et, de toute façon, 4,2 c'est pas une valeur exacte, c'est qu'une valeur approchée du calcul qui a été fait avant. C'est sûr que c'était la fin de l'heure, donc j'ai été vite mais c'était un peu rapide.[...] Je l'ai fait sur le travail avec la guitare[170]. En fait on leur faisait faire au départ beaucoup de travail graphique et après on leur faisait démontrer par le calcul. On leur montrait bien que c'était vraiment qu'une approximation.

La situation du glénatri a très visiblement conduit Claire à prendre conscience de difficultés que les élèves pouvaient rencontrer sur des types de tâches spécifiques au travail sur les fonctions. Mais, comme nous l'avons pointé dans la partie précédente, cela ne l'a pas amenée à concevoir un autre scénario qui conduirait à une problématisation des notions de variable et de dépendance fonctionnelle.

II.4 - Conclusion :

L'analyse de la préparation de Claire et du déroulement effectif de la séance a mis en évidence le souci de cette stagiaire de laisser une réelle place aux élèves en organisant de véritables phases de recherche et la volonté de leur donner des responsabilités mathématiques. Toutefois l'étude de certaines interactions a montré un décalage entre ces ambitions et la réalité. Claire adopte, en effet, certains gestes professionnels qui ont tendance à faciliter la tâche des élèves.

La préparation de la séance met aussi en évidence une réflexion sérieuse sur les problèmes que les élèves peuvent rencontrer. Mais l'étude de ses prévisions et de ses analyses montre que Claire est restée centrée sur des difficultés de type algébrique. Il apparaît qu'elle ne dispose pas encore de connaissance pour anticiper des difficultés particulières liées au travail sur les fonctions. Or, au cours de la séance, Claire a été confrontée à des difficultés rencontrées par les élèves lors de l'utilisation des lettres et lors de l'écriture des expressions algébriques des fonctions étudiées dans la situation construite par Claire.

Enfin, l'analyse du déroulement effectif de la séance a mis en évidence un épisode plus problématique consacré à la détermination de l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{36 - x^2}$ au cours duquel Claire produit une justification imprécise et incomplète et au cours duquel elle passe au registre légal pour prendre en charge des difficultés liées la manipulation de racines carrées.

L'étude des analyses de Claire relativement à cette séance filmée montre qu'elle a été sensibilisée par certains des problèmes didactiques synthétisés ci-dessus. En effet, il s'avère que la situation du glénatri a visiblement conduit Claire à prendre conscience de difficultés que les élèves peuvent rencontrer sur des types de tâches spécifiques au travail sur les fonctions. En revanche, au cours de ces analyses, Claire n'a pas remis en question la logique de la construction de la séance et elle n'a pas envisagé de modification du scénario qui permettrait une problématisation de la dépendance fonctionnelle.

Au cours de ces analyses, Claire a, par ailleurs, abordé rapidement deux des problèmes pointés ci-dessus (sa tendance à faciliter par moment la tâche des élèves et le passage au légal

[170] Dans le cadre de son mémoire professionnel consacré à l'utilisation de certaines notions mathématiques en musique, Claire a proposé à sa classe l'étude d'une situation mettant en jeu une fonction modélisant la fréquence du son d'une corde de guitare ($t \longmapsto 10\sqrt{t}$, où t représente la tension d'une corde).

pour prendre en charge certaines difficultés algébriques). Elle a alors posé un regard critique sur sa gestion de certaines interventions des élèves et de certaines difficultés.

Centrons nous dans le paragraphe suivant sur le dispositif complémentaire mis en place à la fin de la partie expérimentale de cette thèse.

III - LE DISPOSITIF COMPLEMENTAIRE :

Dans le but d'obtenir des informations sur les analyses d'une séance que des PLC2 étaient capables de mener entre pairs, nous avons donc fait le choix, déjà explicité, de mettre en place un dispositif complémentaire en regroupant les cinq stagiaires ayant participé au dispositif vidéo en 1999/2000 et en leur proposant d'analyser certains épisodes des cinq films tournés dans leurs classes. Précisons que ce travail est de type exploratoire. Il ne s'agissait pas pour nous d'obtenir des analyses poussées des séances visionnées, comme nous en avons obtenu lors des entretiens menés individuellement avec chacun des stagiaires. Notre objectif était d'étudier le type de questionnement susceptible d'émerger d'un tel travail collectif, de voir l'influence sur les questions posées et les discussions développées à leur sujet des positions des différents professeurs stagiaires (position d'observateur ou d'acteur par rapport à l'extrait considéré, même niveau d'enseignement ou niveau différent) et de leurs profils respectifs. La situation ainsi créée, tout en restant tout à fait exceptionnelle, nous semblait cependant se rapprocher par certaines de ses caractéristiques (travail en groupe impliquant des enseignants de différents niveaux, sur des extraits de vidéos sélectionnés permettant d'approcher les questions didactiques relatives à un thème mathématique donné sous différentes facettes) de dispositifs susceptibles d'être mis en place en formation dans le cadre de l'analyse de pratiques. Il nous semblait intéressant et utile de compléter par un dispositif de ce type, notre travail de thèse, directement issu, comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, de questions relatives à la formation.

Etant donné le peu de temps (trois heures) que nous pouvions consacrer à ce nouveau dispositif, il nous a fallu faire un choix draconien quant à la sélection des extraits qui allaient être visionnés. En nous appuyant sur le fait que la confrontation à des situations complexes, à des incidents critiques joue un rôle important dans les processus de construction des compétences professionnelles d'un enseignant (cf. chapitre 1), nous avons décidé de centrer cette étude sur des moments problématiques de chacune des séances.

Dans une première partie, nous ferons une brève description des extraits que nous avons sélectionnés dans les cinq films. Puis, dans une deuxième partie, nous analyserons les divers questionnements qui ont émergé des discussions des stagiaires.

III.1 - Une présentation des épisodes visionnés :

Nous débuterons ce paragraphe par une présentation des trois autres séances filmées (dans des classes de collège) et nous préciserons, pour chacune d'entre elles, les extraits analysés lors du dispositif complémentaire. Puis, nous reviendrons sur les séances de Benjamin et de Claire, analysées dans les paragraphes I et II, afin d'exposer les moments sélectionnés pour l'étude avec les autres stagiaires.

III.1.1 - Une présentation des trois autres séances filmées :

Comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, les trois autres stagiaires ayant participé au dispositif vidéo enseignaient au collège : Nicolas avait sous sa responsabilité une classe de sixième, Romain et Alice une classe de quatrième.

Afin de rendre intelligibles nos choix, nous décrirons brièvement ces trois séances, puis nous présenterons les extraits sélectionnés pour l'étude collective.

Etudions, dans un premier temps, la séance filmée dans la classe de Nicolas.

III.1.1.1 - La séance de Nicolas :

Nicolas effectue donc son stage en responsabilité en classe de sixième, mais aussi dans une classe de cinquième qu'il partage avec sa conseillère pédagogique. Le travail mené avec ses élèves de cinquième l'a conduit à constater que le travail avec des lettres en début d'année est particulièrement difficile pour certains. L'objectif de Nicolas est donc d'amener ses élèves de sixième à prendre contact, en fin d'année, avec des lettres[171]. Pour ce faire, il choisit une situation qui doit, selon lui, permettre de montrer l'utilité de la lettre. Nous la présentons ci-dessous :

Expressions littérales

Activité :

Programme de calcul

- Choisir un nombre décimal
- Calculer son double et son triple
- Ajouter ces deux nombres
- Diviser le résultat par cinq.

1 – Fais fonctionner le programme ci-dessus pour chacun des nombres suivants : 1,5 ; 7 ; 20. Essaie avec d'autres nombres. Que remarques-tu ?

2.a – Pour expliquer ce qui se passe quand on fait ce programme de calcul, désigne par n le nombre choisi puis :

- Ecris une formule (on dit aussi expression littérale) donnant le double de n.

- Ecris l'expression littérale du triple de n.

- Ecris l'expression littérale de la somme du double de n et du triple de n.

2.b – Si n est le nombre entré dans le programme, écris le plus simplement possible à l'aide de n, le résultat obtenu. Ce que l'on a remarqué au 1°) est-il vrai pour tous les nombres ?

3 – Parmi les égalités suivantes, quelles sont celles qui sont vraies pour tous les nombres n ?

$n + 2 = 2 \times n$ $\quad$ $n + n = 2 \times n$ $\quad$ $n + n + n = n + 3$

$(2 \times n) + (3 \times n) = (5 \times n)$ $\quad$ $3 \times n = n + n + n$ $\quad$ $(n \times 5) - 5 = n$ $\quad$ $(5 \times n) \div 5 = n$

$(n + n) + (n + n + n) = 5 \times n$.

La séance filmée se déroule le 5 juin 2000.

[171] Les seuls contacts des élèves avec les lettres avant cette séance se sont faits à travers la résolution d'exercices du type "Trouver le nombre x que l'on doit ajouter à 14 pour obtenir 27 ?" ou du type "Trouver un entier n strictement compris entre 10 et 13". Le travail sur les aires et les périmètres n'a pas encore été mené.

Nous n'entrerons pas ici dans une étude détaillée de cette séance et des trois entretiens menés à son sujet avec Nicolas. Toutefois, nous décrivons brièvement ici le déroulement effectif de la séance afin de pouvoir expliciter ensuite clairement notre sélection de certains moments du film proposés lors du travail collectif avec les cinq stagiaires.

Une brève description de la séance :

Dans cette séance, nous avons distingué cinq épisodes que nous présentons ci-après.

<u>Episode 1 :</u> *Le lancement de la séance.*

Nicolas lance la séance et demande à sa classe de traiter individuellement la première question. Il circule alors dans les rangs et prend en charge des erreurs de calcul. Au bout de quinze minutes, cette question est corrigée collectivement.

<u>Episode 2 :</u> *L'introduction de la lettre.*

Nicolas introduit ensuite la deuxième question et rencontre visiblement quelques difficultés avec des élèves gênés par l'introduction de la lettre, comme le montre l'extrait suivant :

> N : Bien donc à présent, on va essayer de... On a vu que cela marchait pour trois nombres, on va essayer de voir si cela marche pour tous les nombres.
>
> E : Non.
>
> N : Alors Sullivan pense que non. On va bien voir. Euh... En mathématiques, pour savoir si quelque chose marche pour tous les nombres, est-ce que vous savez ce qu'on fait ?
>
> E : Non.
>
> N : Non, vous ne savez pas.
>
> E : On essaie avec d'autres nombres.
>
> N : On en prend d'autres mais on ne pourra jamais les prendre tous, les nombres. Donc pour ne pas avoir à les prendre tous, ce qu'on fait c'est qu'on remplace le nombre par une lettre. Donc c'est ce qu'on va faire après. Donc deuxièmement, le nombre de départ, on va l'appeler n. n comme nombre. Et ensuite on va essayer de voir ce qui se passe quand on applique le programme de calcul à n. Donc vous allez commencer à chercher sur votre cahier. Oui, Thiphaine ?
>
> T : Le nombre n, comme chiffre dans la tête, on prend ce qu'on veut ?
>
> N : Non, vous l'appelez... Le nombre vous l'appelez n. Comme ça après... Bon on va voir ce qui se passe avec n et puis à la fin on pourra revenir ... Heu... On pourra changer n en n'importe quel nombre et on verra si... Si...
>
> E : Si quoi ?
>
> N : Donc au début, on prend n, au lieu de prendre un nombre. On applique tout le programme de calcul et on regarde comment a été transformé n à la fin. Donc vous regardez la question 2.a et vous faites tout ce qu'on vous demande en prenant n.
>
> E : En fait n on peut pas le multiplier par 2. C'est une lettre, c'est pas un nombre.
>
> N : Alors euh... Comment est-ce que, d'après, toi tu peux écrire n multiplié par 2 ?
>
> E : Et ben je marque n et je marque multiplié par 2.

N : Ouais. Alors tu voudrais le mettre en français, toi ? Tu voudrais marquer : multiplié par 2 ? C'est ça que tu veux faire ?

E : Non...*Inaudible.*

N : Ouais, ben c'est ce qu'on te demande là.

E : Oui, mais si c'est n, on peut pas avoir le résultat après.

N : Ah non, on n'aura pas le résultat. Mais on pourra essayer de voir ce qui se passe du moins. Ben... Essaye et tu vas voir ce qui se passe.

Il laisse ensuite ses élèves chercher et circule dans les rangs.

Episode 3 : *L'écriture du programme de calcul dans le registre des écritures algébriques.*

Ce troisième épisode est consacré à la correction collective de la question 2.a. Nicolas commence par demander aux élèves de proposer une formule donnant le double de n et obtient deux propositions notées au tableau : $2 \times n$ et $n + n$. Pour l'écriture du triple de n, les élèves donnent les réponses : $3 \times n$, $n \times 3$ et $n + n + n$. Enfin, pour l'expression littérale de la somme du double de n et du triple de n, une élève propose directement 5n. Nicolas reprend alors cette réponse en l'enrichissant pour expliquer au reste de la classe :

N : 5 fois n. Si on prend 2 n et qu'on ajoute 3n on peut dire que ça fait 5 fois n. Une autre façon de le comprendre c'est : on peut utiliser les additions comme on l'a fait ici.

Une élève : C'est trop long...

N : On pourrait dire que 2 fois n c'est n plus n. Trois fois n, c'est n plus n plus n. Et donc finalement... Euh oui vous pouvez l'écrire... Finalement c'est n plus n plus n plus n plus n, cinq fois, donc c'est cinq fois n.

Suite à cette explication, Nicolas propose aux élèves d'étudier la question 2.b qui est traitée de manière collective.

Episode 4 : *La justification du résultat conjecturé dans la première question.*

Au cours du traitement collectif de la question 2.b, Nicolas aborde donc la "simplification" de l'écriture $(5 \times n) \div 5$. Il est alors confronté à réponses erronées et la difficulté rencontrée par une élève à expliquer que cette expression est égale à n :

N : Donc une fois qu'on est arrivé à la somme du double et du triple, qu'on est arrivé à 5 fois n, qu'est-ce qui nous reste à faire ? Baptiste ?

B : Diviser par 5.

N : A diviser par 5. Donc finalement le résultat, comment est-ce qu'on peut le noter ? Donc Baptiste ?

B : 5 fois n divisé par 5.

N : 5 fois n divisé par 5.

E : Egale n.

e : Ça fait 0.

N : Tiphaine, tu dis ?

T : Egale n.

N : Alors, pourquoi est-ce que c'est égal à n ?

T : Parce que n, euh... n, normalement cela devrait être un nombre mais, comme il y en a de trop, on met une lettre, donc *inaudible*.

N : Euh... Oui... Mais pourquoi 5 fois n divisé par 5 ça va faire n à ce moment-là ?

T : Parce que n c'est *Inaudible*.

N : Ah oui. Tu veux dire, on peut pas arriver à un nombre comme résultat. Ça je suis d'accord. Mais pourquoi est-ce que 5 fois n divisé par 5 ça va faire n ? Et pas, par exemple, n plus 4 ou 2n ou quelque chose comme ça.

T : Non ça va faire 5 plus n, eh ben non.

N : Clémentine ?

C : Parce que multiplier par 5 fois c'est pareil après si on divise par 5.

N : Multiplier par 5 c'est pareil que si on divise par 5.

C :Si on multiplie d'abord par 5 et qu'après on divise par 5, ça fait la même chose.

Nicolas reprend pour toute la classe la réponse de Clémentine. Mais il est alors confronté à des élèves qui ne comprennent pas en quoi le résultat obtenu montre bien que la remarque obtenue dans la question 1 est vraie pour tous les nombres. Il propose alors l'explication suivante :

N : A chaque fois, le résultat sera égal au nombre de départ. Disons que là la lettre, ça remplace n'importe quel nombre, donc à la fin on peut le remplacer aussi par n'importe quel nombre. Si au lieu d'appeler mon nombre n, maintenant je l'appelle 13, et bien à la fin j'aurais 13. Si mon nombre c'est 15, à la fin j'aurais 15. Si mon nombre c'est 0,7 , à la fin j'aurais 0,7. Donc là ce qu'on a fait, ça nous dit que pour tous les nombres, quand on fera le programme de calcul, on arrivera au nombre de départ.

Suite à cette intervention, Nicolas demande aux élèves de chercher individuellement la troisième question.

Episode 5 : *L'étude des égalités de la question 3.*

Au cours de cette recherche, les élèves rencontrent des problèmes pour saisir ce qui leur est demandé. Nicolas demande alors à une élève qui a compris d'expliquer à ses camarades. Puis, il est confronté à des élèves qui ne voient comment justifier qu'une égalité est fausse ou vraie. Il leur fait alors la proposition suivante :

N : Bon alors, pour tout le monde, dans le troisièmement quand l'égalité elle est vraie vous pouvez juste marquer qu'elle est vraie, mais quand elle est fausse, je voudrais que vous me fassiez la même chose que ce qu'on a fait ici. C'est à dire si elle est fausse l'égalité, ça veut dire qu'il y a un nombre n pour lequel ça ne marche pas, au moins. Alors à chaque fois je veux que vous me donniez un exemple pour lequel ça marche pas. Comme ici, on est convaincu que n plus deux, c'est pas toujours pareil que 2 fois n puisque par exemple pour 10 ça marche pas.

Jusqu'à la fin de la séance, les élèves étudieront cette question.

Passons maintenant à la sélection des extraits que nous avons faits visionner aux autres stagiaires

Les extraits sélectionnés :

L'analyse de la situation choisie par Nicolas fait apparaître qu'en moins d'une heure, ses élèves sont confrontés à trois nouveaux types de tâches : "écrire une formule à partir d'un programme de calcul", "manipuler une expression algébrique" et "justifier un résultat en utilisant l'algèbre". Il est clair que chacune de ces tâches est problématique pour des élèves de sixième. Le fait de les introduire simultanément dans la même séance ne fait qu'accroître les difficultés qu'ils peuvent rencontrer.

L'étude des cinq épisodes que nous venons de décrire brièvement montre bien que les élèves ont effectivement rencontré des problèmes plus ou moins importants. En fait, trois difficultés fortes liées à l'utilisation de l'algèbre pour généraliser et prouver un résultat apparaissent : certains sont gênés par l'introduction de la lettre (cf. l'épisode 2), d'autres ne comprennent pas en quoi le résultat obtenu à la question 2 justifie la remarque faite à la fin de la première question (épisode 4), enfin le travail de la justification des égalités de la troisième question est fortement problématique (épisode 5).

Il s'avère que, lors de ces épisodes, Nicolas a découvert des difficultés qu'il n'avait pas prévues lors de sa préparation et qu'il a été gêné pour les prendre en charge. Conformément aux choix méthodologiques que nous avons explicités dans l'introduction de la partie III, nous avons donc sélectionné les épisodes 2 et 4 pour le visionnement avec les autres stagiaires.

Etudions maintenant la séance filmée dans la classe de Romain.

III.1.1.2 - La séance de Romain :

L'objectif de Romain pour cette séance, qui se déroule le 11 février 2000, est d'amener ses élèves à résoudre un problème à l'aide d'une équation. Il s'agit de la première rencontre avec ce type de tâches dans cette classe de quatrième. Le problème choisi par Romain pour introduire ce travail est le suivant :

> *Un groupe d'élèves va voir un concert. Dans la salle de spectacle, si on place 5 élèves par banc, il restera 12 places libres. Si on place 4 élèves par banc, 3 d'entre eux ne pourront pas s'asseoir. Combien y a-t-il de bancs ?*

Comme pour la séance filmée dans la classe de Nicolas, nous présentons d'abord brièvement le déroulement effectif, puis nous expliciterons nos choix quant aux moments sélectionnés pour le travail collectif.

Une brève description de la séance :

Notons que, lorsque Romain nous a présenté cette séance lors de l'entretien de préparation, il voulait commencer par présenter un plan de résolution d'un problème à l'aide d'une équation :

> ***Résoudre un problème avec les équations :***
>
> *Ce travail se fait toujours en 4 étapes :*
>
> *(1) Choix de l'inconnue*
>
> *(2) Mise en équation*
>
> *(3) Résolution de l'équation*
>
> *(4) Interprétation du résultat et vérification.*

Puis, il prévoyait de demander aux élèves d'appliquer cette technique sur le problème présenté ci-dessus.

Après une longue discussion autour de l'intérêt de problématiser ce travail introductif pour faire ressentir aux élèves les raisons d'être des nouvelles techniques de résolution introduites, Romain a envisagé un nouveau scénario dans lequel il commencerait par proposer la résolution du problème, l'institutionnalisation de la méthode devant être menée après une phase de recherche et la mise en commun de solutions proposées par les élèves. C'est effectivement ce scénario que Romain a finalement choisi.

La séance se déroule donc en trois épisodes que nous décrivons ci-dessous.

Episode 1 : *Une première phase de recherche*

Après avoir présenté l'énoncé du problème, Romain lance le travail des élèves de la manière suivante :

> R : Bon vous finissez de copier l'énoncé et vous cherchez au brouillon cet exercice. Vous essayez de le résoudre du mieux possible. De la façon que vous le voulez. Le plus intelligemment possible.

Certains élèves se lancent dans la recherche, visiblement sans problème. En revanche, un grand nombre d'entre eux ne voient pas alors comment résoudre ce problème et demandent même à Romain s'il n'a pas oublié de donner quelque chose ou s'il a posé la bonne question.

Au bout de six minutes, il s'adresse alors à la classe et propose une aide. Nous reprenons ci-dessous une interaction qui correspond à ce moment :

> R : Il y a des gens qui ont du mal à démarrer.
>
> E : On comprend rien, franchement.
>
> P : Sur l'énoncé ? Sur la question ?
>
> *Brouhaha.*
>
> R : Bon ceux qui sont sur la bonne voie, que j'ai vus, vous pouvez rester dessus, c'est très bien. Bon pour les autres. A votre avis par exemple, essayez de répondre à cette question : le nombre de bancs peut-il être égal à 6 ? Par exemple.[172]
>
> E : Comment on peut savoir ?
>
> e : C'est impossible.
>
> *Brouhaha*
>
> R : Comment on peut savoir ? Il y a des gens qui viennent de répondre non. Pourquoi ?
>
> *Brouhaha*
>
> R : C'est le pourquoi qui m'intéresse. Réfléchissez un peu là-dessus.

172 Au cours de l'entretien préliminaire, Romain s'est interrogé sur les aides à apporter aux élèves qui seraient bloqués dès le début. Après discussion, nous avons travaillé sur la possibilité de leur proposer un tel exemple numérique pour aider les élèves à s'approprier l'énoncé du problème.

Puis, Romain laisse de nouveau chercher les élèves. Mais la piste de recherche proposée n'inspire visiblement pas les élèves qui sont bloqués. Au bout d'une minute, un élève interpelle de nouveau son professeur :

E : Monsieur il faudrait savoir le nombre d'élèves.

P : Ah il faudrait savoir le nombre d'élèves...

E : C'est x.

Brouhaha

P : On peut prendre x...Il y a des gens... Il y a des gens, pas mal qui commencent à penser que l'on peut prendre x.

E : Oui on n'a pas le nombre d'élèves, comment voulez-vous qu'on calcule le nombre de bancs ?

R : Je peux retourner la question : on n'a pas le nombre de bancs. Comment veux-tu calculer le nombre d'élèves ?

E : Il faut prendre un lettre pour les bancs et une lettre pour les élèves.

e : x pour le banc, y pour l'élève.

P : Essayez comme ça. Le nombre d'élèves...

Brouhaha

R : Le nombre de bancs vous l'appelez x et le nombre d'élèves appelez-le y et essayez de faire quelque chose avec ça.[173]

Après encore trois minutes laissées aux élèves pour la résolution, Romain lance une correction collective.

<u>Episode 2 :</u> *L'élaboration collective d'une solution*

La prise en compte de diverses propositions conduit à l'écriture des deux équations à deux inconnues suivantes : $y = 5x - 12$ et $y = 4x + 3$, dans lesquelles x désigne le nombre de bancs et y le nombre d'élèves. Romain, confronté à une solution non envisagée, fait remarquer que les élèves ne savent pas résoudre de telles équations et propose le raisonnement suivant pour remédier à ce problème :

R : Et maintenant quelle va être mon équation ? Regardez là.

Il entoure 5x-12 et 4x+3.

R : Les deux choses qui sont entourées là : vous êtes tous d'accord qu'elles sont forcément égales. Ça c'est le nombre d'élèves, ça c'est le nombre d'élèves.

E : On met les élèves avec les élèves.

R : ça, ça va être pour résoudre. Avant je vais marquer mon équation : là je ne l'ai pas encore.

E : Déjà on prend le y.

[173] Précisons qu'à ce moment Romain suit les propositions de la classe, mais lors de l'entretien de préparation, il n'avait pas envisagé que des élèves puissent choisir deux inconnues.

R : Le y, on a dit qu'il me gênait. Moi je sais résoudre quand il y a du x. Mais quand il y a du x et du y, je ne sais pas.

E : Vous, vous savez.

P : Il m'en faudrait un peu plus pour ne pas savoir. Alors j'ai bien 5x-12=4x+3. Mon nombre d'élèves égale mon nombre d'élèves. 5x-12=4x+3. Et ça, je sais résoudre.

Il résout alors cette équation, puis reprend le raisonnement qui l'a conduit à l'égalité $5x - 12 = 4x + 3$.

P : Ici il y a une étape que certains ont sauté. Ici mon nombre d'élèves, je ne l'utilise pas. Je l'introduis et, en fait après, cela me gêne le y. On pouvait directement se dire : 5x-12, c'est mon nombre d'élèves. Il est égal à 4x+3. J'exprime de deux manières différente mon nombre d'élèves. Et ne pas introduire cette lettre là. D'accord ? Je l'introduis et après la première chose que je fais c'est essayer de m'en débarrasser. Donc ça je n'étais pas obligé de le faire, ça. ,Mon petit x, j'étais obligé de l'introduire pour pouvoir atterrir sur mon équation. Ça, ça s'appelle choisir une inconnue. Pour résoudre un problème il faut jamais passer directement ici : marquer l'équation. Si on marque du petit x, il faut déjà dire ce que représente le petit x. Le petit x ici représente le nombre de bancs.

Episode 3 : *L'explicitation du plan d'étude d'un tel problème.*

Comme nous le voyons à la fin de la citation précédente, Romain s'appuie ensuite sur la solution élaborée collectivement pour faire apparaître et expliciter les différentes étapes suivies : choix de l'inconnue, mise en équation, résolution de l'équation et conclusion.

Précisons ci-dessous les extraits que nous avons proposés aux autres stagiaires lors du dispositif complémentaire.

Les extraits sélectionnés :

Un premier moment nous semble intéressant à analyser : le premier épisode pendant lequel Romain propose aux élèves de répondre à la question "le nombre de bancs peut-il être égal à 6 ?". Il s'avère que cette aide n'a pas été exploitée par Romain et que l'on peut effectivement se questionner sur l'intérêt de la proposer.

Le deuxième point qui nous semble intéressant est relatif d'une part à l'introduction de deux inconnues par les élèves, procédure non prévue par Romain, et d'autre part à la gestion choisie par ce stagiaire pour passer d'un système de deux équations à deux inconnues à une équation à une inconnue.

Ce sont donc ces deux épisodes que nous avons choisis.

Etudions maintenant la séance filmée dans la classe d'Alice.

III.1.1.3 - La séance d'Alice :

La séance d'Alice, qui se déroule le 21 mars 2000, est également consacrée à l'introduction des équations comme outil de résolution de problèmes. Elle a alors choisi l'énoncé suivant :

Un célèbre groupe de rock donne un concert ce soir.
Audrey, Jérôme et leurs amis n'ont pas encore acheté leurs places.
Audrey et Jérôme sont chargés de le faire. Ils vont chacun dans une agence différente, avec la même somme d'argent.
Audrey : "J'ai pu acheter 6 places et il me reste 220 F".

Jérôme : "Moi, j'ai eu 3 places seulement et il me reste 385 F".
Leurs amis, pour les rembourser veulent savoir le prix d'une place.
1 – Est-il possible que le prix d'une place soit, par exemple, 30 F ? 100 F ?
2 – Résoudre le problème.

Comme Romain, pour l'entretien de préparation, Alice avait envisagé un scénario dans lequel elle pensait guider les élèves en posant les différentes questions suivantes :

On désigne par x le prix d'une place en francs.
a – Exprime en fonction de x la somme d'argent dont disposait Audrey.
b – Exprime en fonction de x la somme d'argent dont disposait Jérôme.
c – Traduis par une égalité le fait qu'Audrey et Jérôme avaient la même somme d'argent au départ.
d – Résous l'équation obtenue.
e – Fais une phrase pour indiquer le prix d'une place.

Comme avec Romain, nous avons abordé avec Alice l'intérêt de problématiser la mise en équation et de laisser un peu plus de responsabilité à sa classe pour l'élaboration d'une méthode. Cette discussion l'a alors conduite à modifier son scénario. Nous présentons brièvement ci-dessous le déroulement effectif de cette séance.

Une brève description de la séance :

Le scénario proposé par Alice est composé de quatre épisodes, que nous présentons ci-dessous.

Episode 1 : *La familiarisation avec le problème.*

Après avoir lu l'énoncé du problème avec les élèves, Alice propose de traiter la première question, qui ne pose visiblement pas de problème. Elle envoie alors une élève au tableau pour la correction. Puis Alice demande à la classe de résoudre le problème et laisse un temps pour la recherche individuelle.

Episode 2 : *La gestion d'une résolution arithmétique.*

Au cours de l'entretien de préparation, Alice nous avait expliqué qu'elle avait choisi un problème conduisant à une équation de type ax + b = cx + d pour bloquer les procédures arithmétiques que les élèves auraient pu être tentés de proposer. Pourtant au cours de la recherche individuelle, un élève résout le problème sans mettre en équation. Alice fait alors le choix de l'envoyer au tableau pour exposer sa solution :

A : Tu viens faire ton raisonnement au tableau. Tu te mets à droite. Tu écris des phrases pour expliquer ce que tu fais.

L'élève écrit : *6 places ⟶ 220 F*
3 places ⟶ 385 F
385 - 220 = 165
3 places = 165 F
165 : 3 = 55
Le prix d'une place est 55 F.

A : Attends, tu vas nous expliquer là ? Allez tout le monde écoute la méthode de Bastien, s'il vous plaît. Silence.

B : On sait que quand on achète 6 places, il reste 220 francs.

A : Ouais.

B : Quand on en achète 3, il nous reste 385.

A : Donc ces flèches veulent dire : il nous reste ?

B : Ouais. Donc après on soustrais : 385-220, ça fait 165.

A : Ouais pourquoi tu soustrais ?

B : Parce que...

A : Pourquoi tu ferais pas par exemple 220-385 ?

B : Parce que 385 c'est plus grand.

A : Ah et ça marche. Pourquoi tu soustrais, réfléchis.

B : Pour avoir le prix de trois places.

A : Pour avoir le prix de trois places. Pourquoi ça te donne le prix de 3 places ? Chut. S'il vous plaît. Là ici c'est « j'achète », là « il me reste ». Ici 165, ça sera la différence de ce qui reste à Jérôme, si on lui enlève ce qui reste à Audrey. Alors si on met la somme d'Audrey et de Jérôme... C'est compliqué ça. C'est la différence de ce qui reste à Audrey moins ce qui reste à Jérôme. Et toi tu me dis que ça, ça vaut trois places. Bon, réfléchissons. Marie-Rose ?

M-R : Parce qu'il soustrait 3 places à 6 places.

A : Ben écoute... En fait, lui, ce qu'il fait c'est ce qui me reste quand j'achète trois places moins ce qui me reste quand j'achète 6 places, ça vaut 3 places.

Brouhaha.

E : C'est logique.

A : Chut. Vous levez la main si vous avez quelque chose à dire. Donc après s'il veut se ramener au prix d'une place, il divise par 3. Le problème c'est pourquoi ça, ça fait trois places. C'est ça qui nous pose problème. Bastien ?

B : En fait, je calcule la différence et la différence, en fait, c'est trois places.

A : Ici c'est en fait moins trois places. Bon est-ce qu'il y en a d'autres qui... Merci Bastien. Est-ce qu'il y en a qui ont eu d'autres méthodes pour résoudre ce problème.

En fait, lors de l'entretien qui a suivi cette séance, Alice nous expliquera qu'elle a été assez déroutée par la solution de Bastien (elle n'avait pas envisagé une telle procédure de résolution). En réalité, au cours de l'interaction que nous venons de reproduire, elle a essayé de la comprendre mais n'y est pas parvenue. Ce qui explique le flou qui ressort de cet extrait.

<u>Episode 3 :</u> *La résolution du problème à l'aide d'une équation.*

Suite à la gestion de ce type de résolution non attendue, Alice envoie au tableau un élève qui a mis le problème en équation et lui demande de proposer sa solution en la détaillant pour les autres. Puis, une autre élève va au tableau pour résoudre l'équation obtenue.

<u>Episode 4 :</u> *L'institutionnalisation du plan d'étude d'un tel problème.*

Alice fait alors noter dans le cahier de cours la méthode qui a permis de résoudre ce problème :

<u>Résoudre un problème :</u>

Méthode	*Exemple*
Choisir une inconnue	*Soit x le prix d'une place*
Exprimer les données du texte en fonction de l'inconnue	*Somme d'argent d'Audrey : 6x + 220* *Somme d'argent de Jérôme :3x + 385*
Mettre le problème en équation	*Somme d'Audrey = Somme de Jérôme* *6x + 220 = 3x + 385*
Résoudre l'équation	*6x – 3x = 385 – 220* *3x = 165* *x = 55*
Conclure	*Le prix d'une place est 55 F.*

Les extraits sélectionnés :

L'analyse de la séance d'Alice montre que ses élèves ont rencontré moins de difficultés que ceux de Romain lors de la mise en équation du problème. Ceci s'explique très certainement par le fait que ces deux stagiaires enseignaient avec des publics complètement différents et que les élèves d'Alice avaient clairement beaucoup plus de facilités que ceux de Romain. Cette différence au niveau des problèmes rencontrés lors de l'écriture de l'équation s'explique aussi par le fait que l'énoncé choisi par Alice possédait des caractéristiques qui rendait moins difficile cette tâche. En effet, dans le texte de Romain, les élèves devaient traduire algébriquement les expressions "il reste" et "il manque", ce qui n'est pas évident pour certains élèves. Par ailleurs, dans le texte d'Alice, l'égalité entre les deux sommes possédées par Jérôme et Audrey est explicitement décrite ; dans le texte de Romain, il y a également une égalité mais qui, cette fois, est implicite.

Dans la mesure où les extraits visionnés pour la séance de Romain vont permettre d'aborder à la fois des problèmes liés à la mise en équation et à la résolution des équations obtenues, nous avons fait le choix, pour la séance d'Alice, d'attirer l'attention du groupe de stagiaire sur un incident fréquemment rencontré par des enseignants débutants en algèbre : la résolution arithmétique de problèmes initialement choisis pour travailler la mise en équation, c'est à dire l'épisode 2.

Passons maintenant aux extraits sélectionnés dans les séances de Benjamin et de Claire.

III.1.2 - Les séances de Benjamin et de Claire :

Comme nous l'avons précisé plus haut, pour ce dispositif complémentaire, nous avons choisi des extraits de films relatifs à des moments qui nous avaient semblé problématiques. Ainsi, dans le cas de Benjamin, nous avons sélectionné deux extraits : le premier est relatif à l'élaboration commune du plan d'étude d'une fonction. Rappelons que le retour sur ce passage a conduit, en particulier, Benjamin à se questionner sur la place à laisser aux élèves lors de l'élaboration de techniques. Le deuxième, quant à lui, concerne l'étude de la parité de la fonction carré pendant laquelle Benjamin a été confronté à une difficulté non prévue (des élèves voulaient utiliser des exemples numériques pour étudier cette propriété), ce qui l'a conduit par la suite à s'interroger sur l'apprentissage de la notion contre-exemple et à avoir un regard critique par rapport à certaines de ses pratiques de prise en charge des difficultés d'élèves.

L'étude de la séance filmée de Claire a été menée à la fin des trois heures consacrées au dispositif vidéo. Il n'était donc pas possible d'analyser plusieurs extraits, nous avons alors proposé de visionner celui relatif à l'étude de l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{36 - x^2}$. Elle a été menée d'abord dans le cadre géométrique et rappelons que la justification fournie par Claire était imprécise ; ensuite une étude algébrique a été ébauchée pendant laquelle Claire a dû prendre en charge des difficultés liées à l'utilisation de la racine carrée.

Passons maintenant à l'analyse des questionnements produits par les cinq stagiaires.

III.2 - Les questionnements des stagiaires :

La réunion des cinq stagiaires s'est déroulée le 22 juin 2000, après que nous les ayons tous rencontrés individuellement pour visionner et analyser leur propre séance. Une semaine avant environ, nous leur avions fourni un document sur lequel figuraient les énoncés des cinq situations et les objectifs visés par leur auteur, afin qu'ils puisent avoir un minimum de connaissances sur les séances filmées.

L'étude de chacune des quatre premières séances a été menée en deux temps : avant le visionnement du film, nous leur avons demandé de donner leur avis a priori sur les énoncés choisis par leurs collègues et de préciser les problèmes qu'ils envisageaient du côté des élèves et du côté de l'enseignant. Pour le dernier extrait visionné, celui relatif à la séance de Claire, nous n'avons pu mener une telle analyse a priori par manque de temps.

Après chaque analyse préliminaire, nous visionnions le film, puis nous leur demandions les remarques que leur suscitait le déroulement effectif observé dans les extraits étudiés. Notons que, pour ces analyses a posteriori, nous avons parfois amené nous-mêmes quelques éléments d'analyse soit parce que les stagiaires en étaient demandeurs, soit pour les amener à approfondir certaines de leurs réflexions. Dans la présentation des questionnements qui ont émergé, nous préciserons ces éléments.

Notons enfin que nous n'avions pas prévu de questionnaire spécifique, qui aurait permis de structurer les analyses, afin de laisser libre cours à leurs réflexions. Les diverses interventions des stagiaires ont alors pris la forme d'une discussion à bâtons rompus (dont le lecteur trouvera la retranscription en annexe 30).

Dans cette partie, nous listerons, séance par séance, les différents types de questionnements ou de réflexions qui ont émergé à travers cette discussion. Pour chacun d'entre eux, nous pointerons les raisons de son émergence et les évolutions observées au cours de la discussion ; nous préciserons également comment se sont exprimées les différentes expériences des stagiaires.

Intéressons nous à la première séance abordée au cours de ce dispositif complémentaire, celle de Nicolas.

III.2.1 - La séance de Nicolas :

La discussion préliminaire, avant le visionnement des deux extraits, montre que les stagiaires ont étudié le document nous leur avions distribué quelques jours auparavant. En effet, elle a débuté par deux questionnements relatifs à ce que des élèves de sixième peuvent produire dans une telle situation. Le premier concerne la manipulation d'écritures algébriques, le deuxième est centré sur la justification et la généralisation en algèbre. Des réflexions relatives à ces deux thèmes seront développées dans la discussion qui suit le visionnement d'une partie du film. Nous consacrons donc les deux parties suivantes aux raisons et au développement de ces deux questionnements.

III.2.1.1 - Le questionnement relatif à la manipulation d'écritures algébriques

Ce questionnement émerge lors de la discussion préliminaire à travers une première interrogation de Benjamin relative à la technique que les élèves de sixième peuvent utiliser pour calculer $(2n + 3n) \div 5$:

> B : Quand je vois : "écris le plus simplement possible à l'aide de n le résultat obtenu", je me demande ce que comprennent les élèves vraiment et je me demande ce qu'ils vont produire. Quand ils voient 2n+3n divisé par 5, je ne sais pas ce qu'ils vont faire.

Il est clair que Benjamin a analysé cette tâche avec son regard de professeur de classe de seconde, classe dans laquelle la simplification de ce type d'expression s'appuie sur des règles formelles. La prévision de procédures envisageables chez des élèves de sixième nécessite clairement une approche différente de celle mise en place dans les classes supérieures. Ce changement d'approche n'a rien d'évident pour Benjamin qui n'a jamais enseigné en sixième et n'arrive visiblement pas à imaginer une simplification qui ne s'appuie pas sur un calcul formel. Signalons que, lors de l'entretien de préparation de la séance, Nicolas s'est posé le même type de questions. En fait, ce n'est qu'après une discussion avec nous qu'il a pu envisager des procédures s'appuyant sur la définition des écritures produites à travers cette situation et articulant le registre des écritures algébriques et celui du langage naturel.

Suite à cette première remarque de Benjamin, les stagiaires abordent d'autres questions centrées sur les difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans la situation. Nous y reviendrons dans la partie suivante. Après ces différentes interrogations, il nous a semblé intéressant de relancer la discussion sur les problèmes liés à la simplification de l'écriture : "$(2n + 3n) \div 5$", ceci afin d'obtenir des informations sur les conceptions des autres stagiaires. Il s'avère alors que Claire, qui enseigne elle aussi en seconde, se pose la même question que Benjamin, comme le montre la citation suivante :

> C : Je me suis dit que cela allait être difficile, parce que c'est tout de suite un calcul avec la lettre. Parce qu'en fait, le but c'est quand même ça : on a vu sur des exemples que cela donnait le même nombre, mais après si on leur demande d'écrire le double, machin, c'est quand même écrire 2n+3n divisé par 5. Je me demande justement pour un premier exercice comment ils vont faire. 2n+3n, bon ils peuvent le sentir. n cela représente un nombre, je le prends 2 fois puis après 3 fois, cela fait 5 fois.

Mais, contrairement à Benjamin, elle envisage une nouvelle approche consistant à traduire l'expression algébrique dans le langage naturel. En particulier, elle insiste sur le fait que les élèves doivent sentir que la lettre "n" a un statut de nombre. Benjamin explicite alors un autre type d'aide qui lui semble plus simple que celui évoqué ci-dessus par Claire: il propose de remplacer la lettre "n" par un objet concret, par exemple un bonbon. Ce système d'aide est classique dans les pratiques d'enseignants pour faciliter la tâche des élèves lors de la simplification d'expressions algébriques ((Tirosh, Even, Robinson, 1998)). Mais cette approche, qui a souvent des effets positifs rapides à court terme, quand on reste dans l'univers des expressions du premier degré, a, on le sait, des limites évidentes et peut même éventuellement se muer ultérieurement en obstacle : elle pousse en effet à confondre les objets et le nombre d'objets ; la lettre ayant alors un simple statut d'étiquette et non celui de nombre. Par ailleurs, elle conduit certains élèves à croire que l'on ne peut multiplier des expressions algébriques telles que 2a et 5b parce qu'on ne multiplie pas des ananas et des bananes.

Claire admet alors que cette technique peut aider les élèves dans la simplification de l'écriture "2n + 3n". En revanche, elle ne voit pas comment cela peut les conduire à obtenir l'égalité "5n ÷ 5 = n", comme le montre l'échange suivant avec Benjamin :

B : Cela est peut-être plus simple s'ils prennent des objets : 2 bonbons, 3 bonbons, j'en ai 5.

C : Oui. Mais après dire 5n divisé par 5. Moi je pense qu'il faut dire que n c'est comme un nombre donc on écrit 5 fois n divisé par 5.

Claire pointe donc ici une première limite relativement à ce système d'aide et insiste sur le fait que les élèves doivent comprendre que la lettre "n" représente un nombre. Après cet échange, la discussion portera sur les connaissances des élèves relativement aux lettres avant qu'ils ne rencontrent la situation proposée par Nicolas. Puis, le visionnement des deux extraits débute.

A travers le deuxième extrait, les stagiaires ont pu constater que la formation et la simplification de l'écriture " (2n + 3n) ÷ 5" n'ont pas été trop problématiques pour les élèves, Nicolas ayant fait le choix de revenir à la définition des expressions manipulées. Leur discussion après le visionnement du film porte donc sur les difficultés rencontrées dans la suite de la séance, sur lesquelles nous reviendrons dans la partie suivante. Mais, à la fin des échanges relatifs à cette séance, nous avons voulu revenir sur la proposition de Benjamin consistant à remplacer la lettre "n" par un objet concret afin de connaître la position de Romain et d'Alice sur cette technique qu'ils avaient sans doute utilisée dans leur classe de quatrième :

AL : Tout à l'heure, Benjamin disait que pour expliquer que 2n+3n=5n , on pourrait utiliser des bonbons. Qu'est-ce que vous en pensez, ceux qui ont eu des quatrièmes ?

R : Moi je l'ai fait avec des vaches.

A : Moi, j'ai eu des problèmes. C'est multiplier x et y... Multiplier des choux et des carottes, on a le droit mais, par contre, les additionner, on n'a pas le droit.

B : Là c'est les limites de l'exemple.

Ce nouvel échange conduit donc ces deux stagiaires à revenir sur leurs propres pratiques et, en particulier pour Alice, à pointer une limite de la technique proposée par Benjamin. Cette remarque d'Alice conduit alors le reste du groupe à s'interroger sur l'intérêt de ce système d'aide et la discussion fait apparaître des avis partagés :

N : Si on utilise ça, il faut bien faire sentir aux élèves, surtout dès qu'on arrive en quatrième, ils commencent à être plus mûrs, que c'est un moyen mnémotechnique, que c'est un truc.

A : Mais pourquoi ce moyen ne marche pas pour la multiplication ?

N : Un moyen mnémotechnique, c'est toujours pour quelque chose de précis.

C : Et puis dans la vie courante tu ne multiplies pas les objets. Tu peux les additionner mais pas les multiplier. cela ne signifie rien.

A : Si, tu as des aires.

C : Oui mais c'est des nombres que tu multiplies.

AL : Là aussi ce sont des nombres. Quand on dit : ce sont des bonbons, on assimile la lettre à un objet.

B : Moi je m'en suis servi en seconde cette année avec les vecteurs. J'avais beaucoup d'élèves qui avaient du mal à réduire 2 $\overrightarrow{AB}$ +3 $\overrightarrow{AB}$. Donc je leur disais... Bon là, ça marche parce qu'on ne multiplie pas les vecteurs. Deux objets plus trois objets, cela nous en fait cinq. Mais il y a beaucoup d'élèves qui répondent : on factorise par $\overrightarrow{AB}$.

N : C'est des élèves qui ont bien compris le programme de cinquième. [...] Je pense qu'il faut que ce soit clair pour les élèves. Je pense qu'on peut se permettre de ne pas être rigoureux par moment, pour leur donner des petits trucs...

A : Moi, je ne pense pas finalement. Moi, cela les a perturbés après.

Cet échange amène donc ce groupe à aborder le niveau de rigueur qu'un enseignant de mathématiques doit avoir en classe et le fait que le remplacement d'une lettre par un objet concret conduit à une vision erronée du statut de la lettre dans une expression algébrique.

Puis, la discussion se prolonge sur le fait que certains élèves manipulent les expressions algébriques sans donner de "sens" à ce qu'ils font :

C : Ils essaient d'appliquer des règles dont ils ne se souviennent plus, sans chercher le sens.

A : Ou à mon avis ils mettent plus derrière n le mot nombre. On considère le même nombre et deux nombres plus trois nombres cela fait cinq nombres. En fait ils généralisent dans leur tête je pense.

[...]

AL : C'est pareil, pour le 5n divisé par 5, intuitivement les élèves de sixième ont bien vu comment on faisait. On ne va pas le voir dans la cassette de Romain. Mais à un moment, tu as fait résoudre l'équation : $2 \times (x + 15) = 36$, on divise par 2, cela fait $x+15=18$, et il y a une élève qui demande pourquoi on n'a pas divisé 15 par 2. En sixième, ils donnent du sens aux écritures qu'ils ont, et en quatrième certains ne donnent plus de sens à ce qu'ils font.

C : Même en seconde, en aide individualisée, même sur d'autres choses, je leur disais : essayez de comprendre le sens, plutôt que des règles par cœur que vous allez confondre parce que vous ne les avez pas comprises. Et, en sixième, je sens qu'ils ont la notion de comprendre le sens. Plus ça va, plus certains élèves essaient d'apprendre des règles, les appliquer sans en comprendre le sens.

Cet échange conduit donc, quant à lui, à l'ouverture d'une autre piste de réflexion relative au fait, souligné notamment par J.P.Drouhard (Drouhard, 1992), que certains élèves en difficulté manipulent des expressions algébriques sans tenir compte de leur dénotation et que la question de la validation des transformations se pose juste pour eux en terme de conformité à des règles ou à des procédures. Nous retrouvons, par ailleurs, ici l'attention particulière de Claire au fait qu'il faut aider les élèves à donner du sens à certaines manipulations algébriques, que nous avons pointée lors de l'élaboration de son profil dans le chapitre 6. Il est clair que cette discussion pourrait être prolongée en s'intéressant à ce qui fait le sens d'une expression algébrique et sur les relations entre sens externe et sens interne, mais nous ne lancerons pas les professeurs stagiaires dans cette direction.

III.2.1.2 - Le questionnement relatif à la justification et à la généralisation en algèbre :

L'étude a priori de la situation proposée par Nicolas a également conduit Benjamin et Claire à s'interroger, avant de visionner le film, sur les attentes que l'on pouvait avoir d'élèves de sixième lors de la justification d'égalités telles que "$n + 2 = 2 \times n$" ou "$n + n = 2 \times n$" :

> C : Moi, ce que je trouve surtout très difficile, c'est la troisième question. Au sens où c'est quand même le début de l'utilisation des lettres. [...] Et puis comment l'expliquer ? Moi j'ai peur que les élèves fassent un peu au hasard. Certains non, bon n+n celui-ci, ils vont dire que c'est 2xn forcément. Mais dès que ce sera faux, ils vont être à mon avis perdus.
>
> B : Moi, ce que je trouve difficile, c'est que montrer une égalité c'est quelque chose que je trouve difficile pour les élèves. Parce qu'en seconde ils ont du mal. Pour montrer une égalité vectorielle, ils partent de l'égalité et trouvent 0=0. Pour n'importe quoi ils font ça, donc là je me demande vraiment comment les sixièmes s'y prennent. Et puis pour démontrer qu'une égalité est fausse, il faut avoir recours à un contre-exemple. Pour la première, tu prends 3 par exemple, cela ne marche pas. Ben ils vont prendre n = 3 pour la deuxième : regardez ça marche, donc la propriété est bonne.

De nouveau, nous voyons réagir ces deux stagiaires avec leur regard d'enseignant en classe de seconde. Ils semblent, en particulier, gênés par le fait que les élèves vont avoir à justifier que des égalités sont fausses. Etant donné les questions que Benjamin s'est posées sur l'intérêt ou non d'introduire la notion de contre-exemple en classe de seconde, il est tout à fait compréhensible qu'il ne voit pas ce que l'on peut envisager avec des élèves de sixième. Or, il s'avère que, lors de l'entretien de préparation de la séance, le questionnement de Nicolas relativement à ce type de tâches était différent de celui de Benjamin et de Claire. En effet, le fait de proposer aux élèves de donner des contre-exemples pour montrer qu'une égalité est fausse ne lui posait aucun problème. En revanche, il avait plus de mal à imaginer que certains élèves puissent justifier le fait qu'une égalité telle que "$n + n = 2 \times n$" soit vraie[174]. Cette différence de point de vue va alors amener Benjamin et Nicolas à une discussion portant sur les attentes que l'on peut avoir pour un élève de sixième :

> N : Je veux répondre à Benjamin. J'ai l'impression que tu es dans l'esprit de la seconde. Là c'est pas montrer les égalités, c'est dire celles qui sont justes.
>
> B : Oui mais il faut bien les justifier.
>
> N : Attends, on est en sixième.
>
> B : Enfin... Comment tu... Pour la première tu as fait quoi ?
>
> N : Pour toutes, le but c'était surtout de faire le lien avec les expressions littérales... Le but était de leur faire remplacer et voir... Ils n'ont pas absolument pas à justifier. Cet exercice se ramène à essayer sur des exemples.
>
> B : D'accord, d'accord.

---

[174] Dans la description brève de la séance filmée dans la classe de Nicolas, nous avons repris l'épisode 5 dans lequel Nicolas est effectivement confronté aux difficultés d'élèves qui ne comprennent pas comment traiter cette question de la justification d'égalités. Pour faciliter alors la tâche des élèves, il fera alors la proposition suivante : " Bon alors, pour tout le monde, dans le troisièmement quand l'égalité elle est vraie vous pouvez juste marquer qu'elle est vraie, mais quand elle est fausse, je voudrais que vous me fassiez la même chose que ce qu'on a fait ici. C'est à dire si elle est fausse l'égalité, ça veut dire qu'il y a un nombre n pour lequel ça ne marche pas, au moins."

Il s'avère alors que la discussion a dévié sur un autre questionnement. Mais, une discussion ultérieure avec Benjamin montrera qu'il n'a pas du tout été convaincu par le choix de Nicolas et qu'il a eu un sentiment de manque de rigueur.

L'épisode consacré à cette question ne sera pas visionné. Mais il aurait très certainement été très intéressant de repérer les réactions des autres stagiaires face aux difficultés rencontrées par les élèves et au choix effectué par Nicolas. De fait, ce questionnement ne sera pas repris après le visionnement.

Pendant l'étude a priori de la séance, une question relative à la généralisation est abordée par Romain :

R : Moi ce que je trouve compliqué, c'est à la fin de la question 2b : ce que l'on a remarqué au 1, est-il vrai pour tous les nombres ? C'est en s'appuyant sur l'écriture littérale, je pense.

C : Oui simplification.

R : Ouais... Bon de là à ce qu'ils comprennent que vu que cela marche pour n, cela va être vrai pour tous les nombres... Ça va être dur.

Cette remarque de Romain ne sera pas reprise par les autres dans la mesure où leur réflexion s'est ensuite portée sur les difficultés que pourraient rencontrer un élève de sixième pour simplifier l'écriture " $(2n + 3n) \div 5$ ". Mais, nous pouvons noter que la question de Romain est tout à fait pertinente. Suite au visionnement du film, les autres vont alors se rendre compte de l'aspect problématique de cette question pour les élèves de Nicolas et, sur ce point, Claire précise :

C : Le point sensible, c'est comprendre, en fait, ce qu'on vient de faire. Ils ont bien compris étape par étape ce qu'ils ont fait. Finalement, la troisième étape, je pense qu'ils l'ont comprise. Mais après quand il s'agit de comprendre globalement ce qu'on vient de faire, c'est là qu'est la panique.

Au cours des différents échanges relatifs à cette séance, Benjamin, Claire et Alice discuteront la pertinence du choix de la situation effectué par Nicolas pour introduire la lettre au collège : Benjamin considère que cette introduction est trop brutale et que la situation est trop ambitieuse. Claire estime, quant à elle, que les élèves peuvent être confrontés à trop de problèmes et que cela peut occulter l'intérêt d'utiliser une lettre. Enfin, Alice est la seule à pointer les difficultés rencontrées par les élèves au moment de l'introduction de la lettre. Il s'avère qu'au cours de son stage, Alice a mis en place une situation portant sur l'écriture de formules[175] dans sa classe de quatrième. La comparaison entre cette situation et celle choisie par Nicolas la conduit donc à s'interroger sur la pertinence du choix de Nicolas :

A : Si je voulais dire quelque chose : au début ils avaient du mal à comprendre que n représentait n'importe quel nombre, donc la généralisation. Et moi je me disais que peut-être sur un truc géométrique, on comprend mieux ce que c'est n. Ils ont l'habitude quand même d'utiliser des formules : $l \times L$, l'aire du rectangle, des trucs comme ça. Donc en fait je me disais qu'utiliser une lettre sur un truc comme ça, peut-être qu'ils s'imprégneraient mieux de la lettre.

---

[175] Alice a repris une des situations étudiées lors du travail sur les enjeux de l'enseignement de l'algèbre collège mené lors d'une journée de formation didactique à l'IUFM : "On borde un carré de côté n par une bordure de côté unité. Combien y a-t-il de côté unité sur cette bordure ? "

Il est vrai que la situation choisie par Alice paraît plus appropriée que celle de Nicolas pour introduire un premier travail sur les formules en classe de sixième. En effet, pour le problème du carré, il est possible d'envisager une certaine variété dans les formules produites par les élèves. Cette variété permet, en particulier, de travailler sur la non-unicité du choix des lettres et sur la non-unicité des formules produites pour un même choix de lettre. En sixième, il est alors possible de montrer aux élèves que même si deux formules semblent différentes, elles peuvent être équivalentes (elles traduisent des méthodes de dénombrement différentes mais toutes deux valides et lorsqu'on remplace dans chacune d'elles les lettres par un même nombre, on obtient toujours le même résultat). L'équivalence et la justification d'égalités associées peut se faire au niveau de transformations d'écritures mais celles-ci peuvent être soutenues par leur sens externe, en référence à la situation géométrique et aux modes de dénombrement.

III.2.2 - La séance de Romain :

Comme pour la séance de Nicolas, les stagiaires ont pris du temps pour étudier a priori la situation proposée par Romain. La discussion avant le visionnement du film porte donc d'abord sur le problème choisi pour amener les élèves à rencontrer le type de tâches "résoudre un problème à l'aide d'équations". Suite au visionnement, trois autres questionnements apparaissent au cours de la discussion : un premier relatif aux difficultés rencontrées par Romain pour amener les élèves à se "débarrasser" de la deuxième inconnue y, un deuxième autour des responsabilités à laisser aux élèves dans l'élaboration d'une méthode conduisant à la résolution de tels problèmes.

Etudions d'abord la réflexion relative à la pertinence du choix du problème.

III.2.2.1 - L'analyse du problème :

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, cette réflexion est abordée, avant le visionnement, par Benjamin qui a comparé l'énoncé choisi par Romain à celui travaillé dans la séance d'Alice :

> B : Il était dur ton problème. J'ai trouvé la mise en équation difficile. 5 élèves par banc, tu as 12 places libres, après c'est 4 mais là ils ne pourront pas s'asseoir. Je sais pas... A côté de ça, quand j'ai lu celui d'Alice après où l'objectif est exactement le même, je trouve qu'il est beaucoup plus clair. Moi, il a fallu que je lise l'énoncé deux ou trois fois avant que je voie comment j'allais m'y prendre. Alors qu'avec celui d'Alice, c'est venu tout de suite... Et puis j'ai hésité à un moment : on ne connaît pas le nombre d'élèves, le nombre de bancs... J'ai été un peu paumé... Bon j'ai su le faire quand même, je vous rassure. L'avantage c'est que je n'ai pas trouvé de méthode arithmétique, je ne sais pas si les élèves en ont trouvé.

Contrairement à ce qui s'est passé pour la séance de Nicolas, Benjamin ne semble pas handicapé ici par sa fonction de professeur en classe de seconde pour l'analyse du problème proposé par Romain. En fait, comme nous l'avons vu dans l'analyse de ses pratiques (chapitre 5), ce stagiaire a fait travailler ses élèves de seconde sur le type de tâches "résoudre un problème à l'aide d'une équation". L'étude des problèmes qu'il avait alors sélectionnés avait montré qu'il avait semblé attentif au fait que certains énoncés sont plus ou moins simples à traduire à l'aide d'une équation. Nous retrouvons bien cette sensibilité dans la citation ci-dessus. En revanche, nous avons également pointé dans ce chapitre qu'il n'avait pas vraisemblablement été sensibilisé au fait que certains problèmes ne favorisent pas forcément l'usage d'équations, du fait que des résolutions arithmétiques peuvent être envisagées. La citation ci-dessus montre qu'une partie de son analyse a priori du problème proposé par Romain a consisté en la recherche d'une telle solution, ce qui apporte un élément nouveau par rapport au profil que nous avons établi de lui.

Il s'avère que Claire a également cherché s'il était possible de résoudre arithmétiquement le problème et qu'elle a trouvé une solution qu'elle expose à ses collègues :

C : Moi j'ai une méthode tout de suite qui m'est venue. J'ai raisonné comme sur les bancs, pas en terme d'équation. Pour l'expliquer, ça va tout seul. En fait, tu places les cinq élèves par banc, il y a douze places libres. Tu peux les visualiser. Et après tu sais que tu vas les mettre par quatre, tu remets des élèves sur les douze places libres. Et tu vas les répartir autrement, mais cela ne change rien. Ça y est tous les élèves sont assis, sauf trois. Cela fait quinze bancs.

Mais les autres ne sont pas convaincus que des élèves de quatrième soient capables de produire une telle solution :

B : C'est un peu compliqué quand même.

C : Visuellement... Je suis sûre que tu écris au tableau, les élèves comprennent tout de suite. Moi quand je l'ai lu, j'ai dit : c'est plus simple que faire une équation.

N : A la limite, tu prends le risque qu'elle sorte. Mais si elle ne sort pas, les élèves pourront être convaincus que l'algèbre...

R : De toute façon elle n'est pas sortie. Mais je ne pense pas que les élèves s'amuseraient à modéliser comme ça. Parce que ce n'est pas aussi simple que ça.

Puis la discussion a, de nouveau, porté sur la comparaison de ce problème avec celui choisi par Alice et a conduit le groupe à expliciter pourquoi il leur semblait plus compliqué à mettre en équation :

AL : Qu'est-ce qui vous semblait difficile ? C'est qu'au début il en reste et après il y en a en trop. C'est ça ?

A : Ouais.

C : C'est pas écrit explicitement comme dans le problème d'Alice.

B : Là ils peuvent se mettre à la place des personnages.

AL : C'est plus dans un contexte de la vie courante ?

B : Ouais aussi.

R : Là il y a quand même un nombre d'élèves par banc et on n'a pas le nombre de bancs, ça...

AL : En dessous, il y a un prix par place et on ne connaît pas le prix d'une place.

R : Moi je ne sais pas. Quand tu m'as passé ça, je me suis dit : tiens, Alice, c'est exactement la même chose et cela leur aurait posé moins de problèmes.

A : Le mien est plus guidé en fait. On sait qu'on a la somme d'Audrey, la somme de Jérôme. Alors que là c'est plus flou.

C : Là c'est écrit explicitement : ils ont la même somme. Donc l'égalité est donnée. Alors que là l'égalité n'est pas écrite, il faut la comprendre dans l'énoncé.

La discussion conduit alors effectivement à pointer certaines différences entre les deux énoncés, que nous avons repérées dans la partie III.1.1.3, qui rendent effectivement plus complexe la mise en équation du problème choisi par Romain.

Passons maintenant à l'étude du deuxième questionnement relatif à la gestion de la deuxième inconnue introduite par les élèves.

III.2.2.2 - La gestion de la deuxième inconnue :

Après le visionnement des deux extraits, la discussion porte d'abord sur le fait que les élèves ont choisi deux inconnues pour résoudre le problème. Alors que Romain a été surpris par cette procédure, Benjamin avec son expérience de professeur en seconde ne semble pas du tout étonné :

C : Les difficultés, c'est qu'ils sont passés par deux inconnues.

B : Je ne sais pas si c'est vraiment une difficulté en fait.

R : Ma difficulté à moi, cela a été ça.

B : Tu ne t'y attendais pas ?

Cette remarque conduit donc les autres stagiaires à considérer le problème et à repérer qu'il est finalement compréhensible que les élèves de Romain aient introduit une deuxième inconnue pour désigner le nombre d'élèves :

C : C'est vrai que même après... Je suis sûre que je donne le même problème en seconde, ils font un système de deux équations à deux inconnues. C'est intuitif chez eux.

[...]

N : Le fait qu'il y ait deux choses qu'ils ne connaissent pas, moi je trouve très naturel d'introduire deux lettres.

Romain précise alors qu'il a surtout était gêné par la gestion de cette deuxième inconnue et la discussion dévie alors vers une analyse de la gestion choisie par Romain et Benjamin propose alors une autre gestion possible :

R : Oui mais je vois, on avait prévu d'introduire qu'une lettre, ils m'en ont introduit deux. J'ai pris les deux et, puis à la fin, le y, je voulais m'en débarrasser.

C : Eux avec les deux équations, ils sont coincés.

B : C'est vrai qu'eux ne comprennent pas pourquoi le y, tu le dégages. Alors que si tu écris : nombre d'élèves, tu ne vas pas laisser le nombre d'élèves dans une équation[176]. Mais c'est vrai que si les élèves te proposent y, il faut laisser faire.

R : Oui mais je ne m'en sors pas. Après je dis : le y, je l'ai introduit mais il ne me sert à rien.

[176] Au cours de la discussion relative à la séance de Romain, Benjamin a déjà expliqué comment il gère ce genre de problème avec les élèves : " Moi en seconde, je faisais toujours comme ça : j'écrivais le nombre d'élèves, deux points, la première expression qu'on obtenait en fonction de x, en dessous le nombre d'élèves, deux points, une deuxième expression. Bon tu passes par une deuxième inconnue sans le dire, tu ne la formalises pas. Bon et regardez : on a deux expressions pour la même chose donc ces deux expressions sont égales." . Il fait donc référence ici à cette technique.

La gestion proposée par Benjamin est celle que nous avons analysée à plusieurs reprises au cours de l'analyse de ses pratiques : il s'agit de guider les élèves à travers des questions bien choisies. L'intérêt d'une telle pratique est que les élèves ne mettent pas en place de procédures non prévues, mais, comme nous l'avons déjà pointé, cela limite sérieusement les responsabilités données aux élèves. L'analyse d'une telle pratique ouvrira un autre débat sur la place à laisser aux élèves lors de la rencontre avec un nouveau type de tâche, débat qui fait l'objet de la partie suivante.

III.2.2.3 - L'élaboration d'une méthode par les élèves :

Comme nous l'avons déjà précisé lors de la brève description de la séance filmée dans la classe de Romain, ce stagiaire avait prévu un premier scénario dans lequel il comptait distribuer un plan à suivre pour résoudre un problème à l'aide d'une équation qu'il prévoyait de faire appliquer sur un exemple. Après une longue discussion avec lui relativement au fait qu'il serait pertinent de laisser plus de responsabilités à ses élèves, il a alors envisagé un nouveau scénario effectivement mis en place au cours de la séance filmée. Mais, il s'agissait visiblement de la première fois qu'il menait un tel travail de recherche. De ce fait, il a rencontré des difficultés de gestion de sa classe. Ainsi, certains élèves qui n'ont pas su débuter le problème n'ont pas travaillé au cours de la séance. Au cours de l'analyse à chaud et de l'analyse du film, nous sommes revenue longuement avec Romain sur l'analyse de sa gestion et nous lui avons proposé des pistes de réflexion pour le conduire à approfondir sa réflexion quant à la gestion d'une telle séance.

Du fait que certains élèves n'aient pas vraiment travaillé, Romain n'est pas très convaincu de l'utilité d'un travail de recherche pour ce type de tâches. Il profite donc de la discussion avec ses pairs pour aborder ce problème :

R : A le refaire, je ne referais pas en recherche. C'est pareil là, on entend que les gens qui trouvent...

C : Tu ferais comment ?

R : Plus guidé.

C : Ah ouais, tu ferais le même problème. Mais tu poserais les questions, tu...

R : Ouais, genre polycopié avec première question : qu'est-ce qu'on cherche comme valeur ? Appelez x cette valeur. Ce qu'on vient de faire, ça s'appelle la mise en équation.

C : Sans temps de recherche ? Même pas cinq minutes, tous seuls, pour voir qu'ils n'y arrivent pas ?

R : Ou cinq minutes, alors.

La sensibilité de Claire à laisser de réelles responsabilités à ses élèves la pousse alors à réagir à la remarque de Romain. La discussion s'engage alors sur l'intérêt ou non d'une phase d'élaboration par les élèves d'une méthode. En fait, les quatre autres stagiaires y voient plutôt un intérêt, comme le montre l'extrait suivant :

B : Je trouve ça intéressant de les faire venir par eux-mêmes à la mise en équation de façon plus naturelle comme tu l'as fait, plutôt que de les guider.

A : Moi je pense aussi qu'il faut passer par une étape de recherche.

C : Tu as fait pareil, toi, Alice ?

A : Oui. Au début je voulais faire guidé. Et puis avec la discussion avec Agnès, on a décidé de ne pas faire guidé. J'ai été convaincue et je suis toujours convaincue.

De nouveau, cette discussion amène Romain à préciser ce qui l'a particulièrement gêné au cours de ce travail de recherche :

R : Moi ce qui me gêne c'est le temps perdu par les élèves de pas trop bonne volonté.

Nous intervenons alors pour préciser que les difficultés rencontrées sont, en réalité, dues au fait que Romain n'est jamais intervenu auprès des élèves qui n'avaient pas su entamer la recherche du problème :

AL : Il y avait déjà moyen de mieux gérer ton groupe du milieu. Elles n'ont pas démarré parce qu'elles ne comprenaient pas. [...]. Ceux qui n'y arrivent pas, pourquoi ne pas les diriger un peu.

R : C'est ce qui m'embête. Les diriger là-dessus c'est vraiment tout leur donner.

Cette intervention amène alors un quatrième questionnement relatif aux aides que l'on peut apporter aux élèves qui sont bloqués devant l'énoncé du problème à mettre en équation. Benjamin propose alors un système d'aides que nous avons effectivement relevé lors de l'analyse de ses pratiques lors du travail sur la mise en équation de problème : demander si le nombre de banc peut être égal à 6. En fait, ce type d'aide avait été envisagé lors de l'entretien de préparation avec Romain et il l'a évoqué lors de la séance (cf. épisode 1) mais il ne l'a pas exploité. Nous présentons ci-dessous un extrait de la discussion relative à cette réflexion :

B : Prendre un cas précis. Dire : on suppose qu'il y a six bancs, regardez ce qui se passe. Un support physique pour qu'ils se représentent.

AL : Romain l'a dit à un moment : supposons qu'il y ait six bancs.

B : Oui mais ça tu n'en parles plus après.

R : Non c'est tombé aux oubliettes.

C : Cela aurait permis de comprendre l'énoncé avec un exemple. Cela leur aurait peut-être permis de prendre qu'une inconnue.

B : D'une part, cela te permet de calculer de deux façons différentes le nombre d'élèves et ils vont constater qu'il y a un problème. Et après, cela introduis la mise en équation parce que les deux équations doivent être égales.

Cette discussion conduit ensuite à envisager les avantages d'une telle aide. Mais, Nicolas considère qu'elle risque d'inciter les élèves à résoudre les problèmes par tâtonnements ou de manière arithmétique ce qui pourrait être gênant dans le projet de l'enseignant voulant montrer l'intérêt d'utiliser une équation pour résoudre certains problèmes.

En conclusion, soulignons que l'introduction des équations comme outil de résolution de problèmes est une situation délicate dans la mesure où l'introduction de lettres est en rupture avec les pratiques antérieures des élèves. Il est légitime de faire l'hypothèse que les élèves ne vont pas inventer ce type de résolution s'ils ne l'ont jamais rencontré auparavant. Lors d'un travail introductif de ce nouveau type de tâches, il est possible de problématiser pour faire ressentir aux élèves les raisons d'être de nouvelles techniques de résolution, mais il est clair que l'enseignant devra ensuite sans doute aider les élèves pour l'introduction d'une lettre. La considération de cette difficulté didactique rend tout à fait pertinentes certaines des interrogations de ces stagiaires, même s'ils ne savent pas en analyser les raisons.

Nous allons étudier maintenant les questionnements issus de l'analyse de la séance d'Alice. Nous tenons ici à préciser que la moitié du temps consacré à ce dispositif complémentaire a été utilisée pour l'analyse des séance de Romain et de Nicolas. Les stagiaires ont donc disposé de moins de temps pour les analyses des trois séances restantes. Par ailleurs, au cours de cette deuxième partie, nous avons perçu un phénomène certain de lassitude. Ces deux raisons expliquent que les questionnements issus de l'étude des séances d'Alice, Benjamin et Claire semblent moins approfondis.

III.2.3 - La séance d'Alice :

Comme nous l'avons précisé au cours de la présentation de l'extrait de la séance d'Alice sélectionné pour ce dispositif complémentaire, l'étude des extraits relatifs à celle de Romain a conduit le groupe à différentes réflexions autour de la mise en équation de problèmes. Dans la mesure où le projet d'Alice est très proche de celui de Romain, la discussion sur cette nouvelle séance est beaucoup plus réduite et porte surtout sur la difficulté d'Alice à gérer une résolution arithmétique non prévue :

> A : En fait moi je n'avais pas du tout anticipé. Comme il y avait un gamin qui a trouvé 55... Mon premier but était de convaincre qu'il fallait passer par les équations. Je ne l'ai pas vraiment atteint... Donc c'est pour cela que je l'avais envoyé au tableau mais je n'avais pas du tout anticipé.

Les autres stagiaires s'interrogent alors sur l'interprétation de la solution proposée par l'élève au tableau :

> R : La première méthode du gamin là, elle n'est pas évidente à justifier.
>
> C : Elle est nickel aussi. Je trouve qu'il l'écrit bien. Bon il ne sait pas l'expliquer.
>
> R : Il sent bien les choses.
>
> B : En plus, c'est de l'argent en trop...
>
> C : En fait il y a une différence de places, donc à l'arrivée une différence de prix. Donc la différence de places correspond à la différence de prix. C'est la difficulté à exprimer.
>
> R : Le raisonnement est plus compliqué que faire une résolution toute bête, avec une équation. [...]Mais là l'élève d'Alice, est-ce qu'il a bien compris les choses ?
>
> A : Il a obtenu un truc qui marchait. Mais il n'en est pas sûr, de son résultat.
>
> R : Même moi pour expliquer, pour être clair... Pourtant j'ai compris ce qui se passait.

Il ressort clairement que le passage au négatif implicite dans la résolution arithmétique proposée par l'élève perturbe ces cinq jeunes enseignants. Et tous notent une certaine difficulté à interpréter simplement ce qu'a produit l'élève. Il n'y a donc rien d'étonnant dans le fait qu'Alice ne soit pas parvenue sur le moment à saisir la procédure de cet élève. Devant cette difficulté, Claire semble alors sûre que les autres élèves de la classe n'ont pas compris ce raisonnement et que cela peut leur montrer l'intérêt de la mise en équations :

> C : Ce qui est bien dans la situation d'Alice, c'est que les autres élèves n'ont rien compris à ce qu'a fait le gamin. Donc ils sont convaincus quand même qu'il faut une équation.

A travers cette citation de Claire, apparaît une réflexion, qui est également apparue chez les autres, relative à la nécessité de problématiser l'introduction d'une nouvelle technique de résolution de problèmes, point que nous avons déjà évoqué dans la partie précédente consacrée à la séance de Romain. Les analyses menées par le groupe sur des deux séances fait apparaître une sensibilité certaine au fait que l'introduction des équations comme outil de résolution de problèmes en classe de quatrième est un moment problématique de l'enseignement des mathématiques pour lequel ils doivent élaborer des solutions.

Passons maintenant à la séance de Benjamin.

III.2.4 - La séance de Benjamin :

La discussion relative à cette séance porte essentiellement sur l'étude de la parité de la fonction carré, en particulier sur le fait que des élèves aient voulu utiliser des contre-exemples pour prouver une propriété générale. La réflexion des stagiaires les conduit alors à s'interroger sur le fait d'autoriser ou non les élèves à travailler avec des contre-exemples. Sur ce point, Benjamin et Claire ont des points de vue différents, comme le montre l'extrait suivant :

> B : Et on avait un exemple dans le bouquin d'une fonction qui n'était ni paire, ni impaire. Dans le livre, la solution était : on calcule f(-1), on constate que ce n'est ni f(1), ni -f(1), donc elle n'est ni paire, ni impaire. Moi j'ai dit : je ne veux pas qu'on fasse ça. On calcule f(-x), on constate que ce n'est ni f(x), ni -f(x). Parce que j'avais peur qu'ils ne saisissent pas la notion de contre-exemple. Et là à cette séance, il y a eu le coup du f(-4).
>
> [...]
>
> C : Moi c'était : pour tout x, on calcule f(-x), après on va regarder si on trouve f(x), -f(x) et après si a priori on n'arrive pas à trouver ni l'un, ni l'autre, parce que des fois ils n'arrivent pas à voir que c'est égal, donc là à ce moment-là je leur faisais regarder sur un contre-exemple.
>
> B : Imagine qu'ils tombent par hasard su un où ça marche.
>
> C : Oui mais dans ce cas il faut qu'ils arrivent à montrer que c'est vrai.

A partir de cet exposé de leurs pratiques différentes, Nicolas expose un troisième point de vue qui va susciter une réelle controverse avec trois de ses collègues. Nous en reprenons un extrait ci-dessous :

> N : Quand tu étudies la parité, tu commences déjà par te demander, sans montrer, si elle est paire ou impaire.
>
> A : Oui mais ça, c'est quand tu as une idée de quelles fonctions sont paires ou impaires.
>
> C : Je ne vois pas comment tu vas faire.
>
> B : Je ne suis pas d'accord.
>
> N : Je trouve que c'est dommage de leur faire calculer directement f(-x). Je verrais plus facilement d'abord chercher sur des exemples, avant. Et s'ils tombent sur un contre-exemple, ils ont démontré.
>
> C : C'est les inciter à essayer et à ne pas comprendre que cela doit être vrai pour tous les x.
>
> N : Ce n'est pas parce qu'ils auront cherché sur quelques exemples...
>
> C : Je ne vois pas l'intérêt de chercher sur quelques exemples.
>
> AL : Qu'est-ce que tu vois, Nicolas, après tes exemples ?
>
> N : Cela leur permet au moins d'avoir une idée si c'est pair ou impair.
>
> [...]

C : Oui, mais toi tu connais les fonctions, tu as fait 10 ans de maths !

N : Oui justement c'est dans ce but-là que je trouve qu'il faut leur faire prendre un petit peu de recul. Pas appliquer des méthodes trop rigoureuses à ce niveau.

En fait, Nicolas exprime son souci d'amener les élèves de seconde à prendre un certain recul par rapport aux types de tâches qu'ils doivent traiter et évoque ainsi implicitement l'intérêt de les amener à développer une certaine autonomie. En réalité, la controverse avec ses pairs ne porte pas sur le fait que l'on doit amener les élèves à prendre un certain recul mais sur le fait qu'il souhaite proposer un tel travail à des élèves de seconde. En tant que professeurs en classe de seconde, Benjamin et Claire considèrent, en effet, que cela est trop tôt :

B : Nous on a l'expérience mais un élève voit une fonction compliquée, il part dans le vague. Il a un point de départ qui est f(-x) et il y va.

A : je pense que ton truc c'est au lieu de se laisser aller bourrin dans les calculs regarder un petit peu. Mais avant ça il faut qu'ils aient des repères.

B : Je pense que c'est pas mal de dire ça à des élèves de première ou de terminale. En seconde, c'est tout nouveau.

C : Cela me semble dangereux. Là si on présente comme ça, je ne m'étonnerais pas de l'erreur que l'élève a fait. Moi, à n'importe quel niveau, je n'ai réussi à avoir du recul qu'avec une certaine pratique. Je pense qu'avec les élèves c'est pareil.

Il ressort clairement de cet échange que pour Benjamin, Claire et Alice la prise de recul ne peut se faire qu'après l'acquisition de techniques. Et pour eux, cette acquisition passe d'abord par un premier travail guidé dans lequel on propose aux élèves des méthodes "sûres" qui leur garantissent une certaine réussite.

Les différentes réflexions qui ressortent de l'analyse de la séance de Benjamin sont clairement à mettre en parallèle avec un questionnement relatif aux responsabilités mathématiques à laisser aux élèves. Il est clair qu'il s'agit de nouveau d'un point sur lequel la discussion aurait mérité d'être approfondie, mais par manque de temps nous ne lancerons pas les stagiaires dans cette direction.

Intéressons nous enfin à la séance de Claire.

III.2.5 - La séance de Claire :

Par manque de temps, la discussion autour de la séance de Claire est assez courte. Deux questionnements apparaissent tout de même ; le premier est relatif à la détermination dans le cadre géométrique de l'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \sqrt{36 - x^2}$:

B : Je ne m'attendais pas à un support géométrique pour l'ensemble de définition. C'est bien mais je pense que j'aurais dit : cela a l'air de varier entre 0 et 6 et je passe à la démonstration avec l'inégalité. Moi j'ai peur que quand ils voient ça, ils se disent : c'est bon on voit sur le dessin...

C : Mais tu penses que c'est pas une démonstration. Pour moi, c'est quand même une démonstration. Justement, pour moi, mon erreur c'est d'avoir dit : on n'a pas fait une vraie démonstration.

A : C'est dans un triangle rectangle l'hypoténuse c'est le plus grand côté...

C : Ça, on l'a vu au début de la séance que le triangle est inscrit dans un cercle et que le point variait sur le cercle.

B : A partir du moment où tu n'écris pas tout ça, il n'y a pas...

C : Mais si, on l'a écrit avant.

B : Mais ce que vient d'expliquer Alice, c'est pas explicité. On ne dit pas que les deux autres côtés ont une longueur inférieure à celle de l'hypoténuse, donc cela sera inférieur à 6. Pour moi, c'est ça la démonstration géométrique.

Nous retrouvons ici le souci de rigueur de Benjamin qui craint, dans un premier temps, que l'utilisation de la figure géométrique ne pousse à lire le résultat cherché sans justification. Au cours des entretiens avec Claire, nous avons perçu qu'elle ne semblait pas très à l'aise avec la justification proposée à ses élèves. Et, même si, après le visionnement individuel du film, elle semblait convaincue que sa justification était correcte, nous pouvons pointer de nouveau ici un doute, qui finalement est confirmé par Benjamin et Alice qui pointent l'absence d'un argument dans le discours de Claire.

Le deuxième questionnement est, quant à lui, relatif à la recherche algébrique de l'ensemble de définition de la fonction considérée. En fait, il est né d'une première réflexion de Romain qui ne comprend pas pourquoi Claire a reporté à plus tard cette étude :

R : Mais algébriquement cela aurait été aussi vite que géométriquement. [...] Là tu sens le produit remarquable, tu as fini : il y en a un qui est toujours positif...

C : Là justement ils ont du mal. Faire un produit de facteurs et tout. C'est des choses où ils ont énormément de mal.

R : Vu qu'il y en a qu'un qui change de signe.

B : Comme démonstration, ça, ça peut t'induire le genre d'erreur : si tu as le produit (x-4)(x-5), avec x appartenant à IR, cela va les induire dans l'erreur pour que le produit soit positif il faut que les deux soient positifs.

C : Moi j'ai fait le tableau de signes.

B : Le cas du x+6>0, c'est quelque chose que tu peux dire quand ils ont déjà pas mal d'expérience.

En fait, pour Romain, le type de raisonnement sous-jacent à la résolution de l'inéquation $36 - x^2$ est naturalisé. Il n'a donc pas conscience des difficultés que les élèves peuvent rencontrer à travers de ce type de raisonnement complexe qui met en jeu différentes étapes intermédiaires. Rappelons que cette caractéristique était apparue dans l'analyse du travail mené sur les inéquations par Benjamin (cf. page 147). En revanche, il apparaît clairement que Benjamin et Claire, en tant qu'enseignant en classe de seconde, sont devenus vigilants à cette difficulté. Cet échange entre ces trois stagiaires fait apparaître que, même si ces stagiaires ont une capacité évidente à s'interroger sur les élèves, ils ont dû mal à la fin de leur première année d'enseignement à se distancier du niveau où ils ont enseigné.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la synthèse des résultats obtenus dans le cadre de ce dispositif complémentaire.

III.3 - Conclusion :

L'objectif de ce dispositif complémentaire était d'obtenir des informations sur les analyses d'une séance que des PLC2 sont capables de mener entre pairs et plus particulièrement d'étudier le type de questionnements susceptibles d'émerger d'un travail collectif. En nous appuyant sur le fait que la confrontation à des situations complexes, à des incidents critiques joue un rôle dans les processus de construction de compétences professionnelles, nous avons décidé d'organiser un travail collectif axé sur le visionnement et l'analyse de moments problématiques extraits des cinq séances que nous avons pu filmer dans les classes des stagiaires suivis en 1999/2000. Les extraits ont alors été sélectionnés de manière à pouvoir amener les stagiaires à analyser un ensemble cohérent et consistant de problèmes didactiques.

A travers les différents extraits apparaissent les différents types de problèmes suivants :

- des problèmes liés à la problématisation de certains types de tâches pré-algébriques ou algébriques à deux niveaux de scolarité différents : l'introduction de la lettre en sixième, l'introduction des équations comme outil de résolution de problèmes en classe de quatrième,
- des problèmes liés à la prise en charge de certaines difficultés rencontrées par les élèves en algèbre que nous synthétisons dans le tableau suivant, construit en référence à la dimension cognitive de la grille d'analyse de la compétence professionnelle en algèbre :

La rupture arithmétique / algèbre	- les difficultés liées aux fausses continuités entre l'arithmétique et l'algèbre (cf. la séance de Nicolas) - la rupture au niveau des démarches de résolution de problèmes (cf. la séance de Romain et celle d'Alice)
Le symbolisme algébrique	- le sens des écritures algébriques (cf. la séance de Nicolas) - les difficultés de formation des écritures algébriques (cf. la séance de Nicolas) - les difficultés de manipulation des écritures algébriques (cf. les séances de Nicolas, Romain, Claire) - l'articulation entre registres sémiotiques (cf. les séances de Nicolas, Alice et Romain)
L'algèbre et la construction de la rationalité mathématique	- les différents rapports à la rationalité algébrique (cf. la séance de Benjamin)

- des questionnements relatifs aux responsabilités mathématiques à laisser aux élèves (cf. la séance de Benjamin).

L'étude des différents questionnements issus des discussions relatives aux cinq séances considérées fait apparaître que les stagiaires semblent tout à fait conscients du fait que certains aspects de l'enseignement de l'algèbre sont particulièrement problématiques et qu'ils doivent élaborer des solutions. Ceci apparaît notamment à travers une certaine réflexion relative à la problématisation de l'introduction de la lettre et des équations comme outil de résolution de problèmes au collège. Cette réflexion les a, en particulier, conduits à discuter la pertinence de certaines situations pour ces introductions.

Ces différents questionnements ont aussi fait apparaître une forte capacité à s'interroger sur les élèves pour prévoir les difficultés susceptibles d'être rencontrées ou les procédures pouvant être attendues. Relativement à ce point, nous avons pu noter une certaine difficulté à se distancier du niveau dans lequel ils ont effectué leur stage en responsabilité. Néanmoins, le croisement entre le regard de stagiaires qui enseignent à différents niveaux permet clairement d'enrichir les débats et d'approfondir certaines réflexions. Ainsi, l'échange de points de vue entre les enseignants de collège et ceux de lycée relativement aux procédures envisageables en classe de sixième pour simplifier l'expression "$(2n + 3n) \div 5$" a permis d'aborder la question du sens donné aux écritures algébriques par les élèves, question à laquelle certains stagiaires ne sont pas sensibles au cours de leur première année d'enseignement.

Par ailleurs, l'étude des profils de Benjamin, Marie, Claire et Julien a montré que certaines évolutions du rapport professionnel à l'algèbre s'expliquent par des logiques personnelles différentes. Un travail, tel que celui mené dans le cadre du dispositif complémentaire, permet un échange dans lequel différentes logiques personnelles apparaissent ce qui peut, là aussi, conduire à un approfondissement de la réflexion sur certains points. Ainsi, l'échange relatif à la séance de Romain a conduit à la confrontation de deux points de vue opposés entre Romain et Claire sur les responsabilités à laisser aux élèves lors d'une phase d'élaboration de techniques. Il nous semble que de tels conflits socio-cognitifs peuvent jouer également un rôle dans les évolutions éventuelles des rapports professionnels à l'algèbre d'enseignants débutants.

Enfin, soulignons que, dans le cadre d'une formation, différents éléments auraient pu être apportés pour enrichir les analyses spontanées et pour conduire les stagiaires vers des réflexions plus approfondies. D'une manière générale, il nous semble que des ouvertures en terme de formation sont permises par ce dispositif complémentaire. Nous y reviendrons dans la conclusion de cette thèse.

CONCLUSIONS, PERSPECTIVES

Des problèmes posés par la formation initiale des enseignants de mathématiques à l'IUFM nous ont conduite à nous intéresser à la constitution de pratiques professionnelles chez les professeurs débutants afin de déterminer quelles entrées, au niveau de la formation, seraient les mieux à même d'être efficaces, compte tenu des contraintes institutionnelles existantes. Pour ce faire, nous avons choisi d'étudier comment se construit, chez des enseignants stagiaires de mathématiques, un rapport professionnel à un domaine mathématique précis : l'algèbre élémentaire. Ce domaine est en effet central en mathématiques, l'accès au langage comme aux modes de pensée algébrique jouant un rôle clef dans l'avancée des connaissances mathématiques, comme dans les relations de cette discipline avec les autres sciences. Tous les professeurs stagiaires sont confrontés, au cours de leur année de stage, aux difficultés que pose aux élèves l'apprentissage de l'algèbre élémentaire, et aux problèmes didactiques qui en résultent. Parce que ce domaine leur est tout particulièrement familier, ils se trouvent d'autant plus confrontés au changement de point de vue, de rapport que requiert le passage de la position d'étudiant à celle d'enseignant.

L'étude de différents travaux issus de divers champs de recherche, que nous avons alors engagée nous a immédiatement montré la complexité des questions que nous voulions aborder. Cette complexité des questions relatives à la professionnalité enseignante s'y exprimait sous différentes facettes, en particulier les suivantes :

- la diversité des types de savoirs susceptibles d'outiller cette professionnalité,
- la difficulté que l'on éprouve à cerner les rapports existant entre des savoirs que l'on pourrait qualifier de théoriques et des savoirs plus pratiques,
- la connaissance très limitée que l'on a des processus par lesquels se constituent les compétences professionnelles qui se manifestent dans l'action de l'enseignant et dans sa réflexion sur ses pratiques,
- les rôles, enfin, que peuvent jouer dans cette constitution l'expérience et la formation.

Cette étude nous a aussi montré la diversité des questions qui se posaient, des questions qui restaient pour la plupart, encore aujourd'hui, malgré la multiplication des travaux, largement ouvertes. Nous avons alors décidé d'organiser notre recherche autour des questions suivantes qui nous semblaient a priori, à propos de la constitution de la professionnalité enseignante en algèbre, des questions cruciales : comment se construit et évolue la vision des enjeux de cet enseignement chez des professeurs stagiaires de mathématiques ? Comment se construit et évolue leur vision des élèves, de leurs difficultés, des obstacles qu'ils doivent surmonter ? Comment élaborent-ils des stratégies d'enseignement et quelles sont leurs priorités dans cette élaboration ? Comment analysent-ils leurs pratiques, les difficultés éventuelles qu'ils rencontrent, les décalages entre leurs attentes et la réalité de la classe ? Ces questions étaient ici posées à propos de l'algèbre, mais nous étions bien consciente que, même si notre étude se centrait sur ce domaine particulier, les réponses ne seraient que partiellement propres à ce domaine. La construction de la professionnalité en algèbre n'était pas une construction isolée. Elle interagissait avec la construction de la professionnalité dans d'autres domaines mathématiques, avec la construction de compétences professionnelles plus transversales.

Mais, même si nous reconnaissions bien le caractère transversal de beaucoup de compétences professionnelles, une première question se posait à nous : était-il possible de décrire, de caractériser la compétence professionnelle en algèbre, dans ce qu'elle avait de spécifique de ce domaine ? Nous nous sommes inspirée, pour approcher cette question, du travail réalisé par B. Grugeon, dans sa thèse. En effet, souhaitant caractériser les rapports à l'algèbre élémentaire développés dans deux institutions différentes : le lycée général et technologique d'une part, le lycée professionnel d'autre part, pour étudier les problèmes rencontrés par les élèves passant de l'enseignement professionnel à l'enseignement technologique, elle avait éprouvé le besoin de développer un instrument de référence, indépendant de ces deux institutions. Cet instrument avait pris la forme d'une grille multidimensionnelle d'analyse des compétences en algèbre élémentaire, et avait été ensuite utilisée pour étudier à la fois les rapports institutionnels et personnels à ce domaine. De manière similaire, il nous a semblé nécessaire, pour mener notre travail de recherche, de construire une grille d'analyse des compétences professionnelles en algèbre élémentaire. Cette grille serait elle aussi nécessairement multidimensionnelle et nous servirait de référence. Les questions relatives à l'enseignement et à l'apprentissage de l'algèbre ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux ces vingt dernières années et nous nous sommes appuyés sur ces travaux pour la construire. Nous avons choisi de la structurer autour de trois dimensions, non indépendantes, que nous avons qualifiées respectivement d'épistémologique, de cognitive et de didactique, pour rendre compte des centrations auxquelles elles correspondaient. Nous n'avons pas chercher à décrire, de façon exhaustive, la compétence professionnelle en algèbre élémentaire, pour chacune de ces dimensions, en admettant que cela soit même possible. Il nous a en effet semblé plus pertinent, d'un point de vue méthodologique, de choisir, pour chacune de ces dimensions, quelques points particulièrement significatifs, au vu des questions que nous nous posions, au vu aussi des hypothèses qu'il nous semblait raisonnable de faire sur le rapport à l'algèbre des enseignants débutants, et des changements que requérait, dans ce domaine, le passage de la position d'étudiant à la position d'enseignant, à la lumière des différentes recherches déjà menées sur l'algèbre comme sur les enseignants. Cet instrument, une fois élaboré, a eu pour nous le statut d'une grille de repérage, d'un outil nous aidant à situer la position initiale des professeurs stagiaires, à apprécier leurs évolutions, en prenant en compte la nécessaire multidimensionalité de celles-ci et la façon dont y interagissaient ces différentes dimensions.

Les questions que nous nous posions ne pouvaient être étudiées, nous en étions bien consciente, sans prendre en compte non seulement la diversité des savoirs susceptibles d'outiller la professionnalité enseignante en algèbre mais aussi la diversité des gestes à travers lesquels cette professionnalité va s'exercer. Ceci imposait donc le recueil de données de natures diverses, associées à ces différents gestes professionnels. De même, notre recherche devait prendre en compte que la professionnalité enseignante est quelque chose qui se construit dans la durée, avec des évolutions sans doute non homogènes suivant les différentes dimensions, les différents gestes, et souvent subtiles, délicates à saisir. Ceci imposait donc un travail fin et mené dans le long terme. Toutes ces raisons nous ont conduite à privilégier une méthodologie qualitative basée sur la triangulation de multiples sources de données, recueillies sur une longue durée. Le dispositif méthodologique essentiel de notre recherche a été en fait le suivi d'un groupe de professeurs stagiaires volontaires durant toute leur année de stage, à travers des entretiens réguliers, l'observation de séances filmées dans certaines classes, le recueil de données diverses (leurs notes personnelles, les textes de contrôle, des copies et des cahiers d'élèves...). Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre consacré à la méthodologie, nous n'avons cependant pas pu, dans ce travail de thèse, vu les limitations de temps et d'espace, exploiter la totalité du matériel que nous avions recueilli, comme nous l'avions pensé au départ. Nous avons donc choisi de nous centrer sur un niveau d'enseignement : la classe de seconde, et sur quatre stagiaires suivis exerçant à ce niveau, présentant des caractéristiques personnelles différentes et enseignant aussi dans des contextes différents. Avec l'espoir que ce premier travail de recherche nous permette ensuite d'aborder autrement l'analyse des autres suivis, avec d'une part l'ambition de mettre à l'épreuve les résultats issus du travail de thèse, d'autre part, une approche mieux instrumentée (et donc plus efficace), de la question de la dépendance du développement professionnel en algèbre par rapport au niveau de la classe en responsabilité.

Pour organiser l'étude de la constitution et l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre des quatre stagiaires suivis, nous avons en fait choisi deux axes principaux : l'étude de la vision des élèves et de leurs difficultés d'une part, l'analyse des stratégies d'enseignement de l'algèbre tout au long de l'année d'autre part. Mais, à travers le travail mené sur ces deux pôles, nous avons également été attentive à d'autres questions, en particulier, celle de la vision des enjeux de l'enseignement de ce domaine des mathématiques, celle des capacités des stagiaires à analyser leurs propres pratiques.

Dans cette thèse, pour rendre compte du travail de recherche et expliciter notre méthode d'analyse des différentes données recueillies lors des suivis individuels de ces quatre PLC2, nous avons d'abord présenté, de manière détaillée, le travail que nous avons mené pour étudier les pratiques de Benjamin, tout au long de l'année, chapitre après chapitre, entretien après entretien. Il nous a ensuite semblé nécessaire de remonter de la vision fine mais locale que les analyses faites nous fournissaient à un objet plus synthétique, plus lisible. Pour cela, nous avons cherché à identifier, dans le rapport professionnel à l'algèbre de Benjamin, quelques lignes de force par rapport auxquelles l'ensemble des analyses locales et de leurs résultats pourraient s'organiser. Ceci nous a conduit à la notion de profil, le profil nous permettant de rendre visibles les différentes cohérences repérées dans les pratiques de ce stagiaire tout au long de l'année, les évolutions observées et les raisons de ces évolutions.

C'est cette notion de profil que nous avons exploitée pour rendre compte des analyses menées relativement aux pratiques des trois autres PLC2 considérés dans cette thèse (Marie, Julien et Claire). Le travail a alors mis en évidence l'existence de régularités dans la constitution et l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre des quatre stagiaires. Il a également fait apparaître une grande diversité des profils et des évolutions. C'est autour de ces deux pôles : régularités d'une part, diversités d'autre part, que nous organiserons la présentation synthétique des résultats de la recherche, dans cette conclusion.

Les principales régularités émergeant de l'étude :

Une analyse croisée des quatre profils que nous avons élaborés dans cette thèse conduit à repérer des régularités relativement à la vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre, à celle des élèves et de leurs difficultés, aux stratégies d'enseignement.

La vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre :

L'analyse des pratiques de ces quatre stagiaires a clairement mis en évidence que, pour chacun d'entre eux, la vision de l'enseignement de l'algèbre est fortement centrée sur la dimension objet de ce domaine des mathématiques. Dans le travail algébrique proposé, ils donnent tous ainsi une place prédominante à la maîtrise de techniques de calcul. Toutefois, certaines fonctionnalités de l'algèbre sont reconnues dès le début de l'année : outil de résolution de problèmes numériques ou géométriques via la modélisation de ces problèmes sous forme d'équations ou d'inéquations, outil au service du travail sur les fonctions. Cette vision de la dimension outil de l'algèbre n'évolue en fait quasiment pas au cours de l'année et une fonctionnalité reste particulièrement occultée : l'algèbre comme outil de généralisation et de preuve. Ceci n'est a posteriori pas étonnant : leur vision de l'enseignement de l'algèbre ne fait que refléter en cela la culture dominante de l'enseignement de l'algèbre en France. Et l'on voit bien que le travail mené au cours de la formation didactique à l'IUFM, pour essayer de les rendre sensibles à la diversité des fonctionnalités de l'algèbre et en particulier à sa fonction d'outil de généralisation et de preuve, d'abord au début de l'année dans l'une des deux séances portant sur l'algèbre, puis au milieu de l'année dans le travail sur la démonstration, n'a pas suffi pour modifier leur conception initiale des enjeux de l'enseignement de l'algèbre.

Un deuxième point commun dans les profils de ces stagiaires relativement à la vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre est une difficulté certaine à articuler dans leur enseignement, de façon souple, les dimensions outil et objet de l'algèbre. Les problèmes où l'algèbre est exploitée dans sa dimension outil sont vus essentiellement comme des problèmes d'application, que l'on ne peut poser qu'en fin de chapitre, lorsque les techniques ont été "suffisamment" travaillées. Ils ne servent que rarement à introduire ou à motiver le travail algébrique. La situation bouge peu au fil de l'année, et l'on ne peut manquer d'y voir là aussi l'effet d'une culture dominante que la formation de deuxième année amène peut-être à questionner, mais sûrement pas à dépasser dans les pratiques.

La vision des élèves et de leurs difficultés :

L'étude de différents travaux de recherche relatifs à l'algèbre nous a conduite à identifier quelques points sensibles relatifs à l'apprentissage de l'algèbre par les élèves, que nous avons regroupés dans la dimension cognitive de la grille d'analyse de la compétence professionnelle en algèbre, selon trois composantes : la rupture arithmétique / algèbre, le symbolisme algébrique, l'algèbre et la construction de la rationalité mathématique. Un pointage systématique et un classement selon ces trois composantes des difficultés évoquées par les quatre professeurs stagiaires nous ont permis d'étudier l'évolution de leur vision des élèves et de leurs difficultés en algèbre.

Cette étude fait apparaître une autre régularité dans leur rapport professionnel en algèbre : en début d'année, leur vision est fortement centrée sur les difficultés relatives au système symbolique et plus particulièrement à la manipulation des écritures algébriques. L'étude d'entretiens que nous avons menés dans le cadre de cette recherche avec des étudiants préparant le CAPES montre qu'en réalité, avant de prendre une classe en responsabilité, les futurs enseignants ayant donné des cours particuliers ont déjà identifié précisément un certain nombre de problèmes rencontrés par les élèves lors de la manipulation d'expressions algébriques. En revanche, en début d'année, les PLC2 considérés dans la thèse ont une faible capacité d'analyse des erreurs et en restent le plus souvent à un niveau de constat. En fait, leur système explicatif s'organise principalement alors autour de l'explication suivante : les élèves ne connaissent pas correctement les règles à utiliser. Il s'y s'associe un système d'aides consistant à ré-expliquer les règles, à demander leur mémorisation et à les faire appliquer dans un nombre suffisant d'exercices pour que cette application se mécanise, devienne un réflexe.

Au cours de l'année, la vision des élèves et de leurs difficultés a évolué chez chacun de ces quatre stagiaires. Elle s'est accompagnée de la prise de conscience d'autres types de problèmes ainsi qu'une évolution de leur système d'analyse. Nous reviendrons plus loin sur les raisons de ces évolutions.

Les stratégies d'enseignement :

L'étude des stratégies d'enseignement a été menée dans le but de comprendre comment les quatre stagiaires les élaboraient, de repérer leurs priorités, de pointer les différents savoirs explicités dans la grille d'analyse de la compétence professionnelle, mis en jeu dans ces constructions, de constater la prise en compte des élèves lors de l'élaboration puis de la mise en œuvre de ces stratégies. Cette analyse a été menée selon deux axes : l'étude des praxéologies mathématiques et celle des praxéologies didactiques organisées par chaque stagiaire. Le questionnement relatif aux stratégies d'enseignement a également permis de pointer les différentes ressources didactiques utilisées par ces quatre PLC2.

Relativement à ce dernier point, il apparaît, comme l'on pouvait s'y attendre, que les manuels scolaires sont les ressources didactiques privilégiées. Notre étude a plus particulièrement montré que chacune de ces quatre personnes s'est appuyée en fait sur plusieurs manuels pour élaborer les différentes organisations mathématiques étudiées. Il s'agit clairement, pour nous, d'un héritage de la préparation au CAPES, en particulier celle relative à la deuxième épreuve orale pour laquelle les étudiants prennent l'habitude de rechercher dans différents manuels des exercices portant sur un thème donné. Ici, c'est plutôt pour l'élaboration du cours que les professeurs stagiaires mettent en compétition les différentes ressources, tandis que, pour des raisons de commodité évidentes, ils privilégient le manuel de la classe pour les exercices proposés aux élèves.

Une deuxième régularité relative aux stratégies d'enseignement concerne la mise en place au début de l'année d'organisations didactiques assez proches. En effet, dans les premiers chapitres essentiellement consacrés à un travail sur des objets déjà étudiés au collège, les quatre stagiaires ont mis en place des schémas didactiques relativement semblables : sans prendre d'informations sur les connaissances anciennes de leurs élèves, ils ont commencé par rappeler différents résultats ou techniques sans les justifier, puis ils ont proposé un ensemble d'exercices d'application. L'étude de ces derniers a mis en évidence une troisième régularité : en effet, dès les premiers cours, nous avons pu noter chez ces enseignants une réflexion intéressante relativement au geste professionnel "choisir des exercices pour travailler une technique". L'étude de leurs pratiques a montré une rigueur certaine lors de l'organisation du travail technique et une cohérence lors du choix des exercices, avec une prise en compte de différentes variables didactiques. Nous avons pu constater, par ailleurs, que trois d'entre eux ont eu très tôt le souci de proposer un travail se complexifiant progressivement et structuré de manière à favoriser l'appropriation des différentes techniques. Le dernier, Julien, a eu, quant à lui, plus de difficultés à passer de la position d'étudiant à celle d'enseignant et, de ce fait, a rencontré au début de son stage des difficultés pour doser le travail à proposer aux élèves et pour mettre en place une gestion qui favorise leur apprentissage. Mais, la prise en compte de différents conseils, dont ceux de sa tutrice, l'ont conduit à approfondir sa réflexion quant à la gestion de ce travail des techniques. Ses pratiques se sont alors fortement rapprochées de celles des trois autres. Ces caractéristiques du travail des techniques, communes aux quatre stagiaires, ont été retrouvées tout au long de l'année dans les pratiques de ceux-ci.

L'analyse croisée des profils met également en évidence un souci commun aux quatre stagiaires relativement à la différenciation entre le travail sur les objets anciens et celui sur les objets nouveaux. Tous ont, en effet, formulé à un moment de l'année le souci d'amener les élèves à découvrir les nouvelles notions ou propriétés avant l'institutionnalisation. Il y a là sans aucun doute un effet de la formation, tant à l'IUFM que sur le terrain. Mais, comme on l'a vu, à travers les analyses détaillées menées dans les chapitres précédents, la mise en œuvre de cette volonté ne va pas de soi, et ce d'autant plus qu'elle se situe au niveau du discours, sans être visiblement opérationnalisée par des moyens d'analyse permettant de distinguer, pour une tâche donnée, ce qui peut raisonnablement être laissé à la responsabilité des élèves et ce qui relèvera nécessairement de la responsabilité du professeur, et, encore moins bien sûr, des moyens leur permettant de faire bouger des tâches existantes ou de construire des tâches originales, pour rendre ce désir réaliste. Face à ces difficultés, les stagiaires vont cependant réagir différemment et nous reviendrons sur ce point dans l'étude des diversités repérées.

L'étude du rapport professionnel des quatre stagiaires considérés dans la thèse fait donc également apparaître une grande diversité entre les profils et leurs évolutions, et c'est cette diversité dont nous essayons de rendre compte de façon synthétique, dans le paragraphe suivant.

La grande diversité des profils des stagiaires et de leurs évolutions :

Nous avons pointé ci-dessus que la vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre chez les quatre PLC2 considérés était très proche au début de l'année et n'avait pratiquement pas évolué ensuite. En revanche, une réelle diversité apparaît lors de l'analyse croisée des quatre profils selon les deux autres axes : la vision des élèves et de leurs difficultés, l'élaboration des stratégies d'enseignement. Dans cette partie, nous nous proposons de synthétiser les différences repérées sur ces deux plans dans les profils. Soulignons cependant que les évolutions repérées dans les profils sont diverses et parfois assez subtiles. Elles n'apparaissent pas uniformément dans les différents gestes professionnels des stagiaires. Il est donc difficile d'en rendre compte de manière synthétique sans perdre de leur substance.

La vision des élèves et de leurs difficultés :

La diversité des profils relativement à la vision des élèves et de leurs problèmes en algèbre se traduit d'abord par une différence certaine au niveau du repérage de certains types de difficultés. Ainsi l'étude des entretiens avec Marie a montré que cette stagiaire a repéré de manière très précise des erreurs concernant la manipulation d'écritures algébriques ou liées à l'articulation de divers registres sémiotiques. Mais, lors de ces rencontres, elle n'a jamais évoqué, par exemple, de difficultés liées au sens des écritures algébriques ou d'autres difficultés rencontrées par les élèves lors de l'utilisation de l'algèbre pour prouver une propriété. L'étude des entretiens avec les autres stagiaires montre, en revanche, une plus grande diversité dans les types de difficultés repérées.

La diversité des profils apparaît aussi à travers les systèmes d'interprétation. Ainsi, nous avons pu observer que celui de Marie est toujours resté centré sur le fait que les difficultés de ses élèves étaient dues à un manque de connaissance des règles à appliquer. Parallèlement, nous avons pu noter chez les autres stagiaires des évolutions évidentes de leur système explicatif. Ainsi, on constate chez Benjamin une prise de conscience progressive des difficultés liées aux différents changements du statut de la lettre en algèbre et une intégration de cette dimension dans son système interprétatif. De même, chez Claire et Julien, nous avons pointé l'évolution de leurs réflexions sur le sens donné par les élèves aux écritures algébriques et l'évolution de leurs systèmes explicatifs qui en découle.

Enfin, la diversité des profils se repère à travers les prises en charge élaborées par les quatre professeurs stagiaires, qui dépendent bien sûr des différents systèmes d'interprétation élaborés. Pour Marie, dont le système interprétatif a peu évolué au cours de l'année, la prise en charge des difficultés susceptibles d'être rencontrées par les élèves se fait à travers la production d'un cours structuré, illustré par de nombreux exemples d'application directe des règles ou des méthodes étudiées et par un travail des techniques, cohérent et géré de manière à aider les élèves à s'approprier les différents résultats du cours. Comme nous l'avons signalé précédemment, ce souci d'un travail des techniques structuré et cohérent apparaît aussi chez les autres stagiaires. Mais, ce travail est complété par d'autres systèmes d'aides. Nous avons pu ainsi repérer chez Benjamin la mise en place très tôt d'une stratégie consistant à passer par des exemples numériques ou l'élaboration de situations spécifiques pour prendre en charge certains difficultés (par exemple, sa prise de conscience de l'existence d'erreurs dues au changement de statut de la lettre en algèbre l'a conduit à choisir, lors de l'introduction de la notion de fonction, une situation qui lui semblait particulièrement appropriée pour amener les élèves à découvrir la notion de variable). De même, Julien a mis en place assez rapidement un système d'aides basé sur l'articulation du registre des écritures algébriques avec celui des représentations graphiques.

On note donc, au-delà des régularités décrites dans la première partie sur ce plan, des différences qui émergent très tôt, tant au niveau du repérage des difficultés que des systèmes d'explications et d'aides associés. Et ces différences ont, comme nous l'avons montré, un effet en retour sur ce que les professeurs stagiaires vont apprendre sur leurs élèves à travers leurs pratiques ainsi que sur la façon dont ils vont tirer profit de la formation dispensée.

Les différences, comme nous l'avons souligné, concernent aussi les stratégies d'enseignement élaborées par les quatre PLC2. C'est ce point que nous abordons maintenant.

Les stratégies d'enseignement :

Comme nous l'avons précisé précédemment, les quatre stagiaires considérés dans cette thèse ont tous exprimé, à un moment ou à un autre, la volonté de proposer un travail spécifique pour les objets nouveaux, qui s'est caractérisée le plus souvent par l'introduction progressive d'activités préparatoires, en accord avec l'esprit des programmes actuels. Sur ce point, l'étude des pratiques de ces enseignants a alors montré des diversités évidentes dans l'exploitation de ces activités. Ainsi Marie a-t-elle progressivement introduit des activités de découverte pour l'introduction de notions nouvelles mais l'étude de ses cours a mis en évidence que le lien entre les activités et les résultats institutionnalisés était rarement visible. Julien, quant à lui, a également pris conscience de l'intérêt d'amener les élèves à découvrir des notions ou des propriétés avant de les institutionnaliser et, comme Marie, il a fait le choix de mettre en place des activités préparatoires. Comme elle, il n'a pas été attentif au départ à la nécessité d'établir un lien entre ces activités et le cours, mais progressivement nous avons pu observer une réelle évolution de sa réflexion relativement à l'exploitation des situations d'introduction proposées. Enfin, l'étude du profil de Claire a montré une volonté forte, dès le début de l'année, d'amener les élèves à travailler sur de telles activités et une attention particulière apportée à s'appuyer sur ces situations pour amener les élèves à conjecturer certains résultats du cours.

La diversité des profils apparaît également à travers les moments d'élaboration ou d'explicitation de techniques nouvelles. La comparaison des profils de Marie et de Claire fait ainsi apparaître, de fait, des visions complètement opposées. Marie n'organise pas de moment pour amener les élèves à découvrir ou élaborer de nouvelles techniques : elle garde à sa charge leur explicitation et semble peu soucieuse de proposer des éléments technologiques visant à justifier les techniques présentées. Cette conception de l'apprentissage de l'algèbre n'évoluera pas au cours de sa première année d'enseignement. En revanche, l'étude des pratiques de Claire a montré une réflexion très précoce concernant la place à laisser aux élèves lors des moments d'élaboration de techniques et la prise de conscience des biais d'un apprentissage de l'algèbre par automatisme. Notons, enfin, que l'étude des profils de Julien et de Benjamin a fait apparaître, elle aussi, des questionnements relatifs aux responsabilités à laisser à la classe. La volonté de laisser de telles responsabilités à ses élèves est apparue relativement tôt chez Julien. Mais les problèmes de gestion de classe rencontrés par ce stagiaire ne lui ont pas permis de mettre immédiatement en place des situations prenant en compte ce souci. L'évolution de ses pratiques donc été beaucoup plus progressive que celle de Claire. En revanche, pour Benjamin, ce questionnement est né en fin d'année et est resté ouvert. Cette différence au niveau des réflexions menées autour des responsabilités susceptibles d'être laissées aux élèves au cours d'une séance conduit à d'autres diversités relativement à certains gestes professionnels (la gestion d'exercices plus difficiles, par exemple) ou à certains moments didactiques (les moments de re-rencontre avec certains objets, par exemple).

Comme nous venons de le voir dans cette synthèse, le rapport professionnel à l'algèbre des quatre stagiaires a évolué de façon très différente. Notre recherche nous a permis de pointer des raisons qui, nous le pensons, permettent d'expliquer ces évolutions. Nous les synthétisons ci-dessous.

Des raisons qui expliquent les évolutions :

L'étude des quatre rapports professionnels à l'algèbre fait tout d'abord apparaître une possible influence des conditions de travail sur les évolutions repérées. Ainsi, Julien qui exerçait avec des élèves peu motivés par les mathématiques et rencontrant de nombreux problèmes s'est clairement plus interrogé que Marie, exerçant dans un milieu beaucoup plus favorable, sur les difficultés rencontrées par les élèves en algèbre et sur les prises en charge envisageables. Cette réflexion l'a, par ailleurs, conduit à développer un système interprétatif beaucoup plus approfondi que celui de Marie. Mais, il apparaît aussi clairement que le contexte dans lequel le stagiaire exerce ne suffit pas pour expliquer son évolution. En effet, Benjamin exerçait également dans un milieu plus favorable que celui de Julien et pourtant une caractéristique forte de son profil est l'attention particulière portée aux élèves et à leurs difficultés.

Les représentations métacognitives des stagiaires relativement aux mathématiques et à leur enseignement semblent également jouer un rôle sur les évolutions repérées. Notre travail n'était pas spécialement centré sur la détermination de ces représentations pour les stagiaires considérés, mais il nous a permis d'en pointer quelques éléments. Certaines caractéristiques des profils nous semblent ainsi avoir leur origine dans certains de ces éléments. Prenons, l'exemple de Claire pour qui l'enseignement des mathématiques doit s'accompagner d'un travail d'aide au développement d'une certaine autonomie des élèves face au travail. La forte volonté de donner certaines responsabilités à ses élèves, apparue dans son profil, s'explique certainement en partie par cet aspect de sa vision de l'enseignement des mathématiques.

Il semble également que certains incidents critiques jouent un rôle particulier sur les évolutions possibles du rapport professionnel à l'algèbre des enseignants débutants. Ceci est notamment apparu dans notre recherche lors de l'analyse des pratiques de Benjamin. Au cours de son année de stage, il a été notamment confronté à deux incidents critiques qui l'ont conduit à s'interroger d'une part sur les difficultés rencontrées par les élèves lors de l'utilisation de la lettre en algèbre, d'autre part sur les limites d'un apprentissage de l'algèbre par automatisme. Néanmoins, s'il est vrai que certains incidents peuvent éventuellement sensibiliser les stagiaires à certains problèmes, il n'est pas évident qu'ils permettent pour autant de construire des stratégies plus performantes.

Enfin, différents chercheurs insistent sur le fait que l'expérience seule ne suffit pas et que la construction de compétences professionnelles nécessite une certaine pratique réflexive. Ce point de vue semble renforcé par notre recherche. En effet, l'analyse des profils dressés dans le cadre de cette thèse montre une différence d'évolution entre Marie et les autres stagiaires. Or, l'analyse des entretiens de suivis avec cette personne a mis en évidence une certaine difficulté à prendre du recul par rapport à ses pratiques ou par rapport à certains conseils, à se placer dans une posture réflexive. En revanche, les trois autres stagiaires se sont montrés plus enclins à se placer dans une telle posture.

Ce questionnement sur le rôle joué par la réflexivité sur les évolutions dans le rapport professionnel à l'algèbre d'enseignants débutants nous a conduite à nous interroger a posteriori sur la méthodologie de notre recherche, comme nous le montrons dans la partie suivante.

Une interrogation sur la méthodologie :

Un objectif de notre recherche était de faire un pas de côté par rapport à la formation professionnelle initiale de professeurs stagiaires en mathématiques afin de déterminer quelles entrées seraient les mieux à même d'être efficaces, compte tenu des contraintes institutionnelles existantes. Pour ce faire, nous nous sommes placée dans la position d'observateur et avons essayé d'être le plus neutre possible lors des rencontres avec les stagiaires que nous avons suivis individuellement, ce afin d'éviter de les influencer. Mais, il est clair que cela n'a pas toujours été possible. Ainsi, lors de notre première rencontre avec Julien, il nous est apparu complètement démuni devant les problèmes qu'il rencontrait avec sa classe et demandeur de conseils. En tant que formatrice, il nous a été humainement impossible de ne pas répondre à ses questions ou de ne pas lui proposer de pistes pour le conduire à approfondir sa réflexion relativement à la gestion d'une classe. Nous tenons, toutefois, à pointer que l'analyse des entretiens individuels a été menée en prenant en compte nos interventions, en particulier celles qui nous semblaient avoir pu jouer un rôle sur les évolutions repérées relativement au rapport professionnel à l'algèbre des stagiaires considérés.

Néanmoins, il est évident que le simple fait d'amener un stagiaire à revenir sur ses pratiques au cours d'entretiens individuels, comme ceux menés dans le cadre de cette recherche, contribue à le placer dans une posture réflexive relativement à ses pratiques professionnelles en algèbre, posture qu'un stagiaire "ordinaire" n'aurait peut-être pas adoptée. Ceci a sans doute eu également quelque influence sur certaines évolutions repérées. Ainsi, lors du troisième entretien de suivi, Benjamin s'est exprimé sur l'évolution de sa vision de la lettre en algèbre, de ses différents statuts et a souligné alors le rôle sur cette évolution joué par nos discussions au cours des deux entretiens précédents. Or, l'analyse de ces entretiens montre qu'à aucun moment les changements de statut de la lettre en algèbre n'ont été évoqués.

Les résultats obtenus ouvrent, nous semble-t-il, à la fois des perspectives de recherche en didactique des mathématiques et des pistes de réflexion relativement à la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques. C'est à ces perspectives que nous souhaiterions nous intéresser dans la dernière partie de cette conclusion.

Quelques perspectives :

Des pistes de recherche :

Ce travail de thèse ouvre, selon nous, des pistes de recherche dans plusieurs directions. Les deux que nous envisageons ci-après se situent dans le prolongement direct du travail mené et la première nous semble aujourd'hui une priorité.

Dans le cadre de cette recherche, nous avons suivi individuellement onze PLC2 volontaires effectuant leur stage en responsabilité sur cinq niveaux d'enseignement différents, de la classe de sixième à celle de première S. Compte tenu des contraintes inhérentes à un travail de thèse, il nous a fallu effectuer des choix à propos des données que nous exploiterions précisément dans notre thèse. Différents choix étaient alors justifiables, mais il nous a semblé préférable de limiter les variations en optant pour l'étude des pratiques d'enseignants exerçant à un même niveau. L'enseignement de l'algèbre dans la classe de seconde nous a semblé tout à fait approprié à notre recherche puisque les professeurs y sont amenés à organiser à la fois le travail sur des objets algébriques déjà étudiés au collège, l'introduction de nouvelles tâches algébriques et l'entrée dans une nouvelle dimension de l'algèbre, celle d'outil au service des fonctions. Nous avons donc choisi d'étudier la constitution et le rapport professionnel à l'algèbre de quatre professeurs stagiaires exerçant en classe de seconde. Il nous reste encore de nombreuses données à analyser et nous envisageons de prolonger ce travail par l'analyse des pratiques de professeurs stagiaires enseignant en classe de quatrième. En effet, c'est à ce niveau que s'effectue officiellement l'entrée des élèves dans le monde de l'algèbre et dans cette classe les enseignants sont amenés à organiser un travail algébrique très différent de celui mené en classe de seconde. Il nous semble donc particulièrement intéressant de compléter cette recherche par cette nouvelle étude et, comme nous l'avons déjà souligné au début de cette introduction, nous le faisons dans des conditions qui nous semblent beaucoup plus favorables, outillée que nous sommes par les résultats de cette première recherche.

Notre recherche nous amène à pointer que certaines connaissances relativement à l'enseignement de l'algèbre se construisent difficilement lors de la première année d'enseignement. Ceci est notamment le cas pour des connaissances relatives au rôle joué par l'algèbre dans la construction de la rationalité mathématique. Il apparaît également qu'aucun des stagiaires considérés dans cette thèse n'a paru sensibilisé au fait que certains outils informatiques offrent des potentialités quant à l'enseignement de l'algèbre. Ceci conforte tout à fait une hypothèse introduite dans le deuxième chapitre. Il nous semble alors intéressant de prévoir un prolongement possible de cette thèse à travers l'étude de lieux ou de types de formation qui pourraient contribuer à favoriser l'usage des technologies informatiques dans le cadre de cet enseignement.

Nous avons évoqué deux prolongements possibles de cette recherche. Il en existe sans aucun doute bien d'autres. En particulier, le travail mené conduit inévitablement à des questions plus générales, comme celle de savoir jusqu'à quel point ce qui a été mis en évidence ici, à propos de l'algèbre élémentaire, se retrouve dans le développement de la professionnalité enseignante dans d'autres domaines, celle aussi de savoir si la démarche utilisée ici pour l'algèbre pourrait être exploitée pour d'autres domaines. Mais nous n'irons pas plus avant dans cette conclusion, dans la rubrique perspective, parce qu'une question tout aussi importante, sinon plus, nous semble être celle de savoir en quoi le travail que nous avons mené peut nous aider à penser les questions de formation qui étaient à l'origine de ce travail.

Des pistes pour la formation des enseignants :

Il apparaît que la formation didactique en algèbre, telle qu'elle a été dispensée en 1998/1999 et 1999/2000, a joué un rôle assez faible dans l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre des quatre professeurs stagiaires considérés. Les stagiaires y font peu référence spontanément dans les entretiens et, même quand cette formation a fait l'effort de les faire travailler sur des tâches précises, tout à fait exploitables en classe, de les faire réfléchir à des gestions possibles de ces tâches, elles sont assez peu exploitées. D'autre part, les stagiaires semblent insuffisamment armés par cette formation pour analyser des tâches, s'interroger sur les partages possibles de responsabilités dans leur résolution, pour les faire bouger éventuellement, pour penser l'interaction entre ce qui relève du bloc tâche-technique et ce qui relève du bloc technologico-théorique. Et ceci a des conséquences évidentes sur leur gestion de la classe, et leur fait prendre des risques très grands dès qu'ils veulent sortir des sentiers bien balisés. Il est clair que, de ce point de vue, la formation didactique manque d'efficacité. Pourtant, dans le même temps, on voit ces professeurs stagiaires évoluer et, pour la plupart d'entre eux, se poser des questions didactiques pertinentes, manifester des ambitions qui vont bien au-delà du seul fait que la classe tourne. On les voit aussi progressivement passer de constats et d'explications répandues, mais sommaires, à la construction de systèmes explicatifs plus élaborés. On les voit modifier la façon dont ils conçoivent l'aide à l'élève, s'interroger sur la cohérence globale de leurs pratiques, et découvrir le fait que des stratégies tentantes, parce productives à court terme, peuvent se révéler nuisibles à plus long terme. On les voit jouer de façon pertinente sur certaines variables didactiques, même s'ils n'en sont pas explicitement conscients, pour fabriquer des assortiments d'exercices. On les voit très certainement construire des compétences professionnelles tant en algèbre que de façon plus transversale, même si souvent ces compétences ne s'actualisent pas encore dans la réalité de la classe. On voit s'expliciter des questionnements qui sont des questionnements didactiques tout à fait pertinents. Ces questions, que l'on voit apparaître ici spontanément dans les entretiens ou dans le dispositif complémentaire, et qui pourraient motiver le travail didactique, apparaissent malheureusement beaucoup plus rarement en formation, où l'on a très souvent l'impression d'apporter des réponses à des questions que les stagiaires ne se sont pas posées, ou qui sont pour eux marginales. Et c'est sans doute un des défis que la formation doit relever : arriver à les faire émerger, puis travailler, en prenant en compte les savoirs qui permettront d'outiller ce travail, et en prenant acte du fait qu'il s'agit nécessairement d'un processus qui s'inscrit dans le long terme et ne saurait se réduire à l'année si fortement contrainte de la formation PLC2.

De ce point de vue, le dispositif complémentaire qui a été élaboré dans le cadre de cette thèse nous semble prometteur. Il a permis de travailler sur une réalité que les descriptions de pratique, qu'il s'agisse de pratiques de pairs ou de pratiques d'experts, servant souvent de base à la formation, sont impuissantes à restituer. Dans cette réalité, tous peuvent se reconnaître. De plus, les extraits choisis permettent d'attirer l'attention sur un ensemble cohérent et consistant de problèmes didactiques. Les réactions des stagiaires à ce dispositif sont particulièrement intéressantes et l'on perçoit bien le travail qui pourrait s'y amorcer avec l'aide du formateur. De plus, on voit ici comment se croisent les regards venant de stagiaires qui enseignent à des niveaux divers, et ce que permet ce croisement. Ceci contraste avec l'impression que donnent assez souvent les stagiaires en formation de s'engager a minima dans ce qui ne concerne pas leur propre niveau d'enseignement. Il s'agit là cependant de circonstances très particulières et il serait peu sérieux de vouloir faire dire à cet épisode de notre recherche plus qu'il ne le peut. Mais il montre clairement, nous semble-t-il, l'accessibilité des stagiaires à une certaine forme d'analyse didactique des pratiques et la pertinence des questionnements qui sont susceptibles d'émerger. Il n'en reste pas moins que, pas plus que les quelques séances sur l'algèbre de la formation suivie par ces PLC2, une séance ou deux de ce type ne peuvent suffire, compte tenu de tout ce qui précède, à soutenir un développement durable de la professionnalité enseignante en algèbre. La formation doit trouver les moyens de vivre dans la durée, et comme, contrairement à ce qui se passe dans d'autres pays, cette durée est inaccessible à la formation initiale, elle doit être pensée dans le cadre de la formation des néo-titulaires et de la formation continue.

BIBLIOGRAPHIE

ANTIBI A., BARRA R. (1995). *Math 2de*, Nouveau Transmath. Editions Nathan.

APMEP (1990). *Evaluation du programme de mathématiques, fin de troisième 1990*. APMEP, Paris.

APMEP (1991). *Evaluation du programme de mathématiques, fin de seconde 1991*. APMEP, Paris.

ARTIGUE M., ABBOUD M., DROUHARD J.P., LAGRANGE J.B. (1995). *Une recherche sur le logiciel DERIVE*. Cahier de DIDIREM spécial n°3, IREM Paris 7.

ARTIGUE M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18/2, 231-261.

ARTIGUE M. (2002). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques. In GUIN D., TROUCHE L. (eds), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Editions la Pensée Sauvage.

BALACHEFF N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves au collège*. Thèse d'état. Université Grenoble 1.

BEDNARZ N., KIERAN C., LEE L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching.* Kluwer Academic Publishers.

BEDNARZ N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, n°1:1 janvier 2001, 60-80.

BEN SALAH BREIGEAT C. (2001) *Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège à l'épreuve du feu : une étude de cas*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

BONNEFOND G, DAVIAUD D., REVRANCHE B. (1994). *Mathématiques seconde*, Collection Pythagore. Editions Hatier.

BONTEMPS G., BRABANT P., CARNEC H., GARDES D., KCZACZKOWSKI M., NOUET M., SEROUX R. (1994). *Mathématiques seconde avec modules*, Collection Fractale. Editions Bordas.

BOOTH L. (1985). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, n°5, 5-17.

BULLETIN INTER-IREM premier cycle (1992). *Des chiffres et des lettres au collège, 1991-1992*.

BULLETIN INTER-IREM second cycle (1993). *Maths en seconde : énoncés et scénarios*.

CHEVALLARD Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, n°5, 51-94.

CHEVALLARD Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, n°19, 43-72.

CHEVALLARD Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, n°23, 5-38.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 12.1, 73-111.

CHEVALLARD Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 17/3, 17-54.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 19 n°2, 221-266.

CHICK H., STACEY K., VINCENT J (Eds) (2001), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference The Future of the Teaching and Learning of Algebra.* University of Melbourne.

COLOMB J. (1995). *Calcul littéral, Savoirs des élèves de collège*. INRP Paris.

COMBIER G., GUILLAUME J.C., PRESSIAT A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !* INRP Paris.

COMITI C., GRENIER D., MARGOLINAS C. (1995) Niveaux de connaissances et phénomènes didactiques. In ARSAC G., GREA J., GRENIER D., THIBERGIEN A. (Eds) *Différents types de savoirs et leur articulation*, 93-127. Editions la Pensée Sauvage.

COMITI C., BALL D.L. (1996). Preparing Teachers to Teach Mathematics : A Comparative Perspective. In BISHOP et Al (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 1123 – 1153. Kluwer Academic Publishers.

COSTE R., DELARUELLE D., LE FOULGOCQ S., MISSET L. (1998). *Maths seconde*, collection Déclic. Editions Hachette éducation.

DOUADY R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil / objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7.2, 5-32.

DROUHARD J.P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

DROUHARD J.P. (1995). Algèbre, calcul symbolique et didactique. In NOIRFALISE R., PERRIN M.J. (Eds), *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques*, 325-344. IREM de Clermont-Ferrand.

DUPERRET J.C., FENICE J.C. (1999). L'accès au calcul littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège. *Repères IREM*, n°34, 29-54. Editions Topiques.

DUVAL R. (1988 a).Introduction aux problèmes de congruence. *Annales de didactique et de science cognitive*, n°1, 7-25. IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1998 b).Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. *Annales de didactique et de science cognitive*, n°1, 235-253. IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de science cognitive*, n°5, 37-65. IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (2002, à paraître). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. In DROUHARD J.P., MAUREL M. (Eds), *Actes des séminaires SFIDA*, volume IV. IREM de NICE.

GASCON J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée". *Petit x*, n°37, 43-63.

GASQUET S. (1992). *Homéopathie mathématique : Scriptum Algebricum*. CRDP de Grenoble.

GASQUET S. (1992*). Homéopathie mathématique : Equations – Réciproque - Graphique*. CRDP de Grenoble.

GASQUET S., CHUZEVILLE R. (1994*). Fenêtres sur courbes, une approche graphique de l'analyse mathématique*. CRDP de Grenoble.

GRAY E., TALL D.O. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Assisi, tome 2, 72-79.

GRUGEON B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves dans la transition entre deux cycles d'enseignement.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

GUIN D., DELGOULET J. (1997). *Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de seconde*. IREM de Montpellier.

GUIN D., TROUCHE L. (Eds). (2002). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Editions La Pensée Sauvage.

IREM de Poitiers (1987). *Calcul littéral au collège*. Compte-rendu de l'expérimentation des nouveaux programmes.

IREM de Rennes (1990). *Analyse des erreurs et des difficultés constatées dans les classes de seconde en calcul algébrique.*

IREM DE RENNES (1990). *Vers les équations.*

HERSCOVICS N., LINCHEVSKI L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Euducationnal Studies in Mathematics*, n°27, 59-78.

KAHANE J.P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques – Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques.* Editions Odile Jacob.

KIERAN C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. Douglas A.Grouws (ed), 390-419, New York Macmillan.

LE BOTERF G. (1999). *L'ingénierie des compétences*. Editions d'Organisation, Paris.

LEGRAND M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à la communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9.3, 365-406.

MARGOLINAS C., PERRIN M.J. (1997). Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 17/3, 7-16.

MARGOLINAS C. (1999). Une étude de didactique des mathématiques. Recherche de synthèse et perspectives. In BAILLEUL M. (Ed.), *Actes de la Xème école d'été de didactique des mathématiques*. Tome 1, 10-33. IUFM de Caen.

MASSELOT P. (2000). *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas)*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

MERCIER A. (1995). L'algébrique, une dimension fondatrice des pratiques mathématiques scolaires. In NOIRFALISE R., PERRIN M.J. (Eds), *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques*, 345-361. IREM de Clermont-Ferrand.

MEIRIEU P. (1989). *Enseigner, scénario pour un métier nouveau*. Editions ESF, Paris.

NAKATANI N., NASSIET F., PERRINAUD J.C., PORTE D., RIVOALLAN L. (1994) *Dimathème 2e*. Editions DIDIER.

NICAUD J.F. (1994). Modélisation en EIAO, les modèles d'aplusix. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 14/1.2, 67-112.

PAQUAY L., ALTET M., CHARLIER E., PERRENOUD P. (1996). *Former des enseignants professionnels. Quelles stratégies ? Quelles compétences ?* Editions De Boeck. Paris, Bruxelles.

PERRENOUD P. (1992). Quelle formation pour un métier nouveau ? *Educateur n°17*, 26-27.

PERRENOUD P. (1995). *La formation des enseignants entre théorie et pratique*. Editions L'Harmattan. Paris.

PERRENOUD P. (1996). Formation continue et développement de compétences professionnelles. *Educateur n°9*, 28-33.

ROBERT A. (1996). IUFM : Réflexion sur la formation professionnelle initiale des professeurs de mathématiques des lycées et collèges. *Repères IREM n° 23*, 83-108. Editions Topiques.

ROBERT A., ROBINET J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 16.2, 145-175.

ROBERT A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia n°15*, 123-157.

ROBERT A. (2001). Les recherches portant sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 21 n°1.2, 57-80.

RODITI E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Etude de pratiques ordinaires.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

ROGALSKI J. (2000). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Apport des concepts et méthodes de psychologie ergonomique pour l'analyse de l'activité de l'enseignant. In ASSUDE T., GRUGEON B. (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques – Année 2000*, 143-164. IREM Paris 7.

ROUSSELET M. (1996). *DERIVE – Classe. Faire des mathématiques au collège avec un logiciel.* Editions Archimède, Paris.

SCHUBAUER M.L. (1999) Les pratiques de l'enseignant en mathématiques. Modèles et dispositifs de recherche pour comprendre ces pratiques. In BAILLEUL M. (Ed.), *Actes de la X^{ème} école d'été de didactique des mathématiques.* Tome 1, 34-49. IUFM de Caen.

SHULMAN L.S. (1987). Knowledge and teachnig : foundations of the new reform. *Harvard Educationnal Review*, vol 57 n°1, 1-23.

SERFATI M. (1997) *La constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Thèse de doctorat. Université Paris 1.

SFARD A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Euducationnal Studies in Mathematics*, n°22, 1-36.

SFARD A., LINCHEVSKI L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. *Euducational Studies in Mathematics*, n°26, 191-228.

SUTHERLAND R. (2000). *A comparative study of algebra curricula.* Report prepared for the Qualifications and Curriculum Authority. University of Bristol.

TERRACHER P.H., FERRACHOGLOU R. (1998). *Math 2de*, Collection Pyramide. Editions Hachette éducation.

TERRACHER P.H., FERRACHOGLOU R. (1994). *Math seconde*, Collection Terracher. Editions Hachette éducation.

TIROSH D., EVEN R., ROBINSON N. (1998) Simplifying algebraic expressions : teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, volume 35 n°1, 51-64.

TOCHON F.V. (1995). *L'enseignant expert.* Editions Nathan Pédagogie.

VEGNAUD G. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 259-288. Editions la Pensée Sauvage.

ANNEXES

TABLE DES MATIERES

Annexe n° 1 : Bibliographie constituee de documents utilises par les formateurs PLC2 en didactique des mathematiques de l'IUFM de Reims

GREM (groupe de réflexion sur l'enseignement des mathématiques). (1988). *Sur l'introduction du calcul littéral.*

Publications INRP :

COLOMB J. (Ed.) (1995). *Calcul littéral. Savoirs des élèves de collège.* INRP, Paris.

COMBIER G., GUILLAUME J.C., PRESSIAT A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !* INRP Paris.

Publications IREM :

IREM de Poitiers (1987). *Calcul littéral au collège.* Compte-rendu de l'expérimentation des nouveaux programmes.

IREM de Rennes (1990). *Analyse des erreurs et des difficultés constatées dans les classes de seconde en calcul algébrique.*

IREM de Rennes (1990). *Vers les équations.*

Bulletin Inter-IREM premier cycle (1992). *Des chiffres et des lettres au collège, 1991-1992.*

Bulletin Inter-IREM second cycle (1993). *Maths en seconde : énoncés et scénarios.*

Revue Petit x :

Petit x n°5 (1984). Spécial calcul algébrique. IREM de Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, n°5, 51-94.

CHEVALLARD Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, n°19, 43-72.

CHEVALLARD Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, n°23, 5-38.

GASCON J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée". *Petit x*, n°37, 43-63.

CRDP de Grenoble :

GASQUET S. (1992). *Homéopathie mathématique : Scriptum Algebricum.* CRDP de Grenoble.

GASQUET S. (1992). *Homéopathie mathématique : Equations – Réciproque - Graphique*. CRDP de Grenoble.

<u>Algèbre et nouvelles technologies :</u>

CAPPONI B. (1992). Désignation dans un tableur et interaction avec les connaissances - algébriques. *Petit x*, n°29, 57-88. IREM de Grenoble.

ROUSSELET M. (1996). *DERIVE – Classe. Faire des mathématiques au collège avec un logiciel*. Editions Archimède, Paris.

<u>Thèses :</u>

GRUGEON B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves dans la transition entre deux cycles d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

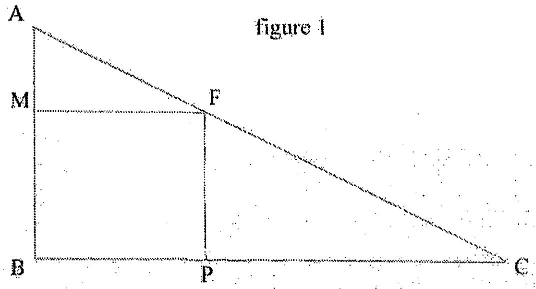
ANNEXE N° 2 : EXEMPLES DE TACHES ALGEBRIQUES AYANT FAIT L'OBJET DE L'EVALUATION NATIONALE MENEE A L'ENTREE EN SECONDE EN SEPTEMBRE 1998

Ne rien écrire dans cette colonne

Dans tout l'exercice, l'unité de longueur est le centimètre et l'unité d'aire est le centimètre carré.
Le triangle ABC est rectangle en B, de plus **AB = 4** et **BC = 8**.
Un point **F** représente la position **d'une fourmi qui se déplace sur le segment [AC] sans atteindre les points A et C**.

Le point F se projette orthogonalement en M sur le segment [AB] et en P sur le segment [BC].

figure 1



Première partie

1° Déterminer la valeur exacte de :

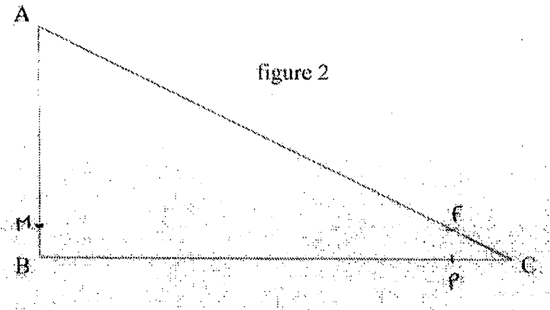
a) la longueur AC ; | 1 6 9 0 | 14

b) l'aire du triangle ABC. | 1 9 0 | 15

2° Dans cette question, **AM = 3,5.**

a) Compléter la figure 2 avec les points M, F et P. | 1 9 0 | 16

figure 2



b) Démontrer que MF = 7.
(la qualité de la rédaction sera évaluée). | 1 9 0 | 17

| 1 6 9 0 | 18

c) Calculer l'aire du rectangle MFPB. | 1 9 0 | 19

Ministère de l'éducation nationale, de la recherche et de la technologie — Direction de la programmation et du développement (DP&D)

Deuxième partie

Ne rien écrire dans cette colonne

On se place dans le cas général de la figure 1 et on note x la longueur AM.
On a donc **AM** = x.

1° a) Démontrer que MF = $2x$. | 1 6 9 0 | 20

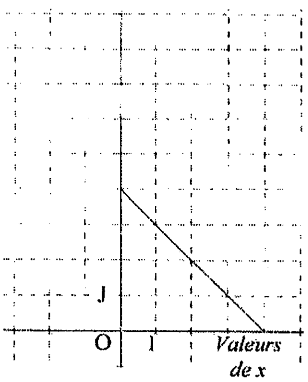
b) Démontrer que l'aire du rectangle MFPB est $2x(4-x)$. | 1 9 0 | 21

2° Compléter le tableau ci-dessous : | 1 9 0 | 22

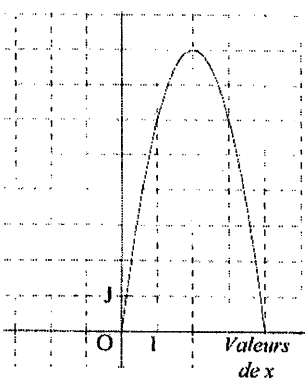
AM	0,25	0,5	1	1,5	1,75	2,5	3	3,95
BM	3,75		3	2,5	2,25	1,5		0,05
aire du rectangle MFPB	1,875		6	7,5	7,875	7,5		0,395

3° Sur chacune des figures ci-dessous, un graphique est tracé dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; I, J).

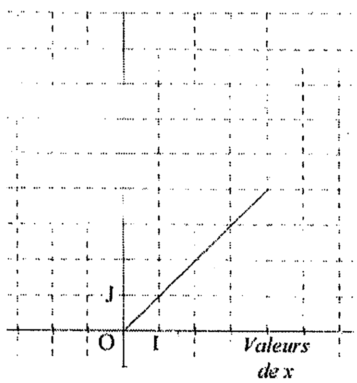
graphique n°1



graphique n°2



graphique n°3



Compléter le tableau suivant : | 1 6 9 0 | 23

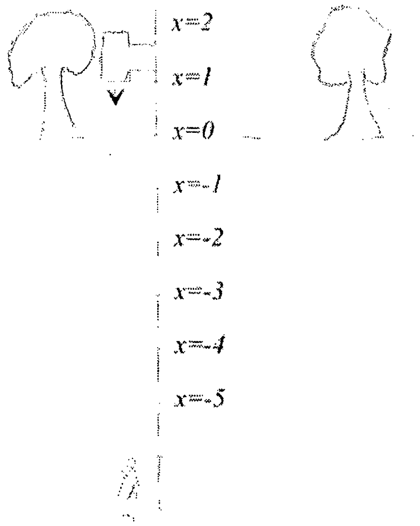
	la longueur AM	la longueur BM	l'aire du rectangle MFPB
est représentée en fonction de x par le graphique n°			

4° En utilisant l'un des résultats des questions précédentes, indiquer la valeur de x qui semble donner au rectangle MFPB la plus grande aire. | 1 6 9 0 | 24

Ministère de l'éducation nationale, de la recherche et de la technologie Direction de la programmation et du développement (DP&D)

Exercice 4 : Science fiction

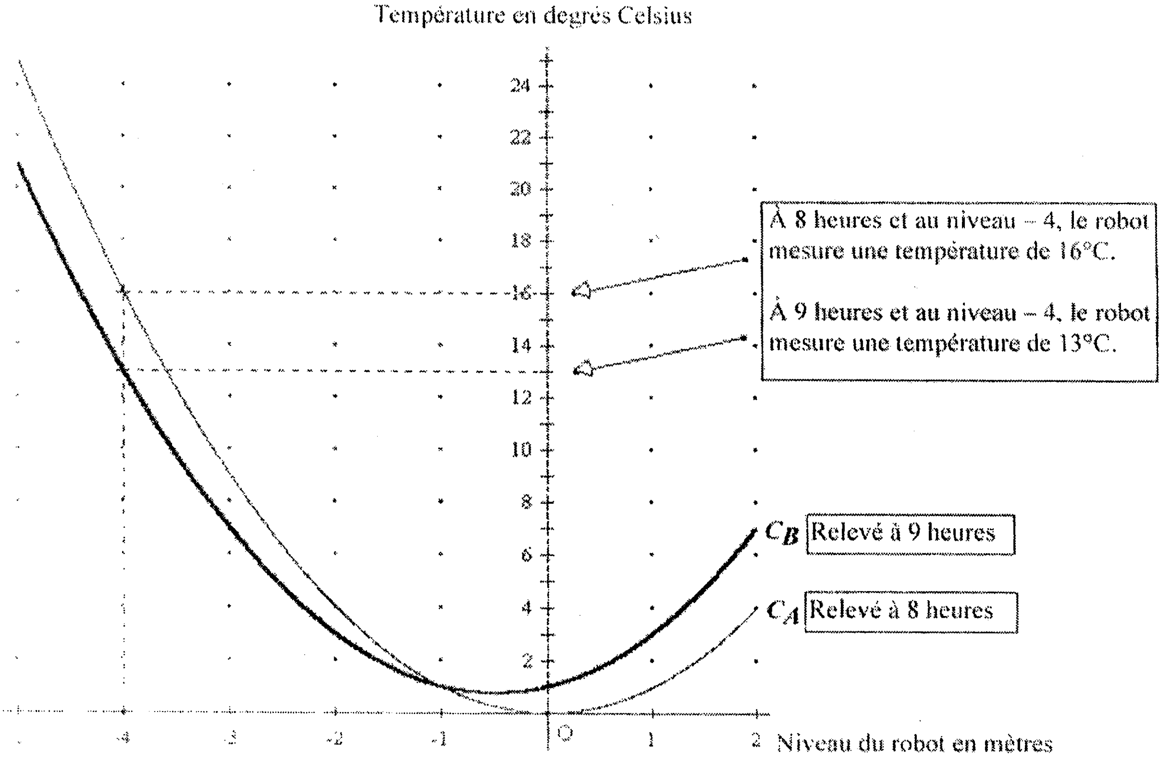
Le 2 novembre 2998, dans le Nord de la France, un objet non identifié mais brûlant tombe du ciel. En touchant le sol, il s'enfonce de 7 mètres provoquant dans l'environnement des variations de température.
Un robot, qui coulisse à très grande vitesse sur un rail vertical en direction de l'objet, effectue des relevés de températures en continu à partir d'une hauteur de 2 mètres au-dessus du sol et jusqu'à une profondeur de 5 mètres.
On note x le niveau du robot, en mètres ($-5 \leq x \leq 2$).



Deux séries de mesures sont effectuées :

- l'une à 8 heures du matin qui permet de tracer une première courbe notée C_A ;
- l'autre à 9 heures du matin qui permet de tracer une seconde courbe notée C_B.

Le graphique ci-dessous présente ces deux courbes de températures.



Ne rien écrire dans cette colonne

1° a) Quand le robot est au niveau – 2, déterminer graphiquement la température :

- à 8 heures ;
- à 9 heures.

1 9 0 | 25

b) À un niveau x donné, on appelle :

- A la température relevée à 8 heures ;
- B la température relevée à 9 heures.

Par lecture graphique, compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs de A et de B :

1 9 0 | 26

niveau x	– 4	– 1	0	1,5
A				2,25
B				4,75

c) La température relevée à chaque niveau est-elle plus haute à 9 heures qu'à 8 heures ?
Entourer la réponse qui convient : OUI NON
Justifier.

1 2 9 0 | 27

2° On admet que la température relevée s'exprime, en fonction du niveau x du robot,

- à 8 heures par : $A = x^2$;
- à 9 heures par : $B = x^2 + x + 1$.

a) Résoudre l'inéquation : $B < A$ (d'inconnue x).

1 3 6 9 0 | 28

b) Ce résultat est-il cohérent avec le graphique ? Expliquer.

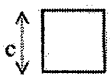
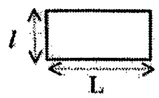
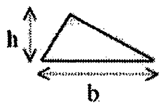
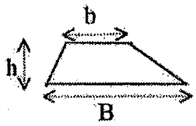
1 9 0 | 29

ANNEXE N° 3 : EXEMPLES DE TACHES ALGEBRIQUES AYANT FAIT L'OBJET DE L'EVALUATION NATIONALE MENEE A L'ENTREE EN SECONDE EN SEPTEMBRE 1999

Exercice 1

Voici quelques rappels éventuellement utilisables pour la deuxième partie :

- *L'aire de chaque figure est notée A :*

Carré	Rectangle	Triangle	Trapèze
			
$A = c^2$	$A = L \times l$	$A = \dfrac{b \times h}{2}$	$A = \dfrac{(B+b) \times h}{2}$

Première partie

1° Développer $(x-6)^2$. [1 2 9 0] 1

2° a) Développer et réduire $36-(x-6)^2$. [1 2 7 9 0] 2

b) Factoriser $36-(x-6)^2$. [1 2 7 9 0] 3

c) Résoudre $36-(x-6)^2=0$. [1 6 9 0] 4

3° a) Résoudre $(10-x)(x-2)=0$. [1 4 9 0] 5

b) Développer et réduire $(10-x)(x-2)$. [1 2 9 0] 6

4° Calculer $-x^2+12x$ pour $x=10$. [1 6 9 0] 7

Deuxième partie

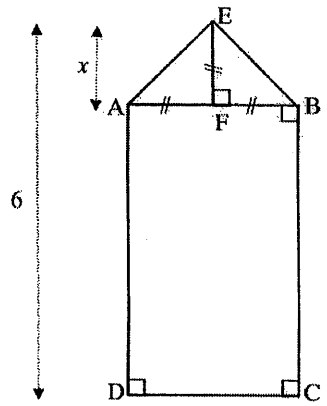
Les mesures sont données en centimètres .

On considère la figure géométrique codée ci-contre où :

EF = AF = BF,

AD + EF = 6.

On pose **EF =** x où x **est un nombre compris entre 0 et 6.**



1° Ecrire la longueur AD en fonction de x.

1 9 0
8

2° On note $\mathcal{A}$ l'aire de la figure EADCB. Démontrer que $\mathcal{A} = -x^2 + 12x$.

1 2 9 0
9

1 9 0
10

3° On se propose de déterminer la longueur EF pour que l'aire de la figure soit de 20 cm².

a) Quelle équation faut-il poser ?

1 9 0
11

b) Une des questions de la première partie permet de résoudre cette équation.

1 4 9 0
12

Entourer le numéro de cette question dans le tableau suivant.
(*On rappelle que x est un nombre compris entre 0 et 6*).

1°	2°	3°	4°

c) En déduire la longueur EF recherchée.

1 4 9 0
13

Exercice 3

Ne rien écrire dans cette colonne

Rappels de quelques règles :

R_1 *La somme de deux nombres positifs est un nombre positif.*

R_2 *La somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif.*

R_3 *Le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif.*

R_4 *Le produit de deux nombres de signes contraires est un nombre négatif.*

R_5 *Le carré d'un nombre est un nombre positif.*

R_6 *Deux nombres opposés ont des signes contraires.*

Dans le tableau suivant, **x est un nombre quelconque non nul :**

- cocher l'affirmation qui convient ;
- justifier la réponse, en se référant éventuellement aux règles ci-dessus et aux exemples donnés dans le tableau.

Signe de	positif	négatif	cela dépend	justification	
x^2	×			d'après R_5.	
$-2x^2$		×		d'après R_5 et R_4.	
$7x$			×	pour $x = 2$, on a $7x = 7 \times 2$ donc $7x = 14$; pour $x = -1$, on a $7x = 7(-1)$ donc $7x = -7$; 14 est positif et -7 est négatif.	
$(-5x)^2$					1 6 7 9 0 (24)
$-5x$					1 2 6 8 9 0 (25)
$x^2 + 4$					1 3 6 7 9 0 (26)
$x^2 - 4$					1 6 7 9 0 (27)
$-x$					1 2 8 9 0 (28)

ANNEXE N° 4 : PLANNING DE LA FORMATION DIDACTIQUE PLC2 POUR L'ANNEE 1999/2000

		Matin	Après-midi
1	1/09		Entrée dans la classe, première heure, première semaine
2	9/09	Groupe d'échanges Travail sur les programmes. Comparaison de progressions possibles	Algèbre (1)
3	16/09	Algèbre (2)	Groupe d'échanges Préparation d'un chapitre
4	23/09	Groupe d'échanges géométrie plane	Lancement de l'opération séquence
5	14/10	Informatique pédagogique (1)	Informatique pédagogique (1)
6	21/10	Groupe d'échanges L'évaluation	Proportionnalité, linéarité
7	28/10	Informatique pédagogique (2)	Informatique pédagogique (2)
8	10/11	Optionnel : analyse d'une vidéo de Salomé	Mémoire (1)
9	18/11	Groupe d'échanges Gestion de la classe	Utilisation du rétroprojecteur
10	25/11	Groupe d'échanges Statistiques	Retour de l'opération séquence
11	1/12 2/12	Poitiers (Futuroscope)	Poitiers (Futuroscope)
12	20/01	Preuve et démonstration (1)	Mémoire (2)
13	3/02	Groupe d'échanges Examen des sujets du rallye RMCA	Géométrie dans l'espace (1)
14	2/03	Observation de la passation des épreuves du rallye, analyse	Mémoire (3)
15	23/03	Groupe d'échanges Calculatrice numérique	Calculatrices graphiques
16	30/03	Géométrie dans l'espace (2)	Erreurs et obstacles
17	27/04	Activités sur un thème	Preuve et démonstration (2)
18	25/05	Analyse d'une séquence vidéo	Bilan

ANNEXE N° 5 : GRILLE DE PREPARATION D'UNE SEANCE ELABOREE COLLECTIVEMENT LORS DU LANCEMENT DE L'OPERATION SEANCE EN 1999/2000

Objectifs de la séance :
- Quels sont-ils ?
- Quels sont les pré-requis nécessaires ?
- Où se situe la séance dans la progression ?

Organisation de la séance :
- Définir le rythme (temps de recherche, ...).
- Définir le dispositif : groupe ou classe entière

Contenu :
- Choix de l'activité.
- Choix du support : livre ou fiche.

Difficultés rencontrées par les élèves :
- Comment y remédier ?
- Prévoir leur questions.

Organisation de la mise en commun :
- Qui corrige ? (Le prof ou les élèves)
- Comment on corrige ? A l'oral ? A l'écrit (tableau ou rétro)

Bilan :
- Sur le cahier : écrire au tableau ou amener un poly.
- Choisir ses exemples et contre-exemples.
- Bien synthétiser le cours (être clair).

Exercices d'application :
- Choisir les exercices faits en classe, à la maison,.
- Choisir les exercices d'application directe, de recherche, pour introduire une notion nouvelle.

Critères de réussite d'une séance :
- Respecter la gestion du temps.
- Participation et motivation des élèves.
- Type de questions posées par les élèves.
- Etre capable de repérer les élèves en difficultés.
- Réussite des exercices proposés.

ANNEXE N° 6 : LISTE DES PROBLEMES ETUDIES PAR LES STAGAIRES LORS DE LA PREMIERE SEANCE DIDACTIQUE CONSACREE A L'ALGEBRE

Problème 1 : J'ai choisi un nombre entier x. Je l'ai multiplié par 4 et j'ai ajouté 2. J'ai trouvé 30. Que vaut x ?

Problème 2 : On borde un carré de côté n par une bordure de carrés de côté unité. Combien y a-t-il de carrés de côté unité sur cette bordure ?

Problème 3 : Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculatrice. Ils affichent sur cette calculatrice le même nombre. Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7. Quand ils ont fini, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent le même résultat. Peut-on savoir quel nombre ils ont affiché au départ ?

Problème 4 : Deux nombres ont pour somme 300. De combien augmente leur produit si j'augmente chacun d'eux de 7 ?

Problème 5 : On place sur un segment [AB] un point M. Où placer M pour que le produit des deux longueurs AM et BM soit maximum ?

Problème 6 : On borde un carré de côté entier par une bordure de carrés de côté unité. Peut-on avoir sur la bordure 20 carrés, 50 carrés, 100 carrés ?

Problème 7 : Le périmètre d'un rectangle est de 80 cm. La longueur mesure 20 cm de plus que la largeur. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Problème 8 : Plusieurs enfants se réunissent pour acheter un ballon de football. Chacun doit payer 20 F. Au dernier moment, trois d'entre eux ne peuvent payer et chacun des autres doit payer 5 F de plus. Trouver le prix du ballon.

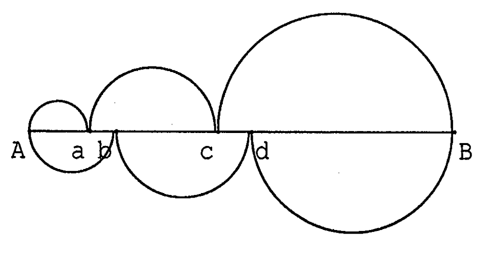
Problème 9 : Un cycliste part de Barèges pour monter au Tourmalet. A l'arrivée, il constate qu'il a roulé à une vitesse de 15 km/h. Pas très satisfait, il voudrait arriver à une vitesse moyenne aller-retour de 30 km/h. A quelle vitesse moyenne doit-il rouler pendant la descente : 45 km/h, 60 km/h, 90 km/h, une autre vitesse ?

Problème 10 : On considère trois entiers consécutifs. Au carré du nombre du milieu on retranche le produit des deux nombres extrêmes. Que constate-t-on ? Comment le justifier ?

Problème 11 : Construire un triangle équilatéral ABC de hauteur 6 cm. Placer un point M à l'intérieur du triangle et construire ses projetés orthogonaux : E, F et G sur les trois côtés du triangle. Mesurer pour évaluer ME + MF + MG. Recommencer avec d'autres positions de M. Que conjecturez-vous ? Comment le prouver ?

Problème 12 : Vrai ou faux ? La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Problème 13 : Pour aller de A à B, on peut suivre le segment [AB] ou passer par les demi-cercles. Lequel des trois chemins est le plus long ? Et si on change la position des points a, b, c et d ?



ANNEXE N° 7 : ENSEMBLE DES ACTIVITES ETUDIEES PAR LE SOUS-GROUPE COLLEGE EN 1998/1999

Quels sont les enjeux de l'algèbre dans chacune des activités suivantes ?

Associer chaque activité à un niveau donné.

Activité 1 :

Des égalités... de toutes sortes...

A) $25 - 4 = 3 \times 4$

B) $2a \times 3b = 6\,ab$

C) $13 + 4 = 21 - 5$

D) $AB^2 + BC^2 = AC^2$

E) $10 + x = 4x$

F) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$

G) $3(x - 1) = 4$

H) $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

I) $AB + BC = AC$

J) V désigne le volume du cylindre de révolution de hauteur 4, r désignant le rayon de la base $V = 4\,\pi\, r^2$

K) $xy + x = (1 + y)x$

Quel classement proposes-tu ? D'après quels critères ?

Activité 2 :

Organiser une suite de calcul en une seule ligne :

Samedi après-midi, au supermarché, Julien a acheté 4 pâtisseries à 7,20 F, un lot de 5 stylos à 7,50 F, 3 cahiers identiques, de même prix. On lui a rendu 43 F lorsqu'il a donné son billet de 100 F à la caissière.

1 – Que cherche-t-on à savoir quand on effectue :

$$A = 100 - 43\ ;\ B = 7{,}20 \times 4\ ;\ A - (B + 7{,}50)\ ?$$

2 – Pour calculer le prix d'un cahier, lequel de ces calculs écrits en une seule ligne te semble donner la réponse correctement ?

$$E = 100 - 43 - 7{,}20 \times 4 + 7{,}50 : 3$$
$$F = 100 - (43 - (7{,}20 \times 4) + (7{,}50 : 3))$$
$$G = [(100 - 43) - ((7{,}20 \times 4) + 7{,}50)] : 3$$
$$H = (100 - 43) - (7{,}20 \times 4) + (7{,}50 : 3)$$

Relier chaque expression à sa valeur numérique

$(3 + 3) \times (3 - 3)$	9
$(3 + (3 \times 3)) - 3$	3
$3 + ((3 \times 3) - 3)$	0
$(3 \times 3) - (3 + 3)$	6

Activité 3 :

1 – A ton avis, quand on écrit $25 = 4^2 + 3^2$, que veut-on mettre en évidence :

a – que l'addition des carrés de 4 et de 3 donne 25 comme résultat ?

b – que le nombre 25 est un carré ?

c – que le nombre 25 est la somme de deux carrés ?

2 – Qu'indique l'écriture $(1 + 2 + 3)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

3 – La lettre n désigne un nombre entier naturel. Chaque égalité de la colonne de gauche est traduite en français dans la colonne de droite : remplacer les pointillés par la lettre a, b, c, d ou e qui convient :

$a = n(n + 1)$	... est un nombre pair
$b = 2n + 1$	... est le produit de deux entiers consécutifs
$c = 2n$	...est le produit de deux entiers pairs consécutifs
$d = (2n + 1)(2n + 3)$	...est le produit de deux entiers impairs consécutifs
$e = 2n(2n + 2)$	... est un nombre impair

Activité 4 :

Qu'est-ce qu'une solution d'une équation ? Vrai ou faux ?

- Le nombre – 1 est une solution de l'équation : $2xx + 2 = 0$
- N'importe quel nombre est une solution de l'équation $y - 1 = 1 + y$
- Aucun nombre n'est solution de l'équation : $2x + 3 = 2(x + 1)$
- Le nombre 7 est une solution de l'équation : $v + 3 = 2v - 8$
- N'importe quel nombre est solution de l'équation : $0 \times a = 0$
- Le nombre 4 est la solution de l'équation $b^2 = 16$. Il ne peut pas y en avoir d'autre.
- L'équation $x + 2y = 2$ n'a qu'une solution : le couple de valeurs (1 ; 0,5)

Ces équations ont chacune une solution. Associer les équations qui ont la même solution :

$2x + 3 = 5x$	$2(x + 9) = 4x$	$2X + 12 = 5x + 9$
$5x - 1 = x$	$3 = 3x$	$x = 0{,}25$
$x + 9 = 2x$	$4x = 1$	$9 = x$

Pour résoudre un problème, on peut souvent le traduire par une équation :

- Voici trois problèmes :

Problème 1 : histoire d'âge	Problème 2 : A pied ou à mobylette	Problème 3 : Pas si bête que ça
Laëtitia a 15 ans. Sa mère a 40 ans. Quel est le nombre x d'années dans lequel l'âge de la mère sera le double de celui de sa fille ?	Pour s'entraîner au marathon, Bernard part faire un footing à la vitesse de 15 km/h. Son frère David veut le rejoindre en mobylette. Il part deux heures plus tard et roule à la vitesse de 40 km/h. Quel temps x, en heures, mettra-t-il pour le rattraper ?	Un âne porte 15 sacs de farine et 2 kilogrammes de pommes. Un mulet porte 2 sacs de farine et 40 kilogrammes de pommes. L'âne souffle fort. "De quoi te plains-tu ?", dit le mulet, "nous portons la même charge". Quelle est la masse x, en kilogrammes, d'un sac de farine ?

- Voici des équations :

Equation A : $15x + 2 = 2x + 40$

Equation B : $15 (x + 2) = 40x$

Equation C : $40x - 15 = 2$

Equation D : $40x - 15 = 2(x + 15)$

Parmi ces quatre équations, une seule ne traduit aucun des problèmes. Dites de quelle équation il s'agit.

- Redonner alors son équation à chaque problème, puis déterminez chaque réponse.

Activité 5 :

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : "Tu penses à un nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7". L'affirmation est-elle vraie ?

Activité 6 :

Acte 1 : Transmission de programmes

Groupe 1 : Voici un programme de calcul :

Prendre un nombre quelconque ; Calculer son double ; Retrancher 1 ; Multiplier par 3 ; Retrancher 2

Consigne :

1 – Exécuter ce programme avec 1 comme nombre de départ ; puis recommencer avec 4 ; puis avec 25. Garder les trois résultats.

2 – Traduire ce programme de calcul sous la forme d'une expression algébrique, puis donner uniquement l'écriture algébrique à votre correspondant du groupe 2 (il devra la faire fonctionner avec les mêmes valeurs que précédemment).

Groupe 2 : Voici un programme de calcul :

Prendre un nombre quelconque ; Calculer son triple ; Ajouter 1 ; Multiplier par 5 ; Ajouter 4

Consigne :

1 – Exécuter ce programme avec 1 comme nombre de départ ; puis recommencer avec 4 ; puis avec 25. Garder les trois résultats.

2 – Traduire ce programme de calcul sous la forme d'une expression algébrique, puis donner uniquement l'écriture algébrique à votre correspondant du groupe 2 (il devra la faire fonctionner avec les mêmes valeurs que précédemment).

Acte 2 : Transmission de formules

Groupe 1 : $\frac{4-3x}{2}+1$; $3(2x-1)+5$

Groupe 2 : $\frac{6x+2}{5}$; $5(2x-4)+3$

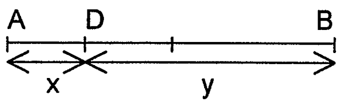
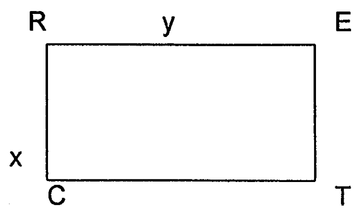
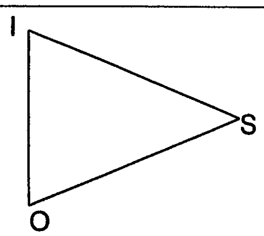
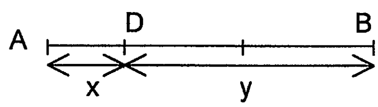
Emetteur : ……….. Récepteur : ………..	Groupe : ……….. Groupe : ………..
Emetteur : La formule que nous proposons :	
Récepteur : avec cette formule : Avec 1 on obtient	
Avec 4 on obtient	
Avec 25 on obtient	

Emetteur : ……….. Récepteur : ………..	Groupe : ……….. Groupe : ………..
Emetteur : Le programme que nous proposons :	
Récepteur : Avec 1 on obtient	
Avec 4 on obtient	
Avec 25 on obtient	

Activité 7 :

Les quatre calculs suivants correspondent aux quatre questions posées sous les dessins :

$$x + y \times 2 \ ; \ (x + y) \times 2 \ ; \ x + \frac{y}{2} \ ; \ \frac{x + y}{2}$$

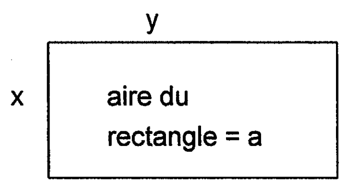
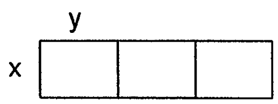
 M est le milieu du segment [AB]. Quelle est la longueur du segment [AM] ?	 Quel est le périmètre du rectangle RECT ?
IS = OS = y IO = x Quel est le périmètre de ISO ? 	 M est le milieu du segment [DB]. Quelle est la longueur du segment [AM] ?

a – Associer chaque question au calcul qui lui convient.

b – On donne x = 1,8 et y = 3 (en centimètre). Calculer les quatre réponses aux quatre questions.

c – Vérifier que les expressions ci-dessous donnent le même résultat que deux des précédentes : $x \times 2 + y \times 2$; $x : 2 + y : 2$.

Activité 8 :

Dans cette situation…		… la formule	V/F
 périmètre du rectangle = p	… x est donné par …	$\frac{a}{2} - y$ $p - \frac{y}{2}$ $a : y$ $\frac{p-y}{2}$ $a - 2y$ $\frac{p}{2} - y$	
Le grand rectangle est constitué de 3 rectangles identiques accolés. Aire totale = a Périmètre du grand rectangle = p 	… x est donné par …	$p - 3y$ $a : y \times 3$ $p : 6$ $\frac{a}{3y}$ $\frac{p}{2} - 3y$ $a : y$	

Calculer x dans chacune des 2 situations, avec la formule de votre choix, sachant que :
Situation 1 : a = 360 cm² ; y = 30 cm ; p = 84 cm
Situation 2 : a = 360 cm² ; y = 15 cm ; p = 106 cm.

ANNEXE N° 8 : ENSEMBLE DES EXERCICES ETUDIES PAR LE SOUS-GROUPE COLLEGE EN 1999/2000

Exercice A : L'enfer du jeu...

Hier Marcel jouit au poker avec les dangereux Alfred et Joël. Au début de la partie, il possédait 260F. Il ne se rappelle plus quelle somme il a gagnée ou perdue au premier tour du jeu, mais au $2^{ème}$ tour, il a gagné 150F. Au troisième tour il a perdu 320 F, et au suivant il a gagné 180 F. Il possédait alors 160 F après ce dernier tour... Combien a-t-il gagné, ou perdu, au premier tour ?

1 – On a appelé x le gain ou la perte que l'on cherche. Compléter la traduction commencée ci-dessous :

... + x + ... + ... + ... = ...

2 – Résoudre cette équation. Que s'est-il passé au premier tour ?

Exercice B :

Pour exprimer le périmètre de ce polygone en fonction de x, Eric, Elodie, Marc ont écrit :

- Eric :

x + 2 + x + 3 + 5 + x + 2 + 5 + x + x + x + 3 + x + x

- Elodie :

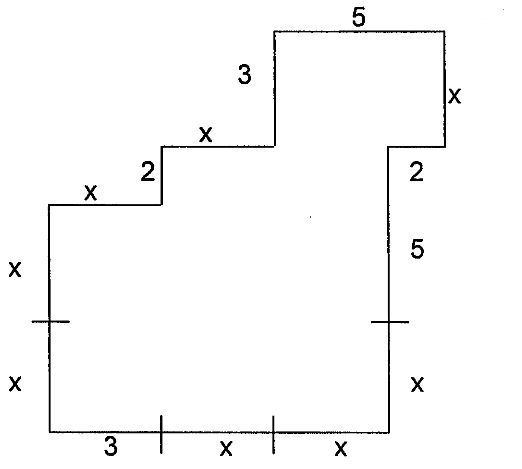
8x + 20

- Marc :

4 × (2x + 5)

1 – Ces expressions sont-elles égales ? Si oui, prouvez-le.

2 – Calculer ce périmètre pour x = 1, puis pour x = 4, puis pour x = 20.



Exercice C :

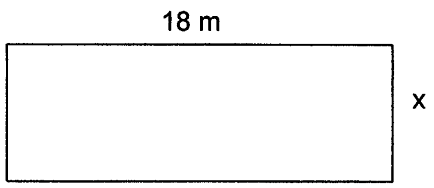
Compléter l'expression " 3 ... 3 ... 3 ... 3 " avec une ou plusieurs des 4 opérations, et des parenthèses, de façon à obtenir tous les nombres de 0 à 10.

Exercice D :

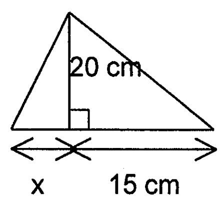
Pour chacun de ces problèmes :

- Ecrire le programme de calcul qui donne l'aire de la figure.
- Analyser l'ordre des opérations, puis écrire le calcul de la dimension inconnue x.

L'aire de ce rectangle est 45 m².
Calculer la longueur x



L'aire de ce triangle est 200 cm².
Calculer la longueur x.



Exercice E :

Lucie a calculé les expressions " x × x " et " 2x " pour x = 0, puis pour x = 2.
Elle conclut : l'expression " x × x " est égale à l'expressions " 2x ".
Etes-vous d'accord ? Expliquez.

Exercice F :

Samedi après-midi, au supermarché, Julien a acheté 4 pâtisseries à 7,20 F, un lot de 5 stylos à 7,50 F, 3 cahiers identiques, de même prix. On lui a rendu 43 F lorsqu'il a donné son billet de 100 F à la caissière.

1 – Que cherche-t-on à savoir quand on effectue :

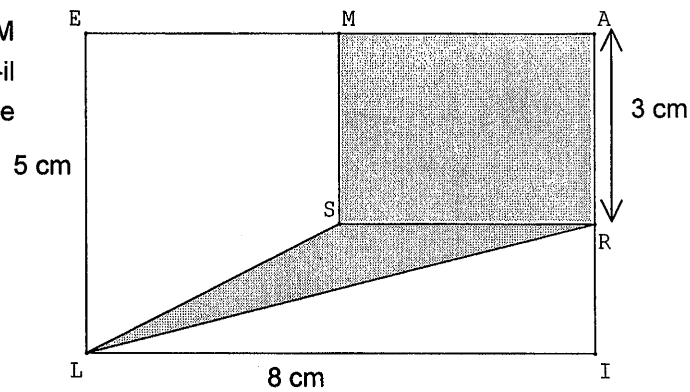
A = 100 – 43 ; B = 7,20 × 4 ; A – (B + 7,50) ?

2 – Pour calculer le prix d'un cahier, lequel de ces calculs écrits en une seule ligne te semble donner la réponse correctement ?

E = 100 – 43 – 7,20 × 4 + 7,50 : 3
F = 100 – (43 – (7,20 × 4) + (7,50 : 3))
G = [(100 – 43) – ((7,20 × 4) + 7,50)] : 3
H = (100 – 43) – (7,20 × 4) + (7,50 : 3)

Exercice G :

AILE et MARS sont deux rectangles. Le point M est situé sur [EA]. A quelle distance de A faut-il placer le point M pour que l'aire de la surface colorée soit la moitié de celle du rectangle ?



Exercice H :

Marcel doit dicter un exercice de calcul à son camarade Albert, absent hier au collège :
" Calculer : 30 + 2 × 5 ; 30 + 2 × 7 ; 30 + 2 × 11 ; 30 + 2 × 15 ; 30 + 2 × 18 ; 30 + 2 × 21,5 "
Comment Marcel pourrait-il raccourcir le message ? (C'est à dire éviter de dicter exactement ce qui est écrit ?).

ANNEXE N° 9 : DOCUMENT PRODUIT PAR LES FORMATEURS SUITE A LA DEUXIEME SEANCE DE DIDACTIQUE DE L'ALGEBRE AVEC LE SOUS-GROUPE COLLEGE EN 1999/2000

Le but de la séance avec ce sous-groupe était de déterminer et d'étudier les enjeux de l'enseignement de l'algèbre au collège. Cette étude a commencé par l'analyse de deux situations, extraites de l'ouvrage "Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre ! " de l'INRP[1]. Puis nous avons étudié un ensemble d'exercices d'algèbre proposés à une classe de cinquième. Enfin nous avons terminé par un travail sur les enjeux de l'enseignement de l'algèbre.

I – PREMIERE SITUATION : L'INTRODUCTION DE LA LETTRE EN SIXIEME ET EN CINQUIEME :

I.1 - Choix du thème :

A l'école primaire, les lettres ne sont utilisées qu'en géométrie. A partir de la sixième, les élèves sont amenés à utiliser des lettres dans d'autres cadres. Par exemple, elles permettent de généraliser les propriétés des opérations dans le cadre numérique. Puis elles apparaissent dans le cadre algébrique avec les équations.

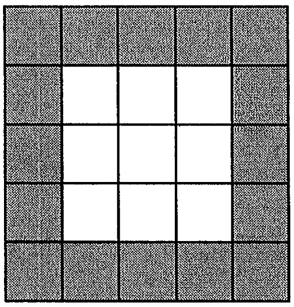
Contrairement à ce que l'on pourrait croire, l'utilisation de la lettre est loin d'être naturelle pour ces élèves et nécessite un travail initial d'introduction et d'appropriation.

Dans l'ouvrage cité ci-dessus, deux activités d'introduction de la lettre en classe de sixième et en classe de cinquième sont présentées. Lors de cette séance sur l'algèbre, nous avons travaillé sur la situation proposée pour la classe de sixième. Dans les sous-paragraphes suivants, nous allons résumer l'analyse de cette activité faite par les auteurs de l'ouvrage.

I.2 – Description d'une activité proposée en classe de sixième :

I.2.a – Présentation du problème :

Le problème consiste à établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés d'une figure construite sur le modèle ci-dessous, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.



I.2.b – Potentialités de cette situation :

Cette situation a pour objectif principal d'amener les élèves à produire et à exploiter des formules qui expriment une procédure de calcul. Les auteurs ont choisi ici de se placer dans une situation simple afin de faciliter l'appropriation du problème par les élèves. Toutefois, il est intéressant de remarquer que ce problème ne se réduit pas à l'écriture d'une formule déjà connue des élèves (aire ou périmètre par exemple). Cette activité conduira les élèves dans un véritable travail de recherche. En outre, notons que le choix du support géométrique permet une validation des solutions par les élèves eux-mêmes.

---

[1] Gérard Combier, Jean-Claude Guillaume, André Pressiat (1996) : " Les débuts de la lettre au collège. Au pied de la lettre ! ". INRP, Paris.

Ce problème va également amener un travail sur l'articulation entre le langage naturel et le langage algébrique. L'écriture des formules peut, en effet, se dérouler en deux temps avec les élèves de sixième . On peut dans un premier temps demander aux élèves de décrire une méthode de calcul dans le langage naturel puis ensuite demander l'écriture d'une formule.

Au cours de cette activité, les élèves ne sont guidés ni dans le choix de la procédure de calcul, ni dans le choix des lettres à utiliser. Il est donc possible d'envisager une certaine variété dans les formules produites par les élèves. Cette variété permettra de travailler sur la non-unicité du choix des lettres et sur la non-unicité des formules produites pour un même choix de lettre. On pourra toutefois montrer aux élèves que même si des formules semblent différentes, elles peuvent être équivalentes (lorsqu'on remplace dans chacune d'elles les lettres par un même nombre, on obtient toujours le même résultat).

Avec une telle activité , il est également envisageable de travailler sur les règles de syntaxe des expressions algébriques, aussi bien au niveau de la formation des écritures algébriques (sixième, cinquième) qu'au niveau de leur traitement (quatrième). On peut également traiter le problème de l'inversion d'une formule (quatrième).

Enfin, afin d'exploiter de telles formules, il est possible d'envisager certains prolongements tels que :

- Est-il possible que le nombre de carreaux hachurés soit égal à 1024 ? Si oui, quel doit être le nombre de carreaux du côté du carré ?

- Quel est le plus petit carré pour lequel le nombre de carreaux hachurés dépasse 2000 ?

I.2.c – Scénario envisageable en classe de sixième :

Les auteurs décrivent un scénario qui s'est déroulé en quatre phases :

- phase 1 : appropriation du problème par les élèves

Cette phase se décompose en deux étapes. Les élèves doivent dans un premier temps déterminer le nombre de carreaux hachurés pour un carré de 5 carreaux de côté. La validation des résultats se fait par comptage direct sur le dessin. Puis, on demande aux élèves de calculer le nombre de carreaux hachurés dans un carré de 37 carreaux de côté. En augmentant la dimension du carré, on rend fastidieux le comptage direct sur le dessin . Ceci incite donc les élèves à utiliser des stratégies de calcul. La phase de recherche est suivie d'une mise en commun des différentes procédures et d'une validation des résultats par comptage sur une figure affichée.

- phase 2 : formulation d'une méthode de calcul

On cherche dans cette phase à faire généraliser aux élèves les méthodes de calcul qui ont été présentées lors de la mise en commun dans la phase 1. Les élèves, mis en groupe de quatre, reçoivent alors la consigne suivante : « Vous venez d'utiliser une méthode pour calculer le nombre de carreaux hachurés quand le côté du carré compte 37 carreaux ; maintenant vous allez décrire cette méthode, en une ou plusieurs phrases, pour qu'elle permette de calculer le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré construit sur le même modèle. ».

- phase 3 : mise en évidence des différentes procédures de calcul

Le travail de la phase 2 est suivi d'une mise en commun des productions des différents groupes. Lors de cette mise en commun, les élèves doivent déterminer les formulations correctes et regrouper celles qui correspondent à une même méthode de calcul. Cette phase permet la mise en évidence de plusieurs méthodes de calcul et la possibilité de formuler différemment une même méthode.

- phase 4 : passage d'une formulation à une autre

Il s'agit ici de faire travailler aux élèves le passage du langage naturel aux registres des écritures algébriques. Les élèves travaillent de nouveau en groupe et reçoivent la consigne suivante :

« On cherche maintenant à écrire un calcul du nombre de carreaux hachurés qui serait vrai pour tous les carrés. Quand les mathématiciens sont confrontés à ce genre de problème, ils donnent un nom au nombre de carreaux sur le côté du carré ; ils l'appellent par exemple n (n désigne un nombre). Et ils écrivent leur procédé de calcul en n'utilisant que la lettre n, des symboles (+ ; − ; × ; :), des parenthèses et des nombres. Vous allez devoir traduire votre méthode en un calcul respectant les règles d'écriture qui sont celles des mathématiciens, sans utiliser de mot. »

Ce travail est suivi d'une mise en commun des différentes formules. Leur validation se fait en référence avec les formulations reconnues comme correctes dans la phase 3 et en référence aux règles d'écritures mathématiques.

Cette mise en commun met en évidence les points suivants :

- une lettre remplace n'importe quelle valeur numérique ;
- une même méthode de calcul peut être formulée différemment ;
- les formules écrites, tout en étant différentes, sont équivalentes (ceci est montré en substituant un même nombre dans les différentes formules).

II - LA MISE EN EQUATION EN CLASSE DE QUATRIEME :

La deuxième situation étudiée concerne l'introduction des tâches de mise en équation en classe de quatrième.

II.1 - Analyse des programmes :

Les auteurs de l'ouvrage commencent leur étude par une analyse des programmes de collège de 1985. A propos des équations du premier degré à une inconnue les auteurs relèvent les points suivants :

- en sixième, l'équation est une égalité à trou,
- en cinquième, le trou est remplacé par une lettre et les problèmes à résoudre aboutissent à une équation de la forme $ax = b$ ou $a+x = b$, que les élèves doivent savoir résoudre. Les auteurs notent alors que ces problèmes se résolvent facilement par l'arithmétique. Les manipulations sont donc perçues par les élèves comme un nouvel habillage de la démarche arithmétique. Les élèves ne voient pas alors l'intérêt de la démarche algébrique,
- en quatrième, les problèmes posés peuvent conduire à des équations où l'inconnue figure dans les deux membres ($ax+b = cx+d$). La démarche arithmétique devient alors difficile voire impossible. Il existe donc une véritable rupture entre la classe de cinquième et la classe de quatrième.

Ces remarques sont encore valables pour les programmes en vigueur actuellement dans les classes.

II.2 - Présentation d'une activité de mise en équation en classe de quatrième :

II.2.a - La stratégie d'enseignement des auteurs :

Les auteurs ont décidé de centrer l'introduction de la mise en équation d'un problème autour de deux grands axes :

- révéler aux élèves les limites de la résolution arithmétique,
- mettre l'accent sur la mise en équation.

En ce qui concerne le premier axe, les auteurs ont cherché à amener les élèves à accepter une autre approche qu'arithmétique de la résolution de problèmes. Pour cela, ils ont proposé des problèmes dont les énoncés ne présentent pas de difficulté de compréhension et qui permettent de réinvestir des procédures du type essais et corrections successifs. En jouant sur le choix des nombres donnés dans l'énoncé, il est possible de rendre une démarche arithmétique de plus en plus difficile, voire impossible. La résolution algébrique trouve alors sa justification.

En outre, dans cette situation, les auteurs ont voulu dissocier les deux étapes "mise en équation" et "résolution de l'équation". En effet les élèves concernés ne maîtrisent pas plus la technique de résolution des équations qu'ils ne dominent la mise en équations. La charge de travail serait trop lourde si l'on demandait aux élèves d'assumer ces deux tâches. Toutefois le travail ne peut se limiter à l'écriture d'équations : les élèves risqueraient d'être frustrés de ne pas connaître la solution du problème posé. Les auteurs ont donc décidé de mettre à la disposition des élèves un logiciel de calcul formel qui fournirait les solutions des équations produites. Ce logiciel produit un message d'erreur dans le cas où l'expression fournie n'est pas une équation avec une forme correcte. Notons qu'il est également envisageable d'utiliser certaines calculatrices (la TI 92, par exemple) pour un tel travail.

Un but de cette activité est donc d'amener les élèves à dégager des questions qu'ils doivent se poser lors de la résolution d'un problème :

- des questions relatives au choix de l'inconnue, des inconnues : y a-t-il plusieurs choix possibles pour l'inconnue ? L'inconnue est-elle explicitement désignée dans l'énoncé ou seulement suggérée ? ... On pourrait compléter cette liste par les questions : faut-il utiliser des inconnues auxiliaires ? Quelles sont les relations entre les différentes grandeurs inconnues ?

- des questions relatives à la mise en équation : faut-il coordonner l'utilisation d'informations de sources différentes : texte, dessin, graphique, connaissances extérieures à l'énoncé ? La mise en équation est-elle immédiate, par simple traduction des relations présentes dans l'énoncé ? Nécessite-t-elle une reformulation de certaines relations avant de pouvoir les traduire en écritures littérales ? ...

- des questions relatives aux solutions des équations écrites : sont-elles des réponses au problème posé ?

II.2.b - Enoncé du problème proposé :

Au cours de cette situation, le texte des problèmes reste le même, seules les données numériques évoluent. Voici le texte du premier problème :

Enoncé 1 :
Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu.
Bertrand lui multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

II.2.c - Déroulement de cette activité :

Trois séances sont consacrées à cette situation.

Lors de la première séance, l'enseignant lit l'énoncé 1 aux élèves. Après une recherche individuelle de 10 minutes, l'enseignant organise une mise en commun afin d'exposer les différentes procédures utilisées par les élèves. Notons qu'une telle mise en commun permet aux élèves qui n'auraient pas produit de réponse de s'inspirer des procédures présentées pour la suite de l'activité.

Une observation des solutions proposées montre que les élèves ont majoritairement cherché la solution par tâtonnements (la nature de la solution du problème, le nombre 3, facilite ce genre de procédure). Peu d'élèves ont écrit des équations.

Suite à ce travail, le professeur lit un deuxième énoncé :

Enoncé 2 :
Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 2 puis retranche 5 au résultat obtenu.

Bertrand lui multiplie le nombre affiché par 5 puis ajoute 1 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Le but est d'amener ses élèves à réinvestir les procédures décrites dans la première partie de la séance. Mais, par rapport au problème 1, la nature de la solution du problème (le nombre –2) est changée. Ceci introduit une difficulté supplémentaire.

L'organisation du travail est la même que pour le problème 1. L'observation des solutions proposées montre que les élèves ont réussi à adapter les procédures arithmétiques mises au point lors de la résolution du premier problème. Certains ont, par exemple, remarqué que lorsqu'on choisit des nombres positifs, l'écart entre les résultats trouvés par Alice et Bertrand croît. Cette observation les a conduits à tester des nombres négatifs.

L'enseignant termine cette première séance en proposant l'étude d'un troisième problème:

Enoncé 3 :
Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 4 puis ajoute 3 au résultat obtenu.
Bertrand lui multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 8 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

L'objectif est d'amener les élèves à affiner leurs stratégies. Notons que dans ce nouveau problème la nature de la solution est de nouveau changée (il s'agit du nombre 2,5).

Le but de la deuxième séance est d'amener les élèves à percevoir les limites des procédures numériques de résolution et d'introduire la mise en équation d'un problème.

Dans un premier temps, l'enseignant propose l'étude du problème suivant :

Enoncé 4 :
Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 2,1 puis retranche 0,4 au résultat obtenu.
Bertrand lui multiplie le nombre affiché par 1,3 puis ajoute 0,1 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

L'utilisation du même énoncé permet un réinvestissement des procédures utilisées dans la première séance. Mais les nombres ont été choisis de telle sorte que le problème ait une réponse décimale accessible (0,625) mais longue à obtenir.

L'observation des solutions proposées montre que seuls les élèves disposant de la technique de résolution avec des équations ont trouvé la réponse à ce problème.

Lors de la mise en commun, le professeur présente aux élèves le logiciel qui pourra les aider dans la résolution des équations écrites.

Lors de la deuxième partie de la séance, l'enseignant distribue aux élèves l'énoncé 4 dont la question a été modifiée :

Enoncé 4 :
Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 2,1 puis retranche 0,4 au résultat obtenu.
Bertrand lui multiplie le nombre affiché par 1,3 puis ajoute 0,1 au résultat obtenu.

Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ? Ecris une équation à partir de laquelle la machine puisse te donner le nombre qu'ils ont affiché au départ.

L'observation des élèves montre qu'ils ont presque tous introduit des lettres.

Voici quelques exemples d'équations écrites par les élèves :

$$\boxed{\begin{array}{c} x \times 2,1 - 0,4 = y \\ x \times 1,3 + 0,1 = y \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x \times 2,1 = y - 0,4 = z \\ x \times 1,3 = y + 0,1 = z \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a = x \times 2,1 - 0,4 \\ b = x \times 1,3 + 0,1 \end{array}}$$

$$\boxed{y \times 2,1 - 0,4 = y \times 1,3 + 0,1 = x}$$

$$\boxed{x \times 1,7 + 1,4 = z}$$

$$\boxed{y = x \times 2,1}$$

$$\boxed{x \times 2,1 - 0,4 = x \times 1,3 + 0,1}$$

$$\boxed{\ldots \times 2,1 - 0,4 = \ldots \times 1,3 + 0,1}$$

La troisième séance a pour buts de :

- mettre en évidence des règles d'écriture d'une équation du premier degré à une inconnue,
- repérer, parmi les expressions proposées par les élèves, celles qui sont une traduction mathématique correcte du problème.

Cette séance se déroule en quatre temps. Le travail s'effectue à partir d'un document polycopié où figurent les expressions proposées par les élèves et les réponses fournies par le solveur.

Dans un premier temps, les élèves étudient les réponses fournies par l'ordinateur qui sont de quatre types :

- une lettre affectée d'une valeur,
- deux lettres affectées chacune d'une valeur,
- une lettre exprimée en fonction d'une autre,
- un message d'erreur.

Dans un deuxième temps, les élèves doivent étudier successivement :

- les expressions qui ne fournissent pas de réponse. Le but de cette étude est d'amener les élèves à dégager la nécessité d'utiliser une égalité et des lettres ;
- les équations pour lesquelles la réponse est donnée sous la forme d'une lettre affectée d'une valeur. Le but est de faire ressortir la nécessité d'avoir une seule égalité avec une seule lettre ;

- les équations pour lesquelles la réponse est donnée sous la forme de deux lettres affectées chacune d'une valeur. Le but est de remarquer la nécessité d'écrire un système de deux égalités.

Le troisième temps est consacré à la phase de retour au problème. Les élèves doivent déterminer, parmi les réponses données par l'ordinateur, celles qui constituent des solutions au problème posé.

Puis, dans un dernier temps, on étudie les équations qui fournissent une réponse au problème. On s'intéresse aux aspects suivants :

- la signification des lettres utilisées,
- la manière dont est pris en compte l'énoncé,
- l'ordre dans lequel les informations sont lues, traitées, restituées dans l'équation.

III - Exemples d'exercices d'algebre en classe de cinquieme :

Les exercices étudiés ont été donnés en cinquième. Ils sont extraits d'un enchaînement d'activités destinées à introduire la pratique du calcul algébrique et son utilisation pour la résolution de problèmes du premier degré. Nous avons demandé aux stagiaires d'indiquer dans quel ordre ils les présenteraient à leurs élèves, au cours de l'année de cinquième, en argumentant leur choix.

Les exercices étudiés sont présentés dans l'annexe 2.

Un ordre possible est le suivant : F ; C ; H ; E ; B ; D ; G ; A.

En effet, l'exercice F se situe à un simple niveau de reconnaissance : savoir reconnaître une écriture correctement parenthésée (remarquons qu'à ce moment aucune convention de simplification n'a été présentée). L'exercice C, demandant d'organiser l'ordre du calcul par des parenthèses, se situe à un niveau plus difficile (synthèse des connaissances, création) mais il motive bien les élèves. L'exercice H vise à faire utiliser des valeurs numériques comme un symbole qui sera ensuite associé à une lettre et à faire remarquer l'économie de la traduction algébrique en lecture et en écriture. L'exercice E va plus loin dans la réflexion proposée aux élèves sur les expressions littérales. Il vise à les amener à accepter que la lettre ne désigne pas une valeur "fixée" en lui donnant successivement des valeurs différentes (statut de variable), à considérer une égalité comme une affirmation qui peut être vraie ou fausse selon la valeur attribuée à la lettre, à se mettre d'accord sur ce que signifie "égalité de deux expressions littérales" (notion d'identité). L'exercice B demande de "calculer sur des lettres", de savoir transformer une expression littérale pour prouver son identité à une autre. Les élèves doivent à ce niveau se dégager des vérifications numériques et faire confiance aux règles de transformation (distributivité ici) pour valider l'identité... La question 2 demande de réinvestir la compréhension de l'identité en choisissant la plus simple des trois formules équivalentes pour calculer plus aisément, sans que ce soit demandé explicitement.

En cinquième la résolution des problèmes à une inconnue s'appuie sur le sens des opérations. L'élève doit d'abord retrouver la suite d'opération partant de ce qui est inconnu à ce qui est connu, en utilisant les valeurs numériques données par l'énoncé, pour ensuite "défaire" ces opérations en ordre inverse. Si certains élèves parviennent à exprimer directement le programme de calcul de l'inconnue, d'autres ne maîtrisent pas encore cette compétence ; on peut retravailler avec eux en abordant par exemple des problèmes du type de l'exercice D. La première question demande en fait la mise en équation du problème, dans deux cas où la traduction littérale peut "partir de x", ce qui permet ensuite la résolution arithmétique (on "remonte" à x).

L'algèbre ne s'impose pas dans les problèmes précédents, mais il n'est pas encore question de proposer l'inconnue dans chaque membre, et encore moins deux inconnues. Cependant, pour un élève de cinquième, l'apparition de la même inconnue à deux endroits de l'énoncé ou à deux endroits du programme de calcul, comme c'est le cas dans l'exercice G, peut déjà bloquer la résolution arithmétique et motiver l'utilisation d'une lettre.

Le recours à l'algèbre prendra légitimement le pas sur la résolution arithmétique dans les problèmes qui font appel aux nombres relatifs. Cependant la traduction d'un énoncé avec ces nombres ne peut être naturelle pour un élève de cinquième : c'est un apprentissage à conduire. Dans l'exercice A, la présentation très directive de la mise en équation dans l'exercice proposé vise à obliger les élèves à contourner la résolution arithmétique qui émergerait sinon encore très majoritairement. Il s'agit de faire prendre conscience que donner à x un statut de nombre relatif permet de traduire l'ignorance où l'on est de la nature de l'inconnue (gain ou perte). Le signe de la solution trouvée (négative) est ensuite à interpréter avec le problème. La "culture" de la solution arithmétique fait obstacle : l'acceptation de solutions négatives possibles représente un pas de plus à franchir vers le traitement algébrique des équations.

IV - LES ENJEUX DE L'ALGEBRE AU COLLEGE :

La dernière partie de cette séance de travail sur l'algèbre au collège a été consacrée aux enjeux de l'algèbre au collège. Nous avons exposé les différents enjeux de l'algèbre au collège, niveau par niveau. Puis nous avons demandé aux stagiaires de rechercher dans leurs manuels des exercices se rapportant à chacun des enjeux exposés dans le niveau où ils enseignent.

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les enjeux de l'algèbre classe par classe. A certains de ces enjeux, nous associerons un exemple d'activité.

L'algèbre est officiellement au cœur de l'enseignement à partir de la classe de quatrième mais, dès la sixième, l'entrée dans l'algèbre est préparée par un ensemble d'activités relevant du pré-algébrique, comme nous allons le voir dans le sous-paragraphe suivant. Notre exposé s'appuie en partie sur le travail de Jean-Claude Duperret et de Jean-Claude Fénice (IREM de Reims)[2].

IV.1.a - Sixième, cinquième :

Le transfert des compétences de l'arithmétique à l'algèbre nécessite une maîtrise suffisante du calcul numérique. L'acquisition de cette maîtrise se fait, notamment, à travers le travail des deux points suivants :

⇨ *Traduction par une écriture en ligne de la solution d'un problème impliquant plusieurs opérations et vice-versa.*

I - Voici trois énoncés. Quel(s) est (sont) celui (ceux) dont la solution conduit à effectuer le calcul suivant : $1000 - [(58 \times 12) + (40 \times 5)] = 104$?

a - Avec les 1000 F que j'ai économisés, je souhaite acheter 12 cassettes à 58 F l'une et 5 disques compacts. Les disques compacts coûtent 40 F de plus que les cassettes. Combien me restera-t-il ?

b - La salle d'un théâtre comporte 12 rangées de 58 places et 5 rangées de 40 places. On veut porter sa capacité à 1000 places. Combien de places supplémentaires faudra-t-il créer ?

c - Christophe a 1000 F d'économies. Pour sa console il achète 12 jeux d'occasion coûtant chacun 58 F. Puis il vend à un de ses camarades 5 jeux à 40 F l'un. Quelle somme reste-t-il ?

[2] Jean-Claude Duperret, Jean-Claude Fenice (1999) : L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège. Repères IREM, numéro 34.

II – Organiser une suite de calcul en une seule ligne :
samedi après-midi, au supermarché, Julien a acheté 4 pâtisseries à 7,20 F, un lot de 5 stylos à 7,50 F, 3 cahiers identiques, de même prix. On lui a rendu 43 F lorsqu'il a donné son billet de 100 F à la caissière.

1 – Que cherche-t-on à savoir quand on effectue :

$$A = 100 - 43 \text{ ; } B = 7{,}20 \times 4 \text{ ; } A - (B + 7{,}50) \text{ ?}$$

2 – Pour calculer le prix d'un cahier, lequel de ces calculs écrits en une seule ligne te semble donner la réponse correctement ?

$$E = 100 - 43 - 7{,}20 \times 4 + 7{,}50 : 3$$
$$F = 100 - (43 - (7{,}20 \times 4) + (7{,}50 : 3))$$
$$G = [(100 - 43) - ((7{,}20 \times 4) + 7{,}50)] : 3$$
$$H = (100 - 43) - (7{,}20 \times 4) + (7{,}50 : 3)$$

⇨ *Travail sur les parenthèses, les priorités opératoires (Quelles sont les propriétés mathématiques ? Quelles sont les conventions ? Comment utiliser une calculatrice ?)*

Exemples d'activités :

I - Avec les lettres : Remplacer, effectuer, en respectant les conventions...

a	b	c	a + b c	(a + b) c	a (b + c)
2	3	4			
2,5	0	8			
8,7	0,3	1			
4	0,5	0,5			

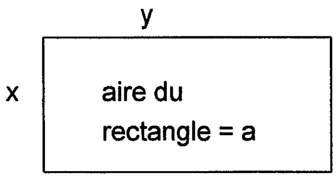
II - Relier chaque expression à sa valeur numérique

(3 + 3) × (3 – 3)	9
(3 + (3 × 3)) – 3	3
3 + ((3 × 3) – 3)	0
(3 × 3) – (3 + 3)	6

A l'école primaire, les élèves ont déjà rencontré les lettres dans des recueils de formules simples (aires, périmètres) et ont déjà pratiqué des exercices de substitution. Il s'agit au début du collège d'approfondir ce travail afin de faire évoluer le statut des objets utilisés (lettre, égalité). On pourra pour ce faire travailler les points suivants :

⇨ *Production et exploitation de formules (ce qui va conduire à un travail sur la substitution numérique et qui va présenter la lettre comme "nombre généralisé").*

Exemple d'activité :

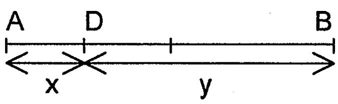
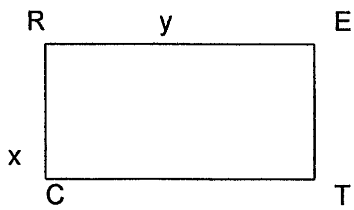
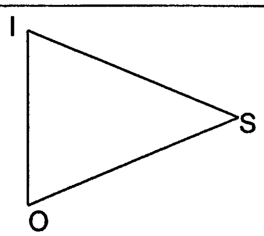
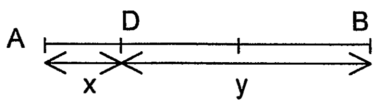
Dans cette situation…		… la formule	V/F
 périmètre du rectangle = p	… x est donné par …	$\frac{a}{2} - y$ $p - \frac{y}{2}$ $a : y$ $\frac{p-y}{2}$ $a - 2y$ $\frac{p}{2} - y$	
Le grand rectangle est constitué de 3 rectangles identiques accolés. Aire totale = a Périmètre du grand rectangle = p 	… x est donné par …	$p - 3y$ $a : y \times 3$ $p : 6$ $\frac{a}{3y}$ $\frac{p}{2} - 3y$ $a : y$	

Calculer x dans chacune des 2 situations, avec la formule de votre choix, sachant que :
Situation 1 : a = 360 cm² ; y = 30 cm ; p = 84 cm
Situation 2 : a = 360 cm² ; y = 15 cm ; p = 106 cm.

⇨ *Mise en relation d'expressions littérales avec des situations géométriques décrites dans divers registres (graphique - langage naturel)*

Les quatre calculs suivants correspondent aux quatre questions posées sous les dessins :

$$x + y \times 2 \,;\, (x + y) \times 2 \,;\, x + \frac{y}{2} \,;\, \frac{x+y}{2}$$

 M est le milieu du segment [AB]. Quelle est la longueur du segment [AM] ?	 Quel est le périmètre du rectangle RECT ?
IS = OS = y IO = x  Quel est le périmètre de ISO ?	 M est le milieu du segment [DB]. Quelle est la longueur du segment [AM] ?

a – Associer chaque question au calcul qui lui convient.

b – On donne x = 1,8 et y = 3 (en centimètre). Calculer les quatre réponses aux quatre questions.

c – Vérifier que les expressions ci-dessous donnent le même résultat que deux des précédentes : $x \times 2 + y \times 2$; $x : 2 + y : 2$.

⇨ *Production de programmes de calcul pour démonter des expressions littérales*

Parmi ces énoncés, certains proposent un programme de calcul écrit entièrement en français, d'autres utilisent l'écriture algébrique. Pour chaque programme en français du premier tableau, il y a un programme équivalent en langage algébrique dans le second tableau. Pouvez-vous les associer ? (Attention il y a un intrus...)

Programme 1	Programme 2	Programme 3	Programme 4
Choisir un nombre ; le multiplier par 2; ajouter 3; diviser le résultat obtenu par 5	Choisir un nombre ; le diviser par 5; ajouter 3; multiplier le résultat obtenu par 2	Choisir un nombre ; ajouter 3; multiplier le résultat par 2; diviser le dernier résultat obtenu par 5	Choisir un nombre ; le multiplier par 2; diviser le résultat obtenu par 5 ; ajouter 3;
1 – Exécuter ce programme avec 1 comme nombre de départ. 2 – Recommencer avec 5, puis 20, puis 100.	1 – Exécuter ce programme avec 1 comme nombre de départ. 2 – Recommencer avec 5, puis 20, puis 100.	1 – Exécuter ce programme avec 1 comme nombre de départ. 2 – Recommencer avec 5, puis 20, puis 100.	1 – Exécuter ce programme avec 1 comme nombre de départ. 2 – Recommencer avec 5, puis 20, puis 100.

Expression 1	Expression 2	Expression 3	Expression 4	Expression 5
$\frac{2(x+3)}{5}$	$2\left(\frac{x}{5}+3\right)$	$2x+\frac{3}{5}$	$\frac{2x+3}{5}$	$\frac{2x}{5}+3$
1 – Calculer cette expression avec 1 comme valeur de x. 2 – Recommencer avec 5, puis 20, puis 100.	1 – Calculer cette expression avec 1 comme valeur de x. 2 – Recommencer avec 5, puis 20, puis 100.	1 – Calculer cette expression avec 1 comme valeur de x. 2 – Recommencer avec 5, puis 20, puis 100.	1 – Calculer cette expression avec 1 comme valeur de x. 2 – Recommencer avec 5, puis 20, puis 100.	1 – Calculer cette expression avec 1 comme valeur de x. 2 – Recommencer avec 5, puis 20, puis 100.

⇨ *Introduction d'équations qui peuvent se résoudre en pensant arithmétiquement ($a+x = b$ et $ax = b$) mais qui apprennent à lire et interpréter des expressions littérales (ce qui va amener à travailler sur un autre statut de la lettre : la lettre comme "inconnue").*

IV.1.b - Quatrième :

En classe de quatrième, les enjeux de l'algèbre s'élargissent. A ce niveau, on peut envisager un travail sur les points suivants :

⇨ *Travail sur le statut de l'égalité*

Des égalités... de toutes sortes...

- $25 - 4 = 3 \times 4$
- $2a \times 3b = 6\ ab$
- $13 + 4 = 21 - 5$
- $AB^2 + BC^2 = AC^2$
- $10 + x = 4x$
- $(x + 1)^2 = x^2 + 1$
- $3(x - 1) = 4$
- $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$
- $AB + BC = AC$
- V désigne le volume du cylindre de révolution de hauteur 4, r désignant le rayon de la base

$$V = 4\pi\ r^2$$

- $xy + x = (1 + y)x$

Quel classement proposes-tu ? D'après quels critères ?

⇨ *Travail sur le sens des écritures littérales : que nous apprennent-elles sur les objets qu'elles désignent ?*

1 – A ton avis, quand on écrit $25 = 4^2 + 3^2$, que veut-on mettre en évidence :

a – que l'addition des carrés de 4 et de 3 donne 25 comme résultat ?

b – que le nombre 25 est un carré ?

c – que le nombre 25 est la somme de deux carrés ?

2 – Qu'indique l'écriture $(1 + 2 + 3)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

3 – La lettre n désigne un nombre entier naturel. Chaque égalité de la colonne de gauche est traduite en français dans la colonne de droite : remplacer les pointillés par la lettre a, b, c, d ou e qui convient :

$a = n(n + 1)$	... est un nombre pair
$b = 2n + 1$	... est le produit de deux entiers consécutifs
$c = 2n$	...est le produit de deux entiers pairs consécutifs
$d = (2n + 1)(2n + 3)$	...est le produit de deux entiers impairs consécutifs
$e = 2n(2n + 2)$	... est un nombre impair

⇨ *Introduction et travail sur des équations qui mettent en défaut la pensée arithmétique ($ax + b = cx + d$, par exemple).*

Qu'est-ce qu'une solution d'une équation ? Vrai ou faux ?

- Le nombre – 1 est une solution de l'équation : $2xx + 2 = 0$
- N'importe quel nombre est une solution de l'équation $y - 1 = 1 + y$
- Aucun nombre n'est solution de l'équation : $2x + 3 = 2(x + 1)$
- Le nombre 7 est une solution de l'équation : $v + 3 = 2v - 8$

- N'importe quel nombre est solution de l'équation : $0 \times a = 0$
- Le nombre 4 est la solution de l'équation $b^2 = 16$. Il ne peut pas y en avoir d'autre.
- L'équation $x + 2y = 2$ n'a qu'une solution : le couple de valeurs (1 ; 0,5)

Ces équations ont chacune une solution. Associer les équations qui ont la même solution :

$2x + 3 = 5x$	$2(x + 9) = 4x$	$2x + 12 = 5x + 9$
$5x - 1 = x$	$3 = 3x$	$x = 0,25$
$x + 9 = 2x$	$4x = 1$	$9 = x$

⇨ *Mise en équation et modélisation algébrique*

Pour résoudre un problème, on peut souvent le traduire par une équation :

- Voici trois problèmes :

Problème 1 : histoire d'âge	Problème 2 : A pied ou à mobylette	Problème 3 : Pas si bête que ça
Laëtitia a 15 ans. Sa mère a 40 ans. Quel est le nombre x d'années dans lequel l'âge de la mère sera le double de celui de sa fille ?	Pour s'entraîner au marathon, Bernard part faire un footing à la vitesse de 15 km/h. Son frère David veut le rejoindre en mobylette. Il part deux heures plus tard et roule à la vitesse de 40 km/h. Quel temps x, en heures, mettra-t-il pour le rattraper ?	Un âne porte 15 sacs de farine et 2 kilogrammes de pommes. Un mulet porte 2 sacs de farine et 40 kilogrammes de pommes. L'âne souffle fort. "De quoi te plains-tu ?", dit le mulet, "nous portons la même charge". Quelle est la masse x, en kilogrammes, d'un sac de farine ?

- Voici des équations :

Equation A : $15x + 2 = 2x + 40$

Equation B : $15 (x + 2) = 40x$

Equation C : $40x - 15 = 2$

Equation D : $40x - 15 = 2(x + 15)$

Parmi ces quatre équations, une seule ne traduit aucun des problèmes. Dites de quelle équation il s'agit.

- Redonner alors son équation à chaque problème, puis déterminez chaque réponse.

⇨ *Introduction des inéquations*

⇨ *Utilisation de l'algèbre pour généraliser, pour prouver*

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : "Tu penses à un nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7". L'affirmation est-elle vraie ?

IV.1.c - Troisième :

En classe de troisième, de nouveaux objets apparaissent. Les points à travailler sont les suivants :

⇨ *Les premiers systèmes d'équations*

⇨ *Les équations de droites (l'appellation de ces nouveaux objets peut être ambiguë pour les élèves dans la mesure où il n'y a pas d'équation à résoudre !)*

⇨ *Les inéquations à deux inconnues (qui nécessitent une résolution graphique)*

⇨ *Les fonctions linéaires et affines (ces nouveaux objets font le lien entre le cadre numérique et le cadre algébrique, en particulier en ce qui concerne la proportionnalité. En outre, l'étude de ces objets prépare le travail sur les fonctions en seconde, où l'algèbre est travaillée comme un outil pour leur étude)*

ANNEXE N° 10 : ENSEMBLE DES EXERCICES ETUDIES PAR LE SOUS GROUPE LYCEE EN 1998/1999

Exercice 1 : Quelle est l'expression égale à $a - \frac{b-c}{b}$?

$$\frac{ab-b-c}{b}, \quad a + c, \quad a+\frac{c}{b}, \quad ab-b-c, \quad a-1+\frac{c}{b}$$

Exercice 2 : Soit l'expression $D(x)=(x-1)(x+3)+(x+3)(x-1)(2x-5)$
Que peut-on dire de D(-3) et D(1) ?
Factorise l'expression D(x).
Quelles sont toutes les solutions de l'équation D(x)=0 ?

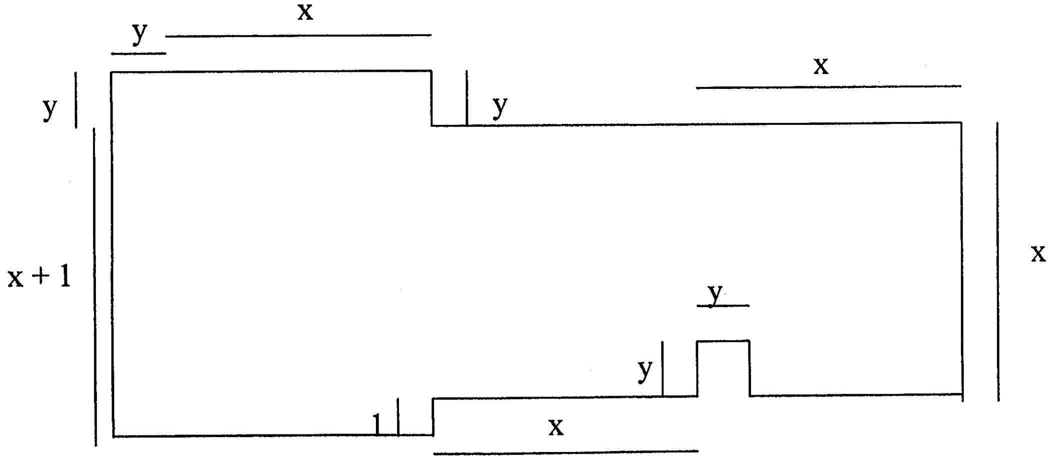
Exercice 3 : Soit l'expression $E(x)=2x(3+x)-(2x+6)(x-5)$
Quelles sont toutes les solutions de l'équation E(x)=0 ?

Exercice 4 : Complète le tableau suivant :

Expression algébrique	Langage courant
soit x	soit x
$\frac{1}{x^2}$	
$\frac{x^3}{x^2+1}$	
$2x^3 - 3x^2$	
	Prendre le carré de x
	Ajouter à ce carré l'inverse de la différence de x et de 3
	Prendre le cinquième de ce résultat

Exercice 5 : Pour chacune des expressions algébriques proposées ci-dessus, marquer une partie de la figure d'un seul tenant dont l'aire est égale à cette expression (x et y sont deux nombres réels positifs).

a) $(x+y+1)(x+y)$; b) $2x^2 - y^2$; c) $xy+2x^2$; d) $x+y$; e) $x^2+y^2+2xy+x+y$

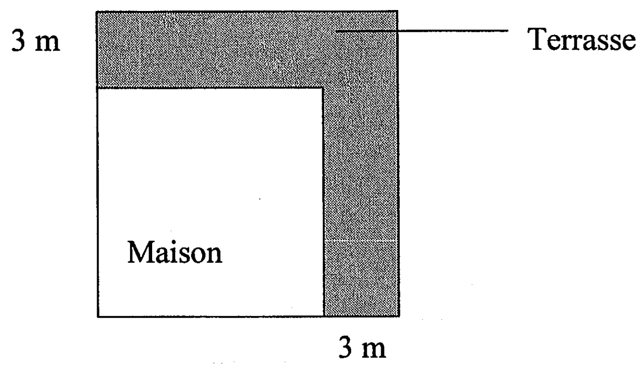


Exercice 6 : Un élève dit à un autre : "Tu choisis un nombre, tu lui ajoutes 2, tu multiplies par 4 le résultat, tu ajoutes le nombre initial, puis tu ajoutes 2, tu divises le résultat par 5, tu retranches 2 et tu trouves le nombre de départ", ça marche à tous les coups.
Qu'en pensez-vous ? Justifiez votre réponse.

Exercice 7 : Un rubis a une valeur (en francs) égale à 5 000 fois le carré de sa masse (en grammes). Un rubis de 10g tombe et se casse en 2 morceaux.
Soit x la masse d'un des morceaux. Indiquer si les expressions suivantes expriment la valeur obtenue lors de la vente des deux morceaux.

Expression	oui /non	justification
$5000x^2 + (10-x)^2$		
$5000(x - 10 - x)^2$		
$5000(x^2 + (10-x)^2)$		
$5000(x + (10-x))^2$		

Exercice 8 : Une personne réalise une terrasse autour de sa maison comme le schéma suivant l'indique. Cette personne se souvient que la terrasse a une aire supérieure à $81m^2$. Montrer que l'aire de la maison est supérieure à $144m^2$.



Exercice 9 : On considère l'expression $A(x) = 7x (3x+4) + 9x + 12 - 2(3x+4)(x+3)$
a) Développer et réduire A(x). On obtient une expression D(x).
b) Factoriser A(x). On obtient une expression F(x).
c) En comparant D(x) et F(x), vérifier la factorisation et le développement.

d) Préciser dans chaque cas la forme A(x), D(x), F(x) qui vous semble la plus appropriée pour répondre à la question posée :
Calculer la valeur de l'expression en 0, en 1, en -1, en 3/5, en 5.
Trouver le signe de l'expression pour $x=1/2$, pour $x=-10$
Donner un ordre de grandeur de A(10)
Résoudre les équations $A(x)=0$, $A(x)=-12$, $A(x)=14x^2+11x+4$

ANNEXE N° 11 : DOCUMENT PRODUIT PAR LES FORMATEURS SUITE A LA DEUXIEME SEANCE DE DIDACTIQUE DE L'ALGEBRE AVEC LE SOUS-GROUPE LYCEE EN 1998/1999

L'objectif du travail était d'analyser un ensemble d'exercices, relevant directement ou indirectement du domaine algébrique, du point de vue de leur pertinence pour un travail en module, dans ce domaine. Ces exercices sont extraits d'un corpus élaboré dans le cadre d'un projet d'innovation et valorisation des réussites (académie de Créteil). Nous présentons ci-dessous, exercice par exercice, les réflexions que ce travail a suscitées puis tirons quelques conclusions plus générales de cette activité.

Exercice 1 :

Cet exercice est un exercice de calcul littéral impliquant des fractions. Il permet notamment de repérer où en sont les élèves dans ce domaine et d'attirer leur attention sur le parenthésage qui reste implicite ici, du fait de l'écriture fractionnaire.
Les cinq expressions proposées sont toutes erronées sauf la dernière. Elles correspondent à des erreurs possibles, plus ou moins grossières : pour la première, il n'y a pas prise en compte du parenthésage implicite et c'est une erreur qui, en début de seconde peut être commise par bon nombre d'élèves ; les deux suivantes résultent de simplifications abusives (les deux lettres b sont tout simplement supprimées dans la seconde, dans la troisième, on a quand même conservé une forme fractionnaire au résultat ; la quatrième conjugue erreur de parenthésage et suppression du dénominateur après réduction au même dénominateur, c'est peut-être un peu gros. L'expression correcte est la dernière proposée mais il faut noter que l'égalité n'est pas évidente puisqu'elle résulte d'une simplification et non d'une simple réduction au même dénominateur.
L'expression correcte a été placée en dernière position. On peut penser que c'est pour obliger les élèves à passer en revue toutes les expressions mais, vu que la première expression correspond à une erreur très probable, bon nombre d'élèves risquent de s'arrêter à cette première expression, et ce d'autant plus que le texte indique explicitement qu'il n'y a qu'une expression égale à l'expression donnée.
Variantes possibles : ouvrir le texte avec "quelle est" ou "quelles sont..." ; ne pas placer en premier l'expression correspondant à l'erreur majoritairement attendue ; enlever la quatrième expression et proposer à la place la forme correcte réduite au même dénominateur. On peut aussi faire de multiples versions en variant les expressions de départ. Inutile de prendre des expressions très compliquées.
Commentaire sur la forme : on n'a pas demandé aux élèves de calculer l'expression, on leur demande de se situer par rapport à des expressions qui comportent de plus des erreurs attendues. La forme de l'exercice peut le rendre plus motivant pour l'élève et permettre aussi de mieux cibler le travail sur certaines formes d'erreurs.
Gestion possible : après une phase de travail individuel ou en groupes, faire lister les propositions, puis demander aux élèves de justifier leurs positions, en ne privilégiant pas systématiquement les réponses correctes. Essayer de faire en sorte que les élèves arrivent entre eux à un accord raisonné. Proposer le cas échéant de faire des substitutions numériques pour tester des égalités, s'ils n'y pensent pas d'eux-mêmes. Faire le point en conclusion sur les erreurs tentantes, la gestion des signes - devant les fractions et les moyens de contrôle.

Exercices 2 et 3 :
Ces exercices visent les rapports en factorisation et zéros d'une expression polynomiale. Ces rapports ne peuvent pas être considérés comme évidents pour un élève arrivant en seconde. Pour beaucoup d'entre eux, résoudre une équation, c'est faire une succession de manipulations (faire passer des termes d'un membre dans l'autre, regrouper des termes, simplifier...) qui doit aboutir à x= quelque chose, ce

quelque chose devenant ipso facto "la solution" cherchée de l'équation. Diverses évaluations montrent que si l'on demande à des élèves de ce niveau de vérifier si tel ou tel nombre est solution d'une équation donnée, beaucoup ne voient pas d'autre démarche possible que celle consistant à résoudre l'équation puis à vérifier si le nombre obtenu est bien celui donné. Ils ont certes effectué des factorisations, mais le plus souvent à la demande, ils n'en avaient pas l'initiative, l'idée que dès qu'une expression polynomiale est factorisée, on connaît ses racines donc qu'il peut être intéressant de chercher à factoriser si l'on cherche les racines n'a rien de spontané. On aimerait qu'en seconde, elle prenne sens, que la factorisation devienne un outil du travail algébrique. L'exercice 2 est guidé, ce qui est normal compte tenu de ce qui précède. La première question peut d'autre part permettre de repérer des difficultés plus profondes, si les élèves ne donnent pas de sens aux expressions D(-3) et D(1) et ne savent pas quoi faire pour les calculer. La factorisation demandée n'est pas très difficile, sans être pour autant évidente. En effet, il y a deux facteurs communs bien mis en évidence dans l'écriture mais en revanche, le premier bloc est constitué uniquement de ces facteurs, et les élèves peuvent oublier le produit par 1, ici implicite. L'exercice 3 peut être vu comme un exercice de réinvestissement. Cette fois, il n'y a pas d'intermédiaire donné, la totalité de la démarche est à la charge de l'élève. La factorisation n'est pas non plus complètement évidente puisque le facteur commun n'est pas directement apparent. Mais, comme certains l'ont fait remarquer, le choix de l'expression n'est pas pertinent si on veut mettre en évidence l'intérêt de la factorisation pour résoudre l'équation puisque lorsque l'on développe l'expression les termes en x^2 se simplifient. Un changement dans le coefficient du premier terme serait le bienvenu.
Morale : il suffit souvent de bien peu pour changer l'économie de la résolution d'un exercice !

Exercice 4 :
L'enjeu de cet exercice est l'articulation entre le registre des expressions algébriques et le langage courant. Cette articulation est très souvent en jeu dans le travail algébrique (penser à la mise en équation de problèmes) ; son travail systématique, dans les deux sens comme c'est le cas ici, peut aussi contribuer à donner du sens aux écritures algébriques. De tels exercices de traduction peuvent aussi être proposés avec une fonction de diagnostic, il en existe d'ailleurs régulièrement dans les évaluations de début de seconde.
L'exercice, tel qu'il est proposé ici, a cependant fait l'objet de diverses critiques. La présentation de la tâche a été jugée très peu claire, beaucoup de stagiaires soulignant qu'ils avaient dû aller voir les dernières lignes pour comprendre ce qu'il fallait faire. De plus, les trois dernières lignes correspondent à un programme de calcul dont on détaille les étapes, alors que cela ne semble visiblement pas le cas pour les premières lignes qu'il faut traduire une à une. D'autres ont souligné la complexité des expressions en langue naturelle (lignes 3 et 5 notamment), en se demandant s'il ne s'agissait pas là de formulations complètement artificielles que personne n'emploierait jamais, hors un tel exercice. D'autres encore ont souligné la difficulté de gérer dans une telle expression en langue naturelle le parenthésage, par exemple dans le cas de la ligne 3 : "le cube de x divisé par le carré de x plus 1" fait-il référence à l'expression donnée ou à "(le cube de x divisé par le carré de x)+1" ?
En résumé, si l'intérêt de travaux de traduction dans les deux sens a été reconnu, l'avis général a été de modifier l'exercice proposé. Plusieurs suggestions ont été faites : donner une expression et faire écrire un programme de calcul ou, en sens inverse, donner un programme de calcul, en ne condensant pas trop les opérations pour éviter de se retrouver avec un langage alambiqué et faire retrouver l'expression à laquelle il aboutit (voir justement sur ce point le compte-rendu du groupe collège). Ceci devrait aider ceux qui ont encore des difficultés à ce niveau, à décortiquer les expressions, à rompre avec l'oralisation usuelle qui fonctionne de gauche à droite pour repérer la structure de l'écriture

algébrique fonctionnant en blocs articulés. La discussion a été l'occasion d'introduire d'autres types de représentations des expressions algébriques, celles sous forme de schémas qui peuvent elles aussi aider les élèves à décortiquer les écritures. Considérons l'expression $\sqrt{x^2+1}$. L'oralisation en est : "racine de x deux plus un" avec toujours l'implicite des parenthèses. Le schéma traduisant la structure de calcul fonctionne, lui, tout à fait différemment : $x \xrightarrow{\text{élever au carré}} x^2 \xrightarrow{\text{ajouter 1}} x^2 + 1 \xrightarrow{\text{prendre la racine}} \sqrt{x^2+1}$
De telles schématisations peuvent aussi être utiles pour résoudre les premières équations du collège lorsque x n'apparaît que d'un seul côté, par inversion des opérations et plus généralement d'ailleurs pour inverser des formules. Elles peuvent également aider le travail sur les fonctions conjointes en seconde, en permettant de ramener une fonction à la fonction de référence de la même famille, cette fois en couplant de plus opérations algébriques et transformations géométriques.

Exercice 5 :
Cet exercice vise toujours le travail sur le sens des expressions algébriques, cette fois à travers l'articulation entre expressions algébriques et aires de figures géométriques. Ce type d'articulation est utilisé classiquement dans l'enseignement de façon ponctuelle, par exemple pour donner sens aux identités remarquables, mais de façon générale, l'articulation n'est pas pour autant évidente pour les élèves. On note ici une gradation dans les expressions proposées et le travail que l'articulation suppose. La première association est facile : l'aire est celle du grand rectangle, on peut la considérer comme une question qui permet de rentrer dans le problème, de s'assurer que tout le monde a compris ce qu'il s'agit de faire. Au vu des réactions dans la séance, on peut penser d'ailleurs qu'une clarification du sens de l'expression "un seul tenant" va s'imposer à un moment ou à un autre. La seconde ne pose pas non plus de grandes difficultés, elle correspond à la partie restante. La troisième l'est nettement moins et elle en a fait réfléchir plusieurs. Sans doute faudra-t-il préciser aux élèves, si cela n'a déjà été fait, qu'ils peuvent rajouter des traits de séparation pour identifier des zones. Un petit travail algébrique s'impose pour respecter la contrainte. On peut repérer que c) = b) + y^2 + xy, on peut aussi factoriser c). La quatrième met en jeu l'implicite de la multiplication par 1, ce qui est aussi intéressant d'un point de vue algébrique. La dernière nécessite aussi un travail algébrique : on peut par exemple reconnaître l'identité remarquable et combiner les deux morceaux pour obtenir le rectangle déjà associé à a), on peut aussi terminer la factorisation et retrouver a).
Variantes possibles : il y a de nombreuses variantes possibles pour ce type d'exercice. On peut par exemple, en sens inverse, hachurer des zones et demander de leur trouver une expression algébrique. Si l'on choisit bien figures et parties hachurées, on peut s'arranger pour qu'il y ait différentes façons de décomposer la surface hachurée, qui vont conduire à des expressions différentes. On pourra alors valider l'égalité des expressions de façon externe, en montrant que la décomposition est correcte et algébriquement bien exprimée, il sera aussi intéressant de chercher à passer d'une expression à l'autre par des transformations algébriques, donc de faire une validation interne à l'algèbre. On peut aussi proposer pour une zone hachurée plusieurs expressions, plusieurs correctes mais de formes relativement distinctes ainsi que des incorrectes mais correspondant à des erreurs plus ou moins fréquentes dans le calcul algébrique, en particulier des expressions qui ressemblent beaucoup à une expression correcte, s'en différenciant juste au niveau du parenthésage par exemple.

Exercice 6 :
Cet exercice décrit, en langue naturelle, une propriété numérique. L'algèbre va permettre de prouver cette propriété. C'est une fonctionnalité de l'algèbre essentielle mais assez peu mobilisée au collège et il est intéressant de savoir comment se situent les élèves par rapport à cette fonctionnalité en début de seconde. Les élèves ne sont pas guidés (le nombre choisi par exemple n'est pas appelé x) et on peut

s'attendre à ce qu'un certain nombre d'élèves se contentent de vérifier la propriété en effectuant quelques essais numériques. Cette situation, si elle se produit, pourra être exploitée pour travailler sur la notion de preuve en mathématiques. Plusieurs stagiaires comparent cet exercice à l'exercice 4 : dans les deux cas, il y a articulation de la langue naturelle et du registre algébrique mais ici il ne s'agit pas d'un simple exercice de grammaire, l'articulation a un objectif : elle permet de prouver la généralité d'une régularité numérique observée. Ceci rend l'exercice plus intéressant.
Au delà de la mise en évidence du rôle de l'algèbre comme outil de preuve, cet exercice, comme l'ont montré diverses expérimentations, peut aussi fournir des informations intéressantes sur le rapport des élèves aux expressions algébriques. En effet, les écritures algébriques produites par les élèves sont diverses : certains traduisent l'énoncé par une succession d'égalités, chaque égalité correspondant à une étape du processus, ces égalités peuvent être séparées conduisant à une production correcte ou enchaînées, sans respect du sens de l'égalité : $4(x+2) = 4x+8+x = 5x+8+2 = \ldots$ D'autres traduisent l'ensemble du processus par une seule expression, soit parenthésée (correctement ou non), soit non parenthésée. On a observé que les élèves peuvent d'ailleurs réduire correctement (vis à vis de la situation initiale) une expression non parenthésée, comme si l'écriture algébrique servait juste d'aide mémoire à un travail qui s'effectue mentalement, en référence à la situation décrite. La notation algébrique sert alors en quelque sorte simplement de moyen sténographique. D'autre part, il peut aussi y avoir des élèves qui traduisent d'emblée la situation par une égalité. Cette égalité devient en général pour eux une équation à résoudre. Suivant que les calculs sont corrects ou non, ils vont arriver à $x = x$ ou à $x = a$. Ils ont alors beaucoup de mal à revenir au problème initial, en particulier l'obtention de l'égalité $x = x$ n'est pas facilement interprétée comme la preuve de la validité de l'énoncé. L'automatisme de ce qu'est pour eux la résolution d'une équation est rompu et ils sont perdus.
On voit donc que cette situation, sous ses apparences anodines est très riche, à la fois du point de vue des diagnostics qu'elle permet et des occasions de réflexion sur le sens du travail algébrique qu'elle fournit. Bien sûr, de multiples variantes sont faciles à produire.

Exercice 7 :
Dans cet exercice, ce qui est en jeu est la modélisation algébrique d'une situation décrite en langue naturelle. On demande à l'élève de se situer par rapport à des expressions algébriques données qui diffèrent seulement au niveau du parenthésage. On pourrait penser cet exercice relativement facile. Il l'est moins qu'il ne le paraît car les élèves peuvent d'une part avoir du mal à repérer que 10-x est la masse du deuxième morceau, d'autre part avoir du mal à interpréter ces expressions en apparence si proches. Les observations faites dans l'académie de Créteil montrent que certains élèves ont recours à des critères a priori non prévus pour tester les expressions comme le suivant : un rubis cassé a moins de valeur qu'un rubis entier. Ceci permet par exemple de rejeter la deuxième et la quatrième expressions proposées.

Exercice 8 :
Cet exercice se situe dans un contexte géométrique. Pour ceux qui l'ont résolu par l'algèbre, il semble vraiment difficile, notamment parce qu'il met en jeu le traitement d'inégalités : si x est la longueur du côté de la maison, l'aire totale est : $(3+x)^2$ donc l'aire de la terrasse est : $(3+x)^2-x^2$, soit : $6x+9$. On arrive donc à l'inégalité : $6x+9>81$ puis, en résolvant cette inégalité, à : $x>12$. On en déduit que l'aire de la maison qui est égale à x^2 est bien supérieure à 144. Mais d'autres stagiaires rapprochent cet exercice d'un exercice traité la fois précédente. On peut raisonner arithmétiquement, en s'appuyant sur la figure : la terrasse est formée de deux bandes rectangulaires de largeur 3m et de longueur la longueur de la maison et d'un carré de $9m^2$. Si l'aire de la terrasse est plus grande que $81m^2$, celle des

deux bandes est supérieure à $72m^2$, donc celle de chaque bande à $36m^2$. La longueur de chaque bande est donc supérieure à 12m et on arrive au résultat cherché. Cette solution est tout aussi pertinente que la solution algébrique, on voit qu'elle correspond en fait à la résolution de l'inéquation $6x+9>81$ par inversion des opérations, ce qui est ici possible puisque x ne figure que dans un des membres de l'inégalité (comme pour les équations). En conclusion, si l'on cherche à mettre en évidence le caractère facilitateur de la résolution algébrique, cet exercice n'est pas forcément le mieux adapté. En revanche, si l'on veut contribuer à donner du sens à la résolution d'une inéquation du premier degré simple, en comparant les deux résolutions de l'exercice, il peut être intéressant.

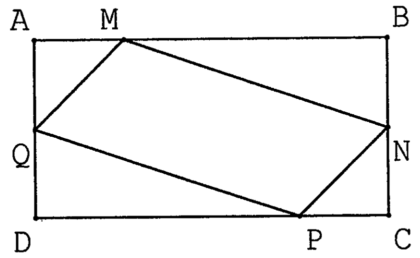
Exercice 9 :
L'exercice 9 a pour objectif de faire travailler les élèves sur différentes formes d'une même expression et, en particulier, de mettre en évidence le fait que, suivant ce que l'on veut faire de cette expression, les différentes formes, bien que mathématiquement équivalentes, ne présentent pas le même intérêt. Au niveau du collège, les élèves ont certes manipulé des expressions algébriques mais ils ont rarement eu à faire preuve d'autonomie dans le choix des formes, les choix étaient décidés dans les énoncés. Au niveau du lycée, on souhaite qu'ils apprennent à piloter des calculs algébriques, en sachant pourquoi telle ou telle transformation peut être ou non a priori intéressante. Ceci suppose qu'ils soient sensibilisés à ce type de questionnement. Cet exercice prolonge en un certain sens les exercices 2 et 3. La factorisation demandée est de difficulté moyenne : l'attention est attirée sur le facteur commun $3x+4$ mais il faut transformer la sous-expression $9x+12$ pour le faire apparaître. On notera la question c) qui vise à utiliser chacun des calculs pour contrôler l'autre. Ce n'est sans doute pas une attitude spontanée chez les élèves, mais dans ce cas, le contrôle n'est pas très compliqué, en particulier pour le terme en x^2 et le terme constant et ce peut être l'occasion d'y sensibiliser les élèves. Dans la question d), différents types d'utilisation de l'expression sont pris en compte : calcul de valeurs particulières, résolution d'équations diverses, signe de l'expression. Les choix sont faits pour montrer qu'il n'y a pas association automatique entre un type d'utilisation et une forme d'expression. L'expression développée est commode pour calculer la valeur en 0, 1 et -1 (on se ramène à des additions) ainsi que pour estimer l'ordre de grandeur pour une valeur de x grande (il aurait d'ailleurs été plus judicieux pour y sensibiliser les élèves de prendre un nombre plus grand que 10), puisqu'elle met alors en évidence le terme prépondérant. L'expression factorisée est commode pour calculer une valeur lorsque la valeur de x annule un des facteurs, pour trouver le signe si le calcul de la valeur exacte n'est pas évident, pour résoudre une équation du type $A(x)=0$. Il aurait pu être intéressant de proposer aussi $A(x)=1$, car c'est un cas où les élèves ont plus tendance à généraliser abusivement la technique de résolution de $A(x)=0$ en écrivant que le produit est égal à 1 si et seulement si un des facteurs est égal à 1.

En conclusion :
Les exercices présentés ci-dessus illustrent un certain nombre d'enjeux de l'enseignement de l'algèbre en seconde, dans des domaines qui ont déjà été abordés au niveau du collège. Ils peuvent être utilisés comme des outils de diagnostic permettant à l'enseignant de voir un peu mieux où en sont les élèves mais aussi comme des moyens de questionner un certain nombre d'automatismes, de sensibiliser les élèves à des compétences algébriques peu sollicitées au collège mais qui deviennent importantes au lycée où l'algèbre doit devenir pour les élèves un outil opérationnel du travail mathématique. Cet outil va continuer à vivre dans le monde des équations mais aussi dans de nouveaux champs comme le champ des fonctions et être aussi de plus en plus engagé dans des démarches de preuve. Les exercices que nous avons choisis ici sont intéressants mais ils ne constituent pas pour autant des modèles et le

travail effectué a d'ailleurs abouti à diverses suggestions d'amélioration. Plus que des exercices isolés, il faut de plus les voir comme des moules qui peuvent servir à générer de nombreux exercices, en jouant sur un certain nombre de variables ou sur les possibilités de variantes. Nous les avons juxtaposés ici pour fournir une palette assez large à l'analyse mais il va de soi que si l'on décide de faire une séance de module, il faut se fixer des objectifs plus précis, se constituer un corpus bien plus réduit d'exercices, cohérent par rapport à l'objectif visé, sans vouloir tout travailler à la fois. Enfin, ils n'explorent pas toutes les facettes de l'algèbre du collège qui méritent d'être retravaillées en seconde. Par exemple il n'y a rien sur les équations de droites, bien que la notion d'équation d'un ensemble de points, si loin de la notion d'équation comme support à la recherche d'une quantité inconnue qui leur est familière, soit difficile à comprendre par les élèves, et que, pour ces nouveaux objets, la question de l'articulation entre registre algébrique et registre graphique pose d'autre part des problèmes qui sont loin d'être maîtrisés en seconde.

ANNEXE N° 12 : LE SCENARIO RELATIF A LA SITUATION "LE QUADRILATERE QUI TOURNE" PRODUIT PAR LE SOUS-GROUPE LYCEE EN 1998/1999

Le quadrilatère qui tourne



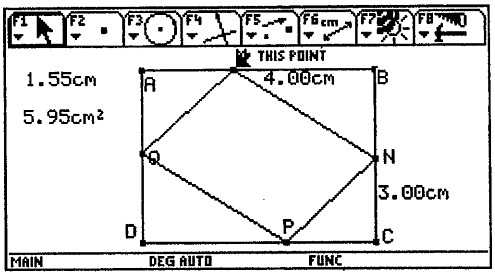
ABCD est un rectangle. AB mesure 9 cm et BC mesure 6 cm. Les points M, N, P et Q sont tels que AM = BN = CP = DQ. Où faut-il placer le point M sur [AB] pour que l'aire du quadrilatère soit la plus petite possible ?

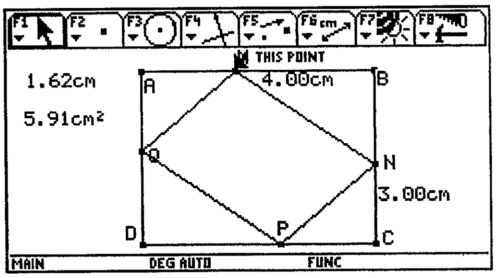
Ce problème est tiré de la brochure inter IREM « MATHS en seconde : énoncés et scénarios ». Il nous a servi à illustrer une dimension du travail algébrique qui devient essentielle au lycée, dès la classe de seconde : la dimension fonctionnelle. Différentes possibilités d'exploitation ont été a priori prévues : une activité introductrice à la notion de fonction, une activité de réinvestissement du travail sur les fonctions, à la fin de ce travail, une activité de révision sur les fonctions en première S, avant de se lancer dans l'analyse, un problème d'optimisation proposé en première après enseignement de la notion de dérivée. Il va de soi que suivant le choix effectué, le scénario construit sera différent et le travail mathématique effectué lui aussi différent. Le scénario élaboré dans le groupe correspondait à une activité de réinvestissement, en fin de seconde ou début de première S, il a été conçu dans l'hypothèse d'un enseignement des fonctions avec calculatrices graphiques et, avec pour l'enseignant, une TI92 rétroprojetable permettant une simulation géométrique et un traitement algébrique de l'optimisation, suite à une introduction du problème avec la TI92 faite par le formateur.

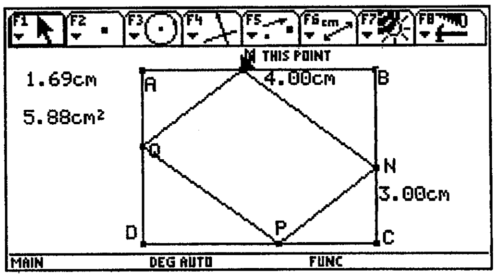
Le scénario construit concerne une séance de 2 heures, avec une organisation sous forme de travail en groupes pour faire face à la complexité de la situation. Il est constitué de quatre phases.

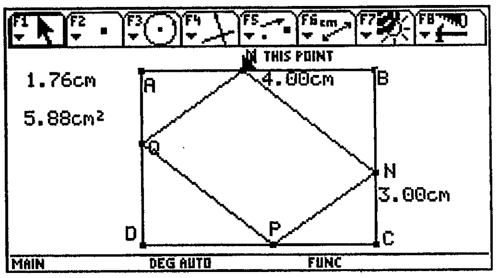
Phase 1 : Présentation du problème, première approche (10 minutes environ)

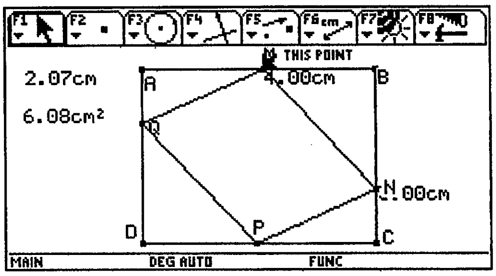
Cette présentation se fait à l'aide de la TI92 rétroprojetable, en utilisant l'application géométrie qui permet de visualiser la variation de l'aire lorsque le point M se déplace sur le segment [AB] (cf. les copies d'écran ci-après). On demandera bien sûr aux élèves de faire des conjectures sur la variation de l'aire lors du déplacement de M et sur le minimum avant de lancer une animation ou de déplacer le point M. On peut s'attendre à ce que des positions particulières comme celle correspondant au milieu de [AB] soient conjecturées comme correspondant au minimum de l'aire. L'animation avec affichage des valeurs respectives de AM et de l'aire du quadrilatère permettra de les disqualifier.

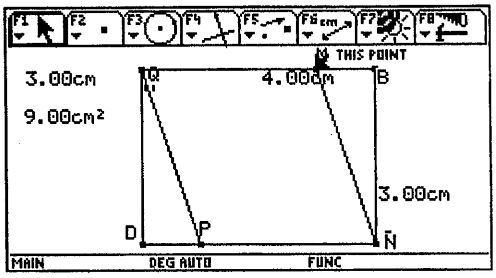




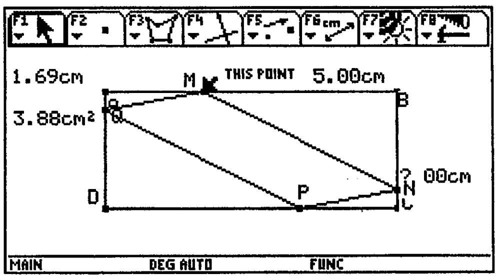


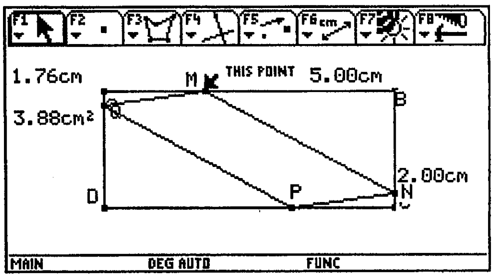


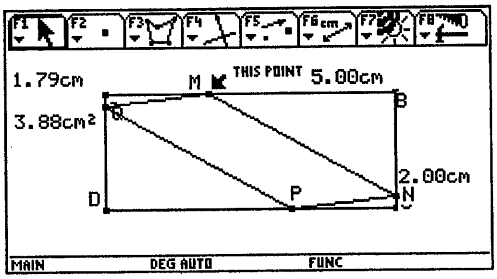


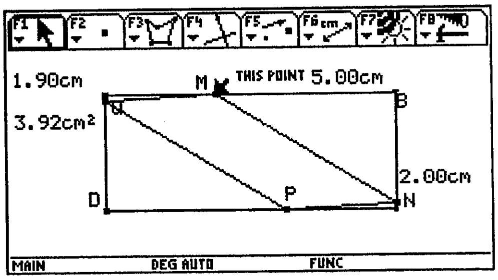


Les dimensions du rectangle pour la figure tracée sont ici de 5cm et 2cm. Le minimum dans ce cas correspond à AM à : $\frac{1}{4}(5+2)$ soit 1,75. Cette valeur pourrait théoriquement apparaître à l'affichage qui fournit des nombres décimaux à deux décimales, mais on notera que, vu l'effet de la discrétisation sur le pas de variation de AM, elle ne correspond pas ici à une des valeurs affichées. On pourra toujours s'arranger pour se retrouver dans ce cas là. Ceci permet de ne pas fermer le problème prématurément. A l'issue de cette première approche collective du problème, le groupe classe sera donc arrivé à la conviction que, au moins pour le cas du rectangle tracé, l'aire, maximale lorsque AM est nul, diminue ensuite, atteint un minimum puis recroît et que ce minimum n'est obtenu, ni lorsque M est au milieu de [AB], ni lorsque N est au milieu de [BC]. Il est de plus très facile de faire bouger les points de base de la figure pour tester si ces conjectures restent valides lorsque les dimensions du rectangle changent, ce qui est ici le cas (sauf dans le cas particulier du carré), comme le montrent les copies ci-après obtenues avec un rectangle de 5 cm sur 2 cm.







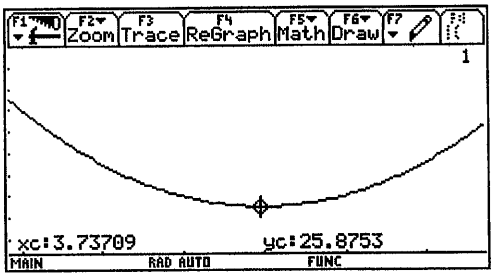


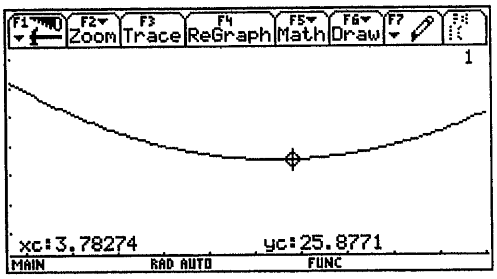
A la fin de cette phase d'appropriation et d'exploration collective, que l'utilisation de la TI92 permet de gérer efficacement en un temps relativement court (la figure a bien sûr été construite à l'avance par l'enseignant), la recherche est relancée cette fois sous forme de travail en groupes pour le rectangle de dimension 9 cm et 6 cm. Pour gagner du temps, si on anticipe les difficultés des élèves à ce niveau, on pourra discuter globalement des stratégies possibles pour calculer l'aire du quadrilatère et mettre en évidence l'économie de la stratégie par différence d'aires, puisqu'il ne s'agit pas là d'un enjeu réel de la situation.

Phase 2 : Recherche par groupes (40 minutes environ)

Cette phase de recherche a pour l'enseignant aussi une fonction de diagnostic. En effet, le problème est posé dans un cadre de géométrie de mesure et sa modélisation fonctionnelle est complètement à la charge de l'élève. Il est intéressant pour l'enseignant de voir comment, à l'issue de l'enseignement sur les fonctions, des élèves de seconde se comportent vis à vis d'une situation pour laquelle une modélisation fonctionnelle est adaptée mais non donnée. La modélisation peut-être induite par le type de problème à résoudre : chercher un extremum, s'il renvoie bien pour les élèves à la notion de fonction, mais ceci ne sera pas forcément automatiquement le cas et les élèves peuvent rester dans le cadre initial en choisissant des valeurs numériques pour AM et en essayant d'approcher progressivement le minimum cherché. Le travail en groupes peut aider les élèves, s'ils restent dans le cadre initial, à obtenir en un temps raisonnable, un nombre important de résultats numériques et à arriver même à la valeur de l'extremum puisque la valeur correspondante de AM, tout en étant décimale, n'est pas très complexe : 3,75. Il peut aussi aider au dépassement de cette première approche, si des membres du groupe mobilisent une modélisation fonctionnelle. On peut aussi penser que, pour rendre plus facile la répétition des calculs, en particulier à la calculatrice, certains élèves, sans penser véritablement en termes de fonctions, chercheront néanmoins à exprimer par une formule littérale l'aire du quadrilatère arrivant à une expression de la forme : $2x^2-15x+54$ ou $2AM^2 - 15AM + 54$.

Le lien avec les fonctions du second degré et les paraboles peut alors s'établir à partir de cette expression. Il ne s'agit cependant pas d'une des fonctions officiellement au programme et on peut raisonnablement faire l'hypothèse que l'étude des variations passera pour les élèves par une exploration graphique. L'utilisation de la commande Trace et l'usage éventuel de zooms pourront permettre d'améliorer l'approximation du minimum, voire de l'obtenir exactement si la discrétisation de l'intervalle des abscisses associée au fenêtrage le permet.





x	y1
2.75	27.875
3.	27.
3.25	26.375
3.5	26.
3.75	25.875
4.	26.
4.25	26.375
4.5	27.

x=2.75

MAIN RAD AUTO FUNC

x	y1
3.45	26.055
3.55	25.955
3.65	25.895
3.75	25.875
3.85	25.895
3.95	25.955
4.05	26.055
4.15	26.195

x=3.95

MAIN RAD AUTO FUNC

A l'issue de cette phase, on peut tabler sur une progression variable suivant les différents groupes mais une avancée réelle dans la résolution du problème avec, au moins pour certains groupes, l'obtention d'une expression algébrique de l'aire et la conjecture que le minimum est atteint pour la valeur : AM=3,75, soutenue par des données numériques ou graphiques. En revanche, il y a peu de chances que les élèves établissent de façon autonome une preuve de cette conjecture.

Phase 3 : Bilan de la recherche en groupes (30 minutes)

Cette phase n'est pas facile à gérer et l'enseignant a ici un rôle d'animation essentiel à jouer. On peut, pour la faciliter, demander à chaque groupe de préparer, pendant la phase de recherche, un transparent pour présenter son travail. On choisira de faire passer d'abord des groupes qui n'ont pas beaucoup avancé ou qui en sont restés à une approche géométrico-numérique. Il faudra éviter les répétitions inutiles tout en valorisant le travail de chacun des groupes. Si des élèves ont utilisé leur calculatrice graphique pour étudier les variations de l'aire, on pourra utiliser la TI92 rétroprojetable ou une autre calculatrice graphique rétroprojetable pour visualiser cette approche pour l'ensemble de la classe et favoriser la discussion.

A l'issue de ce bilan, on peut penser que la modélisation fonctionnelle sera en place ou prête à être mise en place et qu'on aura abouti à une conjecture valide sur la valeur de AM correspondant au minimum. Si des élèves ont découvert que cette valeur a une interprétation géométrique (1/4(AB+BC)), ceci contribuera bien sûr à la renforcer.

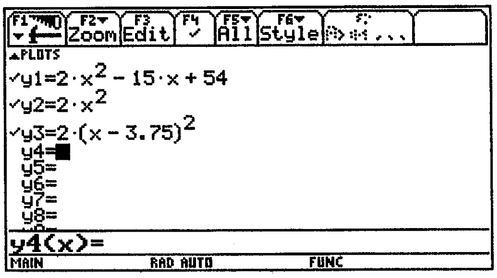
Reste le problème de la preuve de cette conjecture qui permettra de clore la situation. C'est l'objet de la phase 4 de la situation.

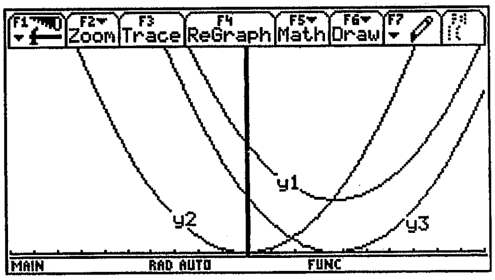
Phase 4 : Preuve de la conjecture et institutionnalisation (20 minutes)

Pour cette preuve, deux stratégies sont a priori mathématiquement possibles au niveau considéré : essayer de ramener l'expression de l'aire sous une forme fonctionnelle connue ce qui revient en fait à mettre le trinome du second degré sous forme canonique, ou tester directement la conjecture en calculant A(x)-A(3,75) et montrer que cette expression est toujours positive. Ces deux stratégies ne sont en rien élémentaires. On ne peut penser que les élèves les mobilisent spontanément, sauf s'ils ont déjà rencontré à plusieurs reprises des situations similaires. Leur exécution nécessite de plus des compétences algébriques certaines. On pourrait donc être tenté de s'arrêter au point où on en est arrivé à l'issue du bilan, l'enseignant assurant que la valeur obtenue correspond bien au minimum de cette fonction polynôme du second degré et que plus tard on aura les moyens de le démontrer.

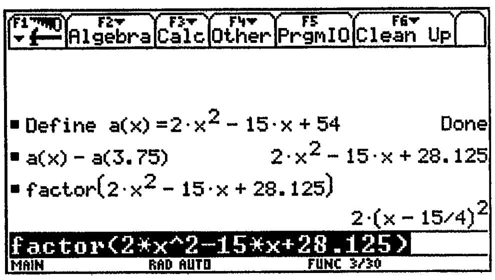
Il nous semble préférable d'arriver à une preuve effective, en exploitant si nécessaire l'aide au travail que peuvent apporter à ce niveau les modules graphiques et de calcul symbolique de la TI92, vu l'intérêt de ce travail.

Si la première option est choisie, on pourra piloter les différentes étapes du travail en réinvestissant le travail effectué sur les fonctions usuelles et les fonctions conjointes, en exploitant le fait que la conjecture donne les coordonnées du sommet de la parabole, que le coefficient de x^2 est égal à 2 pour passer par étapes de la parabole de référence à celle correspondant à cette situation. Les tracés successifs pourront être visualisés avec le module graphique (cf. copies d'écran ci-dessous).





Si la deuxième option est choisie, on pourra faire effectuer les calculs par le module de calcul symbolique de la TI92 (cf. écrans ci-après). Ce sera l'occasion de remettre en évidence l'intérêt de la factorisation pour étudier le signe d'une expression et de faire remarquer a posteriori qu'il était normal d'aboutir à cette forme puisque l'expression A(x)-A(3,25) s'annule pour x=3,25 et reste positive.



On pourra d'ailleurs faire aussi remarquer que cette méthode de preuve est efficace pour les fonctions du second degré et plus généralement les fonctions polynômes, à condition que l'on puisse conjecturer une valeur exacte des extremums.

Il sera bon ensuite de récapituler avec les élèves les différentes phases du travail mené, les résultats obtenus et les leçons que l'on peut tirer de cette activité de manière plus générale. Si elle est utilisée en début de première, l'enseignant pourra également annoncer que, bientôt, ils disposeront, pour déterminer les extremums d'une fonction de moyens systématiques, non réservés à quelques types particuliers de fonctions, ne nécessitant pas que l'on puisse auparavant conjecturer les valeurs exactes pour lesquelles ces extremums sont atteints.

On pourra également demander aux élèves de rédiger hors classe le cas particulier du carré ou tout autre cas à leur convenance, pour que le travail en groupes soit réinvesti individuellement et rédigé.

ANNEXE N° 13 : LES PROGRAMMES DE LA CLASSE DE SECONDE EN VIGUEUR EN 1998/1999 ET EN 1999/2000

II. Problèmes numériques et algébriques

La résolution de problèmes, issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante ***constitue l'objectif fondamental*** de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.

Dans cette perspective, le programme vise à compléter et à mobiliser les capacités acquises au collège ; les travaux s'articulent suivant deux axes :

— Consolider la ***pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique***, en relation étroite avec l'étude des fonctions.

— Poursuivre l'étude des ***équations et inéquations à une inconnue*** et des ***systèmes d'équations linéaires.***

Dans le cadre de ces travaux, un objectif important est d'amener les élèves à une ***meilleure maîtrise de l'emploi de variables***, à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : substitution de nombres à des variables (utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques, tableaux de valeurs de fonctions...), mise en équation de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions.

Le traitement des problèmes combine les ***calculs de valeurs exactes et de valeurs approchées*** ; il fait appel aux différentes formes de calcul : mental, à la main et à la machine. Les ***interprétations graphiques, l'usage des calculatrices*** jouent un rôle capital, à la fois comme outils et comme sources de problèmes.

1. Calcul littéral et calcul numérique

— Dans ce domaine, c'est la maîtrise des mécanismes ***élémentaires*** indiqués par le programme qui est importante ; ***toute virtuosité technique est exclue***, notamment en ce qui concerne les factorisations et les calculs portant sur des fractions ou des radicaux. On tiendra compte du fait que, sur ces différents points, les exigences à l'issue de la classe de troisième sont modestes. Il convient en outre de ne pas multiplier gratuitement les exercices de pur calcul littéral.

— La résolution de problèmes menant à des ***équations à une inconnue*** constitue un objectif important. Toute étude introduisant à priori des paramètres est exclue. La technique de résolution de l'équation du second degré est hors programme.

— De nombreuses situations conduisent à des ***inégalités*** ou des ***inéquations***. On se limitera à des exemples très simples et on s'appuiera sur des interprétations graphiques et sur la variation des fonctions, afin d'éviter un formalisme purement algébrique.

— Les résultats d'un calcul numérique peuvent s'exprimer sous ***différentes formes*** (valeur exacte, encadrements, approximations décimales...). On mettra en évidence, sur les exemples étudiés, que le choix d'une telle forme est fonction du problème posé.

a) Calcul sur les puissances

Formules $(ab)^m = a^m b^m$, $a^{m+n} = a^m a^n$ et $(a^m)^n = a^{mn}$, où m et n sont des entiers relatifs.

Il s'agit ici de compléter les acquis du collège ; on s'assurera que les élèves maîtrisent bien des puissances de 10 et savent les employer pour lire ou écrire un nombre en notation scientifique, et pour évaluer des ordres de grandeur.

b) Opérations sur les inégalités

— Signe de $ax + b$. Signe d'un produit, d'un quotient.

— Passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée dans une inégalité entre deux nombres positifs.

— Position relative de a et a^2 selon que $a \geqslant 1$ ou $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Le programme se limite à l'étude d'expressions à coefficients numériques. Ces questions sont à relier à l'étude des fonctions et à leur représentation graphique : on pourra ainsi interpréter le signe de $ax + b$, la comparaison de a et de a^2, pour $a \geqslant 0$, ou encore les opérations simples sur les inégalités ; par exemple, le fait que, si $0 < a \leqslant b$, alors $0 < 1/b \leqslant 1/a$, est à rapprocher de la décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$ et de l'allure de sa représentation graphique.

c) Valeur absolue, intervalles, approximations

— Valeur absolue, distance.

— Inégalité triangulaire : $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Valeur absolue d'un produit, d'un quotient.

— Intervalles ; notations des divers types d'intervalles.

— Pratique, sur des exemples numériques, du vocabulaire concernant les approximations d'un nombre a :

Lorsque $b \leqslant a \leqslant c$, on dit que b et c encadrent a.

La valeur absolue ne figure pas au programme de troisième.

En seconde, l'essentiel est de savoir interpréter $|b - a|$ comme étant la distance des points a et b, dans cette perspective, des relations telles que $|x - 2| \leqslant 1$ ou $|x - 2| \leqslant 1/100$ à l'aide des intervalles de centre 2.

Ces notions ne sont pas des objets d'étude en soi : elles interviennent dans les problèmes d'approximation. On pourra évaluer, sur quelques exemples numériques, la précision obtenue pour une somme ou un produit ; mais toute étude générale du calcul des approximations est exclue et aucun énoncé de résultats à ce propos

Lorsque $|a' - a| \leqslant k\ 10^{-p}$, où $1 \leqslant k \leqslant 10$, on dit que a' est une approximation (ou valeur approchée) de a à la précision $k\ 10^{-p}$. Approximations décimales de a par défaut, par excès, à 10^{-p} près (ces nombres sont de la forme $m\ 10^{-p}$, où m est entier).

n'est exigible des élèves. La pratique des troncatures et d'arrondis, déjà engagée au collège, sera poursuivie, sans formalisation de ces notions.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou inéquation à une inconnue à coefficients numériques.

Exemples simples d'emploi de factorisations pour leur résolution.

La résolution d'équations telles que $(x - 1)^2 = 2$, $(2x + 1)^2 = (x - 2)^2$, $x(x - 2) = 4 - x^2$ est un objectif raisonnable. Si, lors de l'étude d'une situation, on rencontre une équation telle que

$x^2 + x - 6 = 0$ ou $x + \dfrac{1}{x} = 3$, des indications doivent être données sur la méthode à suivre ; mais il n'y a pas lieu de multiplier ce type d'exemples ni, *a fortiori*, d'en systématiser l'étude. De même, pour les inéquations, l'étude d'exemples tels que : $x^2 \leqslant 2x$, $2 \leqslant x^2 \leqslant 4$ constitue un objectif raisonnable.

L'étude des équations ou inéquations comportant des radicaux est en dehors des objectifs du programme ; il en est de même pour celles qui comportent des valeurs absolues, mis à part les exemples numériques du type $|x - a| = b$ ou $|x - a| \leqslant b$. Pour les factorisations, on se limitera au cas de produits de deux ou trois facteurs du premier degré, et toutes les indications utiles doivent être fournies.

Pratique des opérations portant sur des nombres (puissances, fractions, radicaux...).

L'étude d'exemples tels que $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ ou $\dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 2}$ est envisageable, à condition que l'on ait précisé la formule réduite visée. En revanche, la réduction d'expressions telles que $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$, ou *a fortiori* $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$ n'est pas un objectif du programme.

Encadrement de l'opposé d'un nombre, de la somme de deux nombres, du produit de deux nombres positifs.

Les activités peuvent amener à encadrer une différence, un inverse, une racine carrée; les élèves n'ont pas à mémoriser les règles correspondantes.

Exemples d'approximation d'un nombre au moyen d'encadrements.

2. Systèmes d'équations linéaires

Il s'agit de systèmes d'équations linéaires à ***coefficients numériques.*** L'objectif est non seulement de mettre une technique de résolution, mais aussi ***d'étudier les problèmes issus d'autres disciplines et de la vie économique et sociale,*** en mettant en valeur les phases de mise en équation, de traitement mathématique, de contrôle et d'interprétation des résultats. On évitera les exemples trop techniques, coupés de tout contexte. L'étude d'exemples comportant des paramètres est exclue.

Résolution numérique et étude graphique de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues à coefficients numériques. Critère d'existence et d'unicité de la solution.

L'objectif est d'organiser et de conjuguer l'étude numérique et l'étude graphique, et non d'apprendre des formules de résolution; en particulier, la notion de déterminant et les formules de Cramer ne sont pas au programme.

Sur des exemples numériques, les élèves doivent savoir reconnaître et traiter les différents cas qui peuvent se présenter.

Travaux pratiques

Exemples d'étude par interprétation graphique de systèmes d'équations et d'inéquations linéaires à deux inconnues.

Exemples de mise en œuvre de méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à coefficients numériques (substitution, combinaisons linéaires).

La description générale de ces méthodes est hors programme. On se limitera à des situations ne comportant pas plus de quatre inconnues. L'étude d'exemples où il n'y a pas existence et unicité de la solution est en dehors des objectifs du programme.

III. Fonctions

Le programme est organisé autour de deux objectifs principaux:

— Familiariser les élèves avec la ***description de phénomènes continus à l'aide de fonctions.***

— Acquérir une ***bonne maîtrise des fonctions usuelles*** indiquées dans le programme et un certain savoir-faire, toutes les indications utiles étant fournies, pour l'étude de fonctions qui s'en déduisent simplement.

On exploitera largement des situations issues de l'algèbre, de la géométrie, des sciences et techniques et de la vie économique et sociale, en marquant les différentes phases : mise en équation, traitement mathématique, contrôle et exploitation des résultats.

Le programme combine les ***études qualitatives*** (croissance, allure des représentations graphiques...) avec les ***études quantitatives*** (majorations, recherche de maximums...).

Il ne porte que sur ***l'étude d'exemples*** et se place dans le cadre des ***fonctions définies sur un intervalle***; on évitera tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction...). Le plus souvent, l'intervalle d'étude sera indiqué lors de la définition de la fonction considérée. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles : on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles; on ne multipliera pas de tels exemples.

1. Génération et description des fonctions

On exploitera des situations variées : tracés graphiques, touches de la calculatrice, algorithmes de calcul, relations de dépendance issues de la géométrie, de la mécanique, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale.

Exemples de modes de génération de fonctions. Exemples de description d'une situation à l'aide d'une fonction. Représentation graphique d'une fonction dans un repère (orthonormal ou orthogonal).	Dans la plupart des situations étudiées en seconde, les fonctions sont définies par des formules algébriques simples. Pour que les élèves se forment une idée assez large de la notion de fonction, on donnera ***quelques*** exemples de situations menant à des fonctions définies différemment.
Parité, périodicité. Maximum, minimum d'une fonction. Fonctions croissantes, fonctions décroissantes.	Ces notions sont mises en place uniquement sur des exemples; on mettra en valeur leur signification graphique. Les notions de taux de variation, de maximum local et de minimum local ne sont pas au programme.

2. Fonctions usuelles

— A travers l'étude des fonctions figurant au programme et de situations menant à des fonctions qui s'en déduisent de façon simple, on mettra en valeur la ***diversité du comportement des fonctions***. Dans ce cadre, il est important que les élèves soient entraînés à mieux maîtriser les situations de ***proportionnalité***, dont l'étude a été abordée au collège, en relation avec l'étude des fonctions linéaires et des fonctions affines.

Exemples d'étude de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale...).	On s'attachera à mettre en évidence, à travers les exemples étudiés, la signification des propriétés des fonctions concernées (croissance, maximums et minimums, parité...). On pourra exploiter quelques exemples simples de problèmes d'optimisation, mais l'étude systématique de tels problèmes n'est pas un objectif du programme.

ANNEXE N° 14 : LA RETRANSCRIPTION DU PREMIER ENTRETIEN DE SUIVI AVEC BENJAMIN, LE 13/10/99

AL : On va commencer par regarder ta progression.

B : Là j'ai déjà fait un premier chapitre sur calcul numérique. Des révisions sur les règles qu'ils ont vues au collège. Distributivité, fractions. Puissances : là par rapport au collège il y a de nouvelles formules avec les entiers relatifs. Valeur absolue. Deuxième chapitre j'ai fait les équations. Rappel sur les équations du premier degré du collège. Equations du second degré avec les factorisations. Je leur avais fait un module sur les factorisations avec trois différentes techniques : soit on connaît un facteur, soit une identité remarquable, soit on mélange les deux. Cela préparait ce chapitre. J'avais fait les équations avec les valeurs absolues : $|x| = a$ et là je vais faire $|x-a| = d$. Je finis ça samedi et je commence les vecteurs samedi.

AL : Ensuite pour l'année.

B : La progression de l'année je l'ai là. Je pensais faire les inégalités et les inéquations dans la foulée mais mon conseiller pédagogique m'a déconseillé de le faire. Cela faisait trop de calculs pour eux à la suite. Donc c'est pour ça que j'ai mis les inéquations ici. Je ferai plutôt vecteurs. Je ferai les inéquations après. Après bases et repères. Orthogonalité. Cela va m'amener juste avant les vacances d'hiver. En sachant que je dois faire les systèmes assez rapidement. Je vais les traiter en modules, je ne ferai pas de cours.

AL Pourquoi assez rapidement ?

B : Assez rapidement dans l'année. J'ai envie de faire ça assez vite parce que ce n'est pas très difficile et il faut que ce soit fait. Je pensais faire ça en même temps que les équations de droites et comme il n'y a plus les équations cartésiennes, le parallèle se fait moins facilement. Donc je pense que je vais en rester à la résolution de systèmes niveau collège.

AL : Quels ont été tes critères pour faire cette progression ?

B : Au départ, c'est une classe où la plupart s'oriente vers une première ES ou STT. C'est à dire que géométrie et géométrie dans l'espace cela ne va pas leur servir à grand-chose. Donc j'avais pensé mettre ça en fin d'année. Mais après réflexion, c'est mon conseiller pédagogique qui me l'a dit, ce n'est pas terrible de bloquer ça au dernier trimestre. Comme c'est pas des matheux, ils vont avoir du mal à faire ça. Ils vont avoir un dernier trimestre catastrophique par rapport au reste alors que c'est au dernier trimestre qu'on décide l'orientation. Donc c'est vrai que c'était pas judicieux. C'est pour cela que je mets un peu d'homothétie ici. Pareil je n'ai pas bloqué les statistiques en fin d'année, comme ils vont en ES. Je fais ça à la rentrée des vacances d'hiver. J'ai essayé de me baser un peu sur leur orientation, même s'il y en a trois ou quatre qui veulent aller en 1S. Quitte en fin d'année à faire de vrais groupes de modules. Au départ je me suis basé sur ce qu'avait fait mon conseiller pédagogique l'année dernière et ce que je pensais de la classe, un peu suivant leurs intérêts.

AL : Qu'est-ce qui a motivé ton choix de placer au début les calculs numériques et algébriques ?

B : J'avais hésité entre les calculs et la géométrie. Mais la géométrie cela leur fait peur. Alors que les calculs cela passe bien, c'est pas trop violent. C'est vraiment la continuité du collège. Puis ce n'est que des calculs, il n'y a rien de vraiment difficile.

AL : Quels sont les objectifs que tu vises cette année en algèbre ?

B : Là j'en suis dans les équations, et mon objectif est que dès qu'ils voient une équation du second degré ils aient le réflexe de factoriser. Ce qu'ils n'ont pas du tout. Il y en a encore qui développent. Dans le cours, je leur ai détaillé la méthode en leur disant qu'il fallait se ramener à une équation du type un membre égal à 0, ensuite on factorise et on applique la propriété, etc. Mon principal objectif c'est ça, c'est que cela devienne un mécanisme. Bon sur les autres parties de l'algèbre j'avoue que je n'ai pas encore réfléchi parce que j'y réfléchis quand je prépare le cours. Là, mes cours sur les inéquations et les vecteurs sont prêts.

AL : Sur les inéquations ?

B : Sur les inéquations, qu'est-ce qu'il y a de nouveau ? Ils savent déjà les résoudre, le régionnement du plan ils savent faire aussi.

AL : Les tableaux de signes.

B : Oui, oui. Ça, j'avais expérimenté pendant le stage de première année. Cela a au moins duré quatre semaines et encore au bout il y en avait qui avaient des difficultés. Oui ça c'est vrai, j'y pensais plus, c'est le gros objectif.

AL : Est-ce que tu prévois que tes élèves vont rencontrer des problèmes en algèbre cette année ?

B : Encore dans les factorisations. Si on a $(x+1)^2$, quand on factorise par x+1, dans le meilleur des cas il reste x+1, sinon il reste 1 ou alors il ne reste rien du tout. Ils ont vraiment de grosses difficultés là-dessus. Je m'y attendais. On en avait parlé en groupe, le formateur nous avait dit : ça, ça va pas louper. Et en effet ça n'a pas loupé. Là je ne m'y attendais pas vraiment au départ, c'est le formateur qui nous l'a dit. Il y a aussi une difficulté à laquelle je ne m'attendais pas du tout : ils ont énormément de difficultés avec les signes. Si on a le signe "×", on ne met pas de signe et il y en a qui sont perdus. J'ai encore eu le cas hier : on avait 4(x-7) "monsieur, qu'est-ce qui a entre 4 et x-7 ? ". Il y en a qui disent que c'est "×" et d'autres qui veulent mettre un plus. Je ne m'y attendais pas. Sinon les difficultés auxquelles je m'attends : je dirais des erreurs de calcul. Je l'ai constaté sur le premier DS, c'est vraiment important. Je m'y attendais plus ou moins. Je sais ce que c'est, j'en ai fait moi-même. Et puis c'est normal. Mais c'est vraiment important. Sur les DS que j'ai corrigés, il y a au moins trois points pour des erreurs de calcul. En ce qui concerne les difficultés avec les signes, je ne m'y attendais pas du tout. Je ne vois pas du tout d'où cela vient. Pour cela j'ai essayé de faire de l'aide individualisée, de détailler les opérations, j'ai écrit $4x^2+5$, qu'est-ce qu'on fait ? On prend 4 fois x^2 et on ajoute 5. Il y en a certains ça marche, mais d'autres ne comprennent pas du tout. Il y en a qui sont incapables d'écrire la phrase. Je l'ai là ma feuille d'aide individualisée. J'ai une élève qui est incapable d'écrire en français ce qu'elle fait. Mais c'est général, elle a du mal partout. Beaucoup ont vraiment du mal à se rendre compte des opérations que l'on fait.

AL : On va regarder ce que tu as fait. Ce qui m'intéresse c'est à la fois le numérique et l'algébrique. Là on va regarder chapitre par chapitre.

B : Pour les cours. Dans le premier cours, j'ai distribué la première feuille d'exercices, c'étaient vraiment des calculs. J'ai trouvé que commencer par ça, c'est pas difficile et c'est vraiment très bien passé. Sur les fractions aucun problème. Je leur avais donné des exercices à faire.

AL : Avec quel livre travailles-tu ?

B : Pythagore. Il y a des activités qui sont pas mal, mais je ne trouve pas beaucoup d'exercices intéressants. Pour les modules je suis obligé de faire beaucoup de feuilles. Le n°7, on leur demande de faire le calcul avec les parenthèses puis sans les parenthèses. Et ils n'ont pas trop bien compris le système. Eux ils ont supprimé les parenthèses en appliquant la règle des signes. Alors que moi j'attendais, à mon avis c'était l'esprit de l'exercice, qu'on enlève les parenthèses mais qu'on ne distribue pas les signes et que l'on se rende compte que ce n'est pas du tout la même chose. Bon eux ils ont appliqué la règle. Finalement tant mieux parce qu'ils la connaissent. Je les avais prévenus quand même mais il y en a qui m'ont dit que ce que j'avais écrit c'était faux. Bon l'objectif de l'exercice est passé complètement à côté. J'avais donné le 12 pour déjà donner des lettres, pour voir comment ils se débrouillent.

AL : Et alors ?

B : On va regarder la correction dans le cahier de bord. Donc ce que j'ai fait... Bon c'était le tout début et je ne sais pas quel est leur passé. Il y en a qui ont déjà vu ça plein de fois, il y en d'autres qui l'ont peut-être vu vite fait, donc on ne sait pas. Là systématiquement je reprenais des exemples numériques. Par exemple ils ne savaient pas réduire $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, je leur disais : si tu as $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ qu'est-ce que tu fais ? Ils savent le dire donc qu'est-ce que tu fais pour x et y ? Ils savent le dire. A chaque fois je reprenais comme ça. Ensuite j'ai commencé le cours sur le calcul numérique. J'ai fait le 1 et le 2 en classe, cela s'est pas mal passé. Mais cela a bien été sur le coup. Mais après tu vas voir, j'ai fait une interro de cours, bon là, la pataugе totale. Ensuite la deuxième heure j'ai corrigé l'exo, en cours j'ai continué. Bonne participation. J'essaie de les faire participer quand je fais le cours, surtout que là ce sont des choses qu'ils connaissaient. C'est une classe qui participe bien. Ensuite des exercices, on en a commencé en classe. Les 14 et 15 : simplifier cette écriture, pour voir encore ce que cela donne en calcul littéral. Et puis encore pareil : simplifier l'écriture de A, cela fait intervenir des identités remarquables en plus. La correction : des difficultés mais ils savent appliquer les identités remarquables. Et là voilà : beaucoup de simplifications abusives : $\frac{a+b}{a}=b$, cela ne loupe pas. Cela je le comprends mieux que le coup de la factorisation. La factorisation... Remarque c'est pas évident pour eux non plus qu'il reste quelque chose c'est vrai. Mais là je comprends qu'ils simplifient. C'est trop tentant. et ça c'est peut-être une erreur de ma part : j'aurais peut-être dû leur rappeler la règle dans le cours : $\frac{k \times a}{k \times b}=\frac{a}{b}$, je l'ai pas fait. Je l'ai fait plus tard en module.

AL : Là tu n'as fait que ça : rappeler la formule ?

B : Oui et j'ai pris aussi un exemple numérique sans doute. Surtout au début, je prenais pas mal d'exemples numériques parce que pour certains cela avait l'air vraiment nouveau de prendre des lettres. Je disais a = ça, b= ça, tu regardes ce que cela donne. Ensuite j'ai commencé les puissances, les propriétés qu'ils connaissent. J'ai inclus ça aussi, je ne sais pas si c'est fait au collège, $(-a)^n$.

AL : cela ne serait peut-être pas fait comme ça. C'est passé comme ça ?

B : Oui mais il y a des confusions entre $(-a)^n$ et a^{-n}. J'ai beaucoup de $a^{-n} = (-a)^n$. Je ne sais pas s'ils confondent ces deux choses ou s'ils ne connaissent pas cette formule et il faut qu'ils inventent quelque chose. Je n'en sais rien. C'est pas mal passé : je l'ai repris en module et je leur ai demandé $(-1)^2$ ça fait quoi. Ils savent répondre. La généralisation elle tombe bien.

AL : Sur des exemples numériques oui, mais avec des lettres ?

B : Ah oui l'écriture... Ils ont énormément de mal. On va le voir avec la valeur absolue c'est pareil. Ensuite activité 3 page 7 que j'ai fait moi-même au tableau pour justement introduire les nouvelles formules avec les entiers relatifs. On commence par revoir les formules qu'ils connaissent et on admet que ce résultat reste vrai. A la réflexion cela ne servait à rien de faire l'activité. Finalement on l'admet, donc tout bien réfléchi c'est une perte de temps. Au départ cela me semblait intéressant et puis en la faisant je me suis dit qu'on l'admet vraiment, on ne fait rien du tout. C'est pas mal. Mais ce n'était pas l'objectif que je m'étais donné. Ce qui me semblait intéressant c'était ça, mais ça on leur fait faire au collège. J'ai continué quand même, cela ne leur fait pas de mal de revoir. Et à chaque fois ils admettent la formule pour les entiers relatifs. Je me suis demandé comment faire autrement. Je ne vois pas trop à part utiliser $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

AL : Sur des exemples peut-être.

B : Oui comme c'est fait ici.

AL : Oui car on commence à le faire avec les lettres...

B : Oui si on leur dit : quand n est négatif, -n est positif. Ils vont patauger. Donc je l'ai faite moi-même avec leur participation et j'ai bien insisté sur la différence entre entiers naturels et entiers relatifs. Je ne sais pas si c'est passé. Ensuite j'ai introduit les puissances de 10. Je l'ai fait pour introduire après la notation scientifique. Cela passe pas mal et en devoir le 30 page 16. Alors là, c'est une erreur aussi. Comme j'avais fait les puissances, j'avais cherché des exercices sur les puissances. En regardant là-dedans je vois : ensemble de nombres, fractions, lettres, identités remarquables et puis je n'ai rien vu d'autres. Il y avait des puissances ici, je leur ai donné ça. Bon c'était une erreur : je l'ai donné trop tôt, ce n'est pas une application directe du cours. Je n'applique pas du tout les formules que je leur ai données. Alors ils sont capables de le faire mais cela n'a rien à voir avec ce que j'avais présenté dans le cours. Je ne sais pas pourquoi je leur ai donné ça parce que là il y a des exercices sur les puissances. Mais ils ne sont pas si terribles que ça non plus. Regarde : il faut les mettre sous une certaine forme. Ce ne sont pas des applications directes.

AL : C'est quoi des applications directes ?

B : Calculer le truc de base : $(a^3)^2 = a^6$. Bon j'en ai mis quelques exemples dans le cours mais c'est quand même pas mal qu'ils se fassent la main là-dessus.

AL : Tu voulais des choses dans le littéral ?

B : Non j'aurais quand même voulu dans le numérique au début. Le littéral on va y venir.

AL : Bon là quand tu as $(\frac{13}{8})^5$, il faut déjà transformer le 8 en 2^3, après 2^{-3} parce qu'on divise...

B : Oui mais je donne ça à faire à la maison il n'y en a pas un qui sait faire. C'est trop difficile. Cet exercice je l'ai fait mais en module. Moi je pensais application directe, appliquer des formules bêtement.

AL : Est-ce que ta progression tu l'as faite aussi en fonction de ton manuel ? Là je vois qu'ils ont mis les valeurs absolues eux aussi dans le premier chapitre.

B : Non. La valeur absolue, je ne l'ai pas faite comme ça du tout. Moi je l'ai fait avec des distances, c'est plus dans l'esprit du programme. Donc oui c'est possible que j'aie mis ça là-dedans parce que c'était là-dedans. Mais après... Je bosse pas mal avec le Pyramide, Fractale. Mais bon quand il faut préparer tes cours au début c'est pas évident. Bon j'avais récupéré le cours... Bon moi mon cours de seconde, cela n'a plus rien à voir. J'avais celui de mon frère qui a fait sa seconde il y a quatre ans, je me suis un peu inspiré de ça, un peu de ça et puis voilà.

Après j'ai fait la première partie de l'évaluation. J'ai des petits commentaires. Le premier exercice c'était de l'algèbre : des développements, des factorisations. Il fallait utiliser les formules qu'on avait obtenues en haut pour résoudre des équations. La deuxième partie : on se posait un problème géométrique, un problème d'aire. Alors ils ne mettaient pas du tout les différentes questions en relation. Je n'avais pas encore fait d'équations : résolution de $10-x = 0$, $x = \frac{0}{10}$ ou $x = \frac{10}{0}$ encore de la confusion d'opération et des difficultés pour poser l'équation. On leur demandait la formule littérale de l'aire, on voulait que cela fasse 12 cm² je crois et il y en a qui ne voient pas du tout comment on pose l'équation.

AL : Où étaient exactement leurs difficultés ? Ils ont eu du mal à trouver la forme littérale de l'aire ?

B : Non, la difficulté était de dire : je connais la formule littérale de l'aire, l'aire doit faire tant. Ils sont incapables de mettre un signe égal entre les deux. Il y en a très peu qui m'ont donné l'équation. Moi j'ai été assez déçu par les résultats de l'évaluation. Il y avait un truc dur : la géométrie dans l'espace. Il était piégeux. Moi je ne l'ai pas trouvé intéressant : on leur tendait un piège et ils sont tombés dedans. L'exercice 3, c'est de l'algèbre. C'était un tableau à remplir. Il y avait un exemple au début : on leur demandait le signe de $-5x$ et il fallait argumenter. Je m'y attendais : beaucoup considèrent que x est positif et beaucoup de généralisation à l'aide d'un exemple. Cet exercice, je m'en suis servi pour faire ma première aide individualisée. Ensuite j'ai corrigé l'exercice qui était une erreur, mais qui n'a pas posé de problème. Ce sont des identités remarquables, des racines. Cela a été. En cours, j'ai continué : notation scientifique, exemple, utilité (je leur ai dit que c'était pour les très grands ou très petits nombres). Bon cela a été à peu près. C'est vrai qu'à chaque fois que j'en ai fait, des fois les calculs posent un peu problème mais à la fin quand on a par exemple 39.10^{-7}, je leur demande : c'est le résultat ? Ils me disent : non ce n'est pas la notation scientifique. Ils ont compris que le nombre de devant doit être inférieur à 10. C'est bien passé et je trouve cela bizarre. Je ne trouve pas ça très naturel pour eux. Ensuite les racines, les rappels du collège et puis il n'y a plus grand-chose à faire sur les racines, il n'y a plus de calculs. J'ai quand même donné la définition de l'expression conjuguée, parce que cela permet d'utiliser une identité remarquable. Je n'ai pas fait grand-chose sinon, je n'ai pas fait d'exos. En classe on a fait le 18 page 16. Si j'ai quand même fait celui-là où on leur demandait de donner des dénominateurs entiers. Le 20 page 16, c'est la même chose et on utilise le conjugué. C'est pas pour faire des calculs sur les racines, c'est pour les identités remarquables. Et puis le 69 page 19, c'est de la notation scientifique. Dans le 20 il y a eu beaucoup d'erreurs de calcul. Sinon en deuxième partie de l'évaluation, c'était du traitement de données. Il y avait des calculs avec des heures, des minutes. Alors ça : 1h20 - 0h50, ils mettent une virgule. Il y avait un graphique et ils n'ont rien compris et je t'avoue que moi non plus je n'avais pas compris. Pour moi c'était sans intérêt et mal posé. L'exercice 5 de géométrie, là je me suis régalé. Il y a eu un festival de théorème-élève. Ils m'en ont inventé des terribles. Il y en a qui font vraiment n'importe quoi.

AL : Où est-ce que tu as entendu parler du mot "théorème-élève" ?

B : C'est un formateur qui m'a mis ça dans la tête.

AL : Quand est-ce que vous avez parlé de ça ?

B : Quand on fait le groupe échange… J'avais constaté en faisant les modules que le cours n'était pas parfait, j'ai fait une interro de cours. Voilà ce que je leur ai donné. J'en ai donné deux différentes. La première c'est : qu'est-ce qu'un nombre rationnel ? Comment on les note ? Ce n'était que du cours, pas d'exercice. Pour l'autre j'ai demandé ce qu'est un entier relatif. Ensuite les formules de puissances et des calculs de fractions. Et ici je demande : qu'est-ce que la racine carrée et qu'est-ce que la notation scientifique ? Je m'attendais à ce que ça ce soit difficile à reformuler. Alors là s'il y en a deux qui m'ont donné une bonne définition c'est le bout du monde. Comment ça se note ? J'ai eu de tout. Pour les entiers relatifs c'est un peu mieux mais guère mieux. Beaucoup de confusion entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ dans les ensembles de nombres. Les formules sur les puissances, ils les connaissent. Alors là, dans le cours je prenais la précaution quand je faisais par exemple, là je divise par b et par d, je mettais $b \neq 0$ et $d \neq 0$, et il y en a très peu qui ont su me le recracher ici. Je m'y attendais aussi : ils apprennent la formule et ce qui est autour c'est du bla-bla. C'est justement pour mettre l'accent qu'il faut tout apprendre. Oui je demandais dans quel ensemble : a et b sont des réels, etc. Ils voyaient même pas ce que je voulais dire. Pour eux il faut qu'ils mettent quelque chose donc ils mettent n'importe quoi. Là aussi de la confusion entre la somme et le produit. La définition de racine a été difficilement restituée mais tu sens que la plupart a compris ce que c'était. Mais il y en a beaucoup qui font une phrase bancale mais qui montre qu'ils ont à peu près compris mais après ils écrivent que c'est le nombre tel que $x = x^2$. Est-ce que c'est l'oubli de la racine ? Quand tu vois ça, tu te dis qu'ils n'ont pas compris. Bon je leur ai donné les exercices 35, 45, 73 et fiche. Ouais à la fin du bouquin il y a des fiches de révision de collège. Donc avant de faire le cours en question ou de faire les exercices je leur demande de lire la fiche. C'est de la révision de proportionnalité que je leur ai demandée. La correction du 73 : la masse du proton. Celui qui a été au tableau me dit : je n'ai pas compris ce qu'il fallait faire. J'ai demandé à la classe : personne n 'avait compris. Donc là j'ai pris un exemple simple ; ils ont su me dire : ça fait ça. C'est bizarre, finalement non c'est pas bizarre, ils se laissent rebuter par les chiffres. Alors que si tu prends des chiffres tout à fait communs, ils savent et répondent. Mais dès qu'ils voient des nombres bizarres ils ne savent plus. Ils n'essaient pas de se dire : qu'est-ce que je ferais ? C'est normal ils sont en seconde. Donc là ils savent te répondre, donc je leur ai donné à refaire. J'ai fait le cours de calcul numérique, valeur absolue. Alors pour introduire la valeur absolue... Je suis allé voir mon conseiller pédagogique et le cours que j'ai vu c'était ça et cela m'a vachement plu. Il prend plusieurs nombres et intuitivement il demande : c'est quoi la distance entre 7 et 21. Et ils répondent tous que ça fait 14, alors tu prends un positif, un négatif, etc. En général ils savent répondre.

AL : Tu avais fait une droite ?

B : Non il n'en a pas fait et je n'en ai pas fait non plus. J'avais prévu mais... Bon il y en a un qui a dû me donner un négatif et tout de suite il y en a un qui a dit : non, c'est une distance. Tu vois, ça ils comprennent alors que je n'ai vraiment rien défini. Donc ça c'est pas mal passé. J'ai défini la valeur absolue comme la distance de 0 à x, j'ai dit que c'est toujours positif. Après, sur des exemples, je leur avais dit : si je vous donne -8, sa valeur absolue c'est quoi ? Et là je suis passé au cas général. Tiens je te montre ce que je m'étais posé comme questions pour introduire la valeur absolue. Alors première idée : utiliser l'activité du livre. C'était un peu bébête : c'est la machine valeur absolue. Je rentre -8, il ressort 8. Et puis la deuxième activité c'est celle que j'ai faite, que je trouvais pas mal, cela les fait participer et c'est plus en accord avec le programme. C'est dit explicitement qu'il faut insister sur le rapport entre distance et valeur absolue. Sur les exemples numériques, il n'y a aucun problème et j'ai dû leur donner un exercice à chercher quand même. Et quand je suis passé dans les rangs, c'est là que un sur deux ils m'interpellaient : vous avez dit que la valeur absolue c'est positif, là il y a un signe moins. Bon ça je m'y attendais mais cela a été au-delà de mes espérances. Alors à chaque fois je leur réexpliquais. Je reprenais l'exemple numérique et cela allait. Mais là x négatif, cela ne passe plus. Alors là, moi après je ne sais plus quoi dire. Alors j'ai laissé couler. Bon quand ils me demandaient, je réexpliquais. Bon au bout d'un moment ils disent qu'ils ont compris soit par politesse, soit parce qu'ils en ont ras le bol. Je me suis dit qu'il faudra y revenir de toute façon, je ne peux pas laisser ça comme ça. Après résolution de $|x|=a$, suivant le signe de a. C'est pas mal passé, j'avais fait des exemples numériques aussi. Bon en tout cas ils ont bien retenu que la valeur absolue est toujours positive. 74, 76 je leur ai donné à la maison : c'est des calculs sur les valeurs absolues. Le 76, je m'attendais aussi à des difficultés si $a>b$... Et 139, 140 : des phrases en français à écrire et réciproquement. Les corrections : le 73, cela s'est bien passé, comme je leur avais dit comment il fallait faire cela n'a pas posé problème. 35, 45 : les proportionnalités, pas de problème. 74 : alors voilà ça je m'y attendais aussi. Il y avait d'ailleurs une élève qui était venue me demander dès la fin du cours précédent. D'ailleurs c'est ce que soulevait le problème : quand on voit "valeur absolue de ça égale" et "la somme des valeurs absolues", c'est la même chose. Donc ça ça n'a pas loupé parce que $|a+b| = |a|+|b|$. J'ai demandé à la classe ce qu'ils en pensaient. Il y en a : ouais bien sûr. D'autres : non bien sûr. Et là justement il y avait les deux exemples. Je leur ai dit : regardez là. Ah oui d'accord. Alors j'ai écrit en gros, en rouge : on n'écrit pas ça. Là tu leur montres rien d'autre car il n'y a plus l'inégalité triangulaire. S'il y avait l'inégalité triangulaire, tu leur montres et ils oublient ça. Ils ont plus rien pour se raccrocher. Celle-là n'est pas complètement effacée. Ensuite le 76, je m'en doutais : quelques difficultés pour passer de $a<b$ à $a-b<0$. Visiblement il y en a qui ne sont pas familiarisés, ils n'ont jamais vu. Bon il faut s'adapter, c'est normal.

AL : Ils ont jamais vu avec des lettres ?

B : Peut-être.

AL : Qu'est-ce que tu penses qu'ils n'ont jamais vu ?

B : Je pense qu'ils n'ont jamais vu que ça, ça veut dire négatif.

AL : Ah d'accord. Je croyais que c'était transposer b.

B : Non, cela ne pose aucun problème. L'élève qui était au tableau ne comprenait pas, cela tombait bien. Alors là pour expliquer ça je me suis appuyé sur une droite : regarde en dessous de 0, c'est inférieur, c'est négatif. Bon c'est bien passé. Alors là c'est pareil, dire que si c'est positif cela ne change pas de signes, si c'est négatif on change de signe. Bon le premier coup cela ne passe pas, deuxième coup cela finit par passer mais tu sens que... Pourtant je détaillais bien : si c'est négatif, on peut mettre un moins devant, cela fait -(a-b), on distribue bon... Ensuite 139,140 : cela a été pas mal. Bon il y en a un qui m'a dit qu'il n'avait pas compris mais à mon avis c'est parce qu'il n'avait pas fait ses exos.

AL :Et cela tu l'as retesté après ?

B : Pas sur les valeurs absolues. J'ai refait en aide individualisée avec ceux qui ont des difficultés. Il y en a pour qui cela passe pas mal, même si l'expression n'était pas tout à fait ce que j'attendais : au lieu de dire on prend le double, ils multiplient par deux. Mais il y a certains qui vraiment ne comprennent rien. je ne l'ai pas repris en classe entière. J'ai fait un travail sur les ordres de grandeurs. J'ai trouvé cela intéressant pour qu'ils voient que les puissances de 10, ils pouvaient placer ça sur l'axe. On l'avait commencé en classe. Parce que je savais que si je leur donnais directement à faire à la maison, au meilleur des cas ils remplissaient au hasard, au pire ils disaient : je comprends rien. Donc je leur ai demandé ce qu'on pouvait faire et il y en a qui ont proposé de mettre sous notation scientifique. Donc au moins tout le monde le savait, tout le monde a pu faire à la maison. Après j'ai donné le 77, 78. Des valeurs absolues et des résolutions d'équations. Et le 41 : c'est de la proportionnalité.

AL : Tu les as 3 jours en classe entière : mardi, vendredi, samedi ?

B : Parce que je n'ai commencé l'aide individualisée que la semaine dernière. Donc jusqu'à la semaine d'avant je les ai pris en classe entière. Alors là on corrige le 41. Alors ça je m'y attendais : la conversion km en cm. Je leur ai dit que cela n'avait aucun sens de diviser des cm par des km. Bon quand tu leur dis, ils disent : oh ben oui c'est vrai. Parce qu'ils l'ont déjà vu l'année dernière. Cela revient. C'est l'erreur d'inattention, ils n'ont pas fait gaffe à ce qu'on leur demandait. Ensuite 77, 78, cela a été. Ensuite je leur ai fait une activité en classe pour faire le lien entre valeur absolue et distance. Ce que je n'avais pas encore fait. J'ai essayé de voir s'ils comprenaient quelque chose. Surtout que j'avais fait cet exercice. Je leur ai dit : on prend deux points a et b, qu'est-ce que vous pensez de la distance entre a et b ? Ils répondent : b-a. Et je leur ai dit : rappelez vous ce qu'on a fait hier, qu'est-ce que vous pensez des deux expressions ? Ils m'ont dit c'est égal. Je leur ai dit : on fait pareil pour l'autre. Je leur ai dit : voilà on a cette formule-là. Si je n'avais pas fait l'exercice avant, je n'aurais peut-être pas fait le lien, cela n'apporte pas grand-chose. Mais j'ai trouvé cela intéressant, on manipule un peu. Ensuite on a commencé en classe le 57 : c'est des simplifications avec des puissances.

AL : Au fur et à mesure tu continues à faire travailler des choses que tu as vues avant ?

B : Ouais. Surtout que ça, cette semaine-là, j'ai dû le faire en module. Et puis pour en faire encore un j'ai donné le 57. Et puis pour mardi seulement lire des fiches sur les équations parce que je commençais le cours équations. Correction du 57, on l'a fini, bien traité. Alors cours sur les équations. Rappels sur les équations à une inconnue, équations du premier degré, une petite définition et résolution de ça. Alors j'ai fait sur un exemple et j'ai donné la solution générale. Mais alors la résolution de $3x+2=0$, je l'ai faite proprement, c'est-à-dire : $3x+2=0$, $3x+2-2 = 0-2$. En mettant en rouge. Parce que dès que j'ai dit on va résoudre ça, ils m'ont : ouais on passe le 2 de l'autre côté. Ce que je fais aussi mais... Alors j'ai eu beaucoup de réticences : ouais cela ne sert à rien d'écrire ça. Alors je leur ai dit : c'est vrai, ça il ne faut pas l'écrire, sauf si vous en éprouvez le besoin, mais je détaille parce que c'est comme ça que cela se fait. Mais ça ne passe pas, pour eux, tu vois, c'est passer b de l'autre côté. Pareil pour la division. Et à mon avis c'est ce qui les induit en erreur. Parce que là on arrive à des erreurs. Je leur ai dit : écris comme je le fais, tu verras que ce n'est pas pareil du tout. Alors tu leur fais écrire : ah oui c'est vrai... Je ne sais pas s'ils le referont le prochain cours. Voilà tu ne leur dis pas : non c'est faux, c'est ça. Là tu leur montres : regarde si tu avais fait comme je t'ai expliqué... Voilà, ensemble on a fait le 48. Sûrement une résolution d'équations toutes bêtes. Alors là des difficultés quand il y a des quotients : $\frac{x}{2} = \frac{4}{3}$, $x= \frac{4}{6}$. Là pareil : non là tu multiplies par 2 et ils constatent... Ou alors des fois aussi on multiplie la fraction par 2 : on multiplie le numérateur et le dénominateur par 2. Donc ça tu vois j'ai marqué : les obliger à détailler les opérations.

AL : Tu as retesté après ?

B : Oui, là on est en train de faire les équations du second degré. Donc finalement tu reviens aux équations du premier degré, cela se passe pas mal. Sauf hier, mais là ce devait être une erreur d'inattention, parce qu'elle avait fait tout l'exercice bien et patatras $2x=0$, $x=-2$. Je lui dis : non c'est pas ça. Il y en a quand même un qui a dit : non c'est $x=2$. Encore pire. Et bon elle s'est corrigée d'elle-même. Je trouve que cela s'est calmé quand même. Alors j'ai distribué cette fiche "mise en équation d'un problème" pour ne pas le faire en cours. Lue en classe et on l'appliquera en module. Je l'ai repiquée dans le Pyramide. Quatre étapes de la mise en équation pour bien mettre les choses au clair. En n'oubliant pas les unités, etc. Et puis en donnant un exemple, j'ai repris celui du Pyramide. L'exemple pas trop bébête, qu'il y ait quand même des choses.

AL : C'est à dire ?

B : Pas... Là il faut quand même réfléchir un petit peu.

AL : Pas un problème qui se traduit directement ?

B : Voilà c'est ça. Et en exercice 49 et 50 : encore des équations, là il faut faire l'effort de développer avant de résoudre. Là je termine un module qu'on verra après. Correction des exercices. Alors des erreurs du type : tu as une différence égale 0, là ils t'appliquent comme si c'était un produit. Je m'y attends aussi. Donc je leur ai dit : là vous confondez avec le produit. On va voir ça demain. C'était le lendemain qu'on faisait... Mais quand tu leur expliques : oh oui bien sûr ; mais ils font l'erreur quand même. J'ai rendu l'évaluation et j'ai corrigé un peu l'exercice 1. Je pense que je corrigerai de temps en temps. C'est mon conseiller pédagogique qui m'a dit de faire ça et je trouve que c'est pas mal. Bon par exemple, la géométrie tant que tu ne la fais pas, cela ne sert pas à grand-chose de la corriger. Donc avant de faire la géométrie tu leur demandes de ramener le cahier et tu corriges avec eux. Là l'exercice 1 c'étaient des équations, développements, factorisations. Bon c'était pile le moment. Donc le cours équations du second degré. Ils ont bien compris la méthode. Et puis directement des applications en exercice. Alors ici il fallait appliquer une identité remarquable mais ils ne passent pas le 2 de l'autre côté. Et ensuite ils font comme si c'était égal à 0. Mais bon quand tu leur expliques : là si tu as 2, 2×2 ça fait 4, c'est pas ça du tout. Ceux-là ils comprennent. Mais ils font l'erreur. C'est ça à chaque fois que tu leur expliques, ils comprennent mais ils peuvent pas s'empêcher de faire l'erreur.

AL : Ce qui est bien dans ce que tu dis, c'est que tu ne leur dis pas seulement : c'est pas ça, mais tu leur montres pourquoi c'est pas ça.

B : J'essaie toujours de leur montrer un exemple. Pour moi si tu ne leur donnes pas de contre-exemple, ils ne comprennent pas leur erreur. J'espère qu'en faisant ça leur inculquer l'esprit critique, qu'ils se disent : voilà j'ai une solution, est-ce que cela peut aller ? Je ne suis pas sûr que tous comprennent mais s'il y en a quelques-uns qui comprennent. Alors ensuite on a fait de la mise en équation. Voir s'ils savaient faire : ce n'était pas dur, il fallait juste calculer les aires. La difficulté c'est l'aire d'un trapèze : monsieur, c'est quoi. Mais tu vois j'avais écrit vraiment au tableau : rappel l'aire d'un trapèze c'est ça, j'avais fait le dessin. Quand tu passes dans les rangs, tu vois qu'il y en a qui écrivent que c'est base fois base fois hauteur. Alors que c'est écrit au tableau comme ça. Alors je ne comprends pas. Qu'ils confondent le signe quand tu leur dis rien. Il y a pas de signe, bon cela peut être un plus.

AL : Là ce n'est peut-être pas une confusion, peut-être qu'ils ont mal noté.

B : Oui mais enfin il y en a quand même plusieurs qui l'ont fait et puis pas forcément des élèves en grande difficulté. Et puis ils regardent au tableau : ouais... Et des fois ils ne se rendent pas compte que c'est pas pareil. Et puis tu leur demandes : qu'est-ce que tu as écrit. Ben base fois base fois hauteur. Et c'est quoi la formule ? Ben petite base plus grande base fois hauteur. Je ne comprends vraiment pas.

AL : Moi je serais tentée de dire que c'est une erreur d'inattention. Mais quand tu dis qu'en leur faisant comparer les deux écritures, ils ne voient pas la différence au niveau des écritures...

B : C'est quand ils te la lisent en français en fait. Ils voient les deux comme ça, ils disent : ouais... Après quand tu leur fais lire, là ils se disent : je n'ai pas dit la même chose. D'où l'intérêt de parler en français. Bon sinon la mise en équation pas de problème : il suffisait de mettre un signe "=" entre les deux. Ah alors là : $x^2=8x$ équivaut à $x=8$. Alors là j'y avais pas réfléchi avant. J'ai été obligé d'improviser. J'aime pas ça mais bon heureusement j'ai pu m'en sortir : je leur ai demandé ce qu'on savait sur x. Ils m'ont rien dit. Je leur ai dit : mais x pourrait être égal à 0. Bon là il y a des petits malins qui me disent : non c'est une longueur... Je dis : c'est vrai mais oubliez le problème, on regarde l'équation. x pourrait être égal à 0. Ben ouais. est-ce qu'on a le droit ? Bon il y en a ça ne tilte pas mais il y en a : ah ben non on ne peut pas diviser par 0. Je dis : comme on ne sait rien sur x, il ne faut rien faire. J'ai vraiment insisté : il faut factoriser, etc. Ensuite, ça c'est les devoirs 7 et 10, c'est encore pour reconnaître des identités remarquables, plus ou moins difficiles des fois, il faut faire des petites manipulations pour s'en sortir. Tu vois j'avais donné le 8 d'abord parce qu'il était détaillé : il y avait $(\sqrt{3})^2$, donc ils voyaient. Après tu n'avais plus que 3, bon ils l'avaient fait avant, ils avaient compris. Après tu peux passer aux autres. J'ai trouvé que cela était pas mal fait. Ensuite le 125, je ne l'ai pas encore corrigé. A chaque fois je n'ai pas le temps. L'inconnue cela devient un des coefficients de l'équation. On te donne $ax+2=0$, on veut que la solution soit x égale je ne sais pas combien, à combien doit être égal a ? Je ne peux pas te dire ce que cela a donné.

AL : C'est intéressant ça.

B : Je ne sais pas comment ils vont s'en sortir. A mon avis ils vont remplacer x dans l'expression et ils vont trouver a. Ou alors ils résolvent $x = \frac{b}{2}$ et ils remplacent.

AL : Pourquoi as-tu donné cet exercice ?

B : Justement l'inconnue c'est plus x. Aussi voir comment ils réagissent. Parce que je ne m'attends pas forcément à ce qu'ils sachent le faire. Je veux voir un petit peu ce qu'ils me disent là-dessus.

AL : Est-ce que tu as déjà fait des exercices du genre : est-ce que tel nombre est solution de telle équation ?

B : Alors je leur ai donné un truc de ce genre-là pour samedi. Je ne sais pas si c'est exactement ça que tu veux dire. On a une fonction f(x) : sans résoudre l'équation, déterminer si le nombre -1,2 est solution de cette équation ? C'est ça que tu veux dire ?

AL : Oui par exemple.

B : Alors ça on en avait parlé avec le formateur à l'IUFM. Là c'est solution. Après on demande avec 4, c'est pas solution. Et après on demande de résoudre l'équation.

AL : Et il vous avait dit que pour eux ce n'est pas parce que f(-1,2)=0 que...

B : Que c'est la seule solution. D'une part qu'ils sachent dire que c'est une solution et d'autre part pour ceux qui ont compris que c'est une solution, ne pas s'en contenter. Je ne sais pas : je l'ai donné pour samedi. je vais voir ce que cela donne.

AL : Le 125 peut aussi faire travailler la notion de solution.

B : Ouais c'est vrai. C'est le genre d'exercice que je donne en sachant qu'il y a des chances pour qu'ils ne sachent pas le faire. Voilà. Ensuite le DS. Je te le montrerai, je l'ai mis dans la partie modules. C'est globalement décevant. Bon moi je ne mets que des exercices que j'ai faits en cours, cela ne sert à rien de donner autre chose. C'est pour cela que je suis déçu. Bon les erreurs de calcul je veux bien les excuser, mais enfin il y en a, certains exos j'avais donné la méthode et cela n'a pas été fait quoi. Et il y a une seule très bonne copie, un 17. Sinon le reste est compris entre 8 et 12. Ils sont 21. 10 ont en dessous de 8. Alors ensuite samedi dernier on a corrigé le 7 et le 10, qui étaient des équations où il fallait reconnaître les identités remarquables. Il y a eu pas de difficultés car elles n'étaient pas sous la forme quelque chose égale à 0. Il y en a qui essaient de factoriser. Là ils ne savent pas faire. Tu vois j'ai bien donné la méthode : transformer l'équation, on factorise, on résout. J'ai corrigé deux exos du DS et en devoir l'activité 2 page 29. Avant de faire l'exo sur les fonctions, j'ai voulu leur faire faire ça. Manipuler un petit peu une fonction justement. Bon en fait, tu ne remplaces pas de valeur mais tu manipules une expression comme ça. C'est un peu monstrueux, il y a quatre équations à résoudre. On développe, on factorise et on regarde laquelle est la meilleure. Ce n'est pas la même chose que l'autre exercice. Mais je préférais déjà les faire manipuler là-dessus. C'était bien détaillé pour bien leur faire remarquer que des fois avec une forme on ne peut pas s'en sortir. L'importance de factoriser ou... Enfin tu vois.

AL : Et l'utilité aussi.

B : Ouais.

AL : Tu l'as corrigée déjà ?

B : Mardi.

AL : Tes élèves ont compris la notation A(x)= ?

B : J'ai eu aucune question là-dessus. Ça au début de l'année, je me demandais. Je ne savais pas trop ce qu'ils savaient faire. J'ai vu dans les exercices que dès le début ils en parlent. Donc j'ai essayé. Et j'en avais déjà fait avant, je crois. Oui dans ma feuille sur les factorisations : sur le bouquin j'avais vu que les expressions étaient écrites comme ça, je les ai recopiées comme ça. Cela ne pose pas de problème.

AL : Tu vas voir si cela ne pose pas de problème pour la substitution.

B : Et voilà est-ce qu'ils comprennent que x c'est la variable ? Parce que pour eux ce n'est peut-être qu'une notation : A parenthèses x et ils recopient bêtement. Alors mardi j'ai corrigé l'activité et le 12 page 37. Il y en a pas mal qui n'avaient pas fait leurs exos, je me suis un peu énervé. Alors oui dans cet exercice l'équation c'était $16x^2 = 900$. Donc x^2 égale machin, donc x égale la solution positive. L'élève qui était au tableau a fait ça. Je lui demande : il n'y a que ça comme solution ? Je l'avais rappelé dans le cours. Personne ne voit rien. Et il y en a un qui finit par me dire : il y a aussi moins racine. Mais il s'empresse de me dire : x est une longueur. Alors là j'ai dit : oui mais il y a deux solutions à cette équation, après les solutions du problème c'est autre chose. Je suis revenu à la feuille que j'avais donnée sur la mise en équation : d'abord on met en équation, on résout et après on revient au problème. Donc j'ai fait écrire au tableau l'ensemble des solutions et les deux valeurs. et après la valeur qu'on demande c'est ça. Qu'ils comprennent que les solutions de l'équation ne sont pas forcément solution du problème. Tu vois, ils considèrent implicitement que c'est une longueur sans le dire non plus.

AL : Et en plus ce n'est pas parce qu'il y en a un qui a dit ça que tout le monde y a pensé.

B : Oui je te dis : il s'est passé au moins dix secondes avant que quelqu'un réponde. Si je leur avais donné hors contexte... J'ai remarqué qu'à chaque fois que je donnais ça, il n'y a qu'une solution. Au début que je l'ai fait d'ailleurs ils ne voyaient vraiment pas la deuxième solution. Bon cela devrait être vu quand même mais ils ne s'en rappellent vraiment pas. Ensuite l'activité 2, on avait (4x+1)(12-28x), c'était guidé : on disait que tu pouvais factoriser par 4. L'élève qui était au tableau écrit ça comme ça, pas de problème. Et là il y en a pas mal qui m'ont posé la question : monsieur il y a rien entre les... Au début je ne voyais pas ce qu'ils voulaient dire. Je dis non. Non, il y a rien. Il n'y a pas un plus ? Alors là j'ai compris. Rebelote. Non quand c'est comme ça je fais l'effort de mettre "×". Regarde, on factorise par 4 donc c'est une multiplication. Donc tu n'as que des signes "×" donc il n'y a rien. Ouais d'accord. mais il y en a ce n'est pas certain qu'ils ont compris.

AL : Ce qui peut se passer aussi, c'est qu'en général, quand on leur demande de factoriser, il y a une somme entre les deux.

B : Ah oui c'est vrai que je n'avais pas pensé à ça. Mais bon il y a toujours quelque chose qui cloche. La correction a été vachement longue, le temps d'écrire tout ça. Je voulais finir mon cours sur les équations en faisant $|x-a| = d$ mais il faut aussi que je finisse de corriger le DS. Donc vu l'heure, j'ai préféré finir de corriger et comme ça j'étais tranquille. Alors correction du DS : il y avait un truc de la forme $\frac{2+\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}$, je leur demande ce que l'on fait. On simplifie par $\frac{1}{a}$. Ils ne voient pas pourquoi ils ont faux. J'ai dit : non machin... Ah ben oui c'est vrai. bon on verra dans le DS mais il y avait pas mal d'erreurs de ce type. Somme de puissances, etc. Pourtant les puissances, on en a fait dès le début de l'année. Bon là cela fait 15 jours qu'on en fait plus parce qu'il faut bien passer à autre chose. Ensuite ça, c'est des devoirs que j'ai donnés. Sur feuille car j'ai vu qu'il y en avait beaucoup qui ne les faisaient pas. Le 38 : travail de base sur les fonctions. On exhibe une solution et on regarde ce que cela donne. Le 15, c'est encore une mise en équation je crois.

AL : Pour la mise en équation, tu m'as montré tous les exercices ?

B : J'en ai fait d'autres en module. Maintenant on va regarder les modules. Donc pour les modules à chaque fois je fais des fiches parce que là-dedans il n'y a pas grand-chose. Donc la première, j'ai fait fractions et puissances. Je l'ai travaillée en deux fois. Déjà je rappelle les formules pour qu'ils aient un formulaire sous les yeux, pour vérifier qu'ils apprennent le cours. C'est là que j'ai constaté que ce n'est pas ça. Et puis là des calculs. Comme j'avais vu que c'était bien passé sur des exemples numériques, je me suis dit : on va regarder ce que cela donne. Je leur en ai déjà donné en classe et là on va les travailler ensemble. Alors encore des confusions entre somme et produit : ça c'est récurrent. Rappel des règles de simplification, c'est ce que je t'ai dit : je ne l'avais pas donné en cours donc là j'ai rappelé, là d'ailleurs. Tu vois, je l'ai mise ici. Et puis l'exercice n'a pas posé trop de problème, cela commence à être maîtrisé. Les exercices ne sont pas... Enfin si, il y en a qui commencent à être difficiles. Mais bon en travaillant un peu avec eux... Bon il y en a qui restent coincés. Tu leur dis : bon là... Et ça vient quoi. Cela finit par venir. Bon il y a encore des erreurs de calcul mais globalement j'étais assez satisfait. On a commencé un peu la partie puissances : rappels de cours et le but de ça c'était de simplifier les expressions. Tu vois, je leur ai détaillé sur un exemple ce que l'on faisait. Alors c'est pour ça que j'avais donné le signe. J'ai dit d'abord on détermine le signe, on applique cette formule. Cela ne pose pas de problème. Et après une règle à la fois, je détaille bien ce que j'ai fait. Ils ont vraiment un exemple propre. Avant de traiter les exercices de la feuille j'ai fait celui que je t'avais montré tout à l'heure : le 53 p 18. Les expressions étaient plus simples que celles que je proposais. Pour se faire les dents là-dessus c'était mieux. Alors oui il était fait en deux étapes. Au début on dit mettre ça sous la forme... On met des vides et il faut les remplir ; ça, ça va bien. Mais après on demande, en fait c'est la même question, mais là on dit avec n et m dans. Alors là c'est plus pareil. Là ils ne voient plus. Je leur dis : regardez, qu'est-ce qu'on a fait là ? J'ai essayé de faire un parallèle pour qu'ils se rendent compte que c'était la même chose, qu'il ne fallait pas avoir peur de la notation. J'ai trouvé que c'était pas mal de faire ça. Leur dire : ça c'est des vides quoi, il ne faut pas se laisser influencer par le nom.

AL : Tu penses que c'est la forme qui les a gênés ou bien le fait qu'on travaille dans $\mathbb{Z}$ alors qu'avant c'était dans $\mathbb{N}$?

B : C'est la forme je crois. Parce que eux $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.. J'ai l'impression que cela leur passe un peu à dix mille lieux. Je suis sûr que même si dans le texte c'était $\mathbb{N}$ ou même si c'était écrit en toutes lettres, je suis sûr que cela ne les gênerait pas de mettre un négatif.

AL : Bon pour la notation d'accord. Mais ils ont réussi à dire que $\frac{1}{8}$ c'est 2^{-3} ?

B : Pas spontanément. Pour une minorité c'est spontané mais pour la plupart ils ont du mal. Donc ensuite j'ai fini ça la fois d'après. C'est là que j'ai expliqué l'exemple. Une seule règle à la fois, car il y en a qui te font ça en deux coups de cuiller à pot et tout est faux. Et c'est ça qui est embêtant : tu ne peux pas leur expliquer leur erreur alors que si tout est détaillé, tu peux leur dire : regarde là quand tu es passé de là à là. Mais il y en a qui quand même te font ça, il y en a toujours des plus malins que les autres. Le A, j'ai envoyé un élève au tableau, on l'a fait ensemble. Cela a été pas mal. Le B, je leur ai donné à faire. Et puis là la décomposition 30 c'est 2×15 c'est tout. Alors là évidemment tu ne vas pas leur dire que c'est une décomposition en éléments simples. Alors là j'ai vraiment été embêté. Pour leur dire : non tu peux aller plus loin. C'est quoi 15. Ben c'est 5×3. Bon et bien tu vois cela peut être 5×3. Là je me suis vraiment senti... Je ne savais vraiment pas comment leur dire. Alors j'ai fini par leur dire : quand vous voyez un nombre, essayez de vous demander si vous ne pouvez pas le détailler avec des nombres plus petits. Je n'ai vraiment pas pu faire mieux. Bon c'est pas mal passé, je pense. Oui et j'ai essayé aussi de leur expliquer avec des fractions à réduire. Regarde, qu'est-ce que tu fais quand tu as $\frac{4}{6}$? Alors là : oh ben oui on fait pareil. Bon il y a eu des problèmes avec les puissances au dénominateur. Là ils ne savent pas quoi faire. Alors je leur ai dit de repasser par le produit $2^3 \times 5^{-3}$. Là c'est vrai que penser que $\frac{1}{5^3}$ c'est 5^{-3} c'est pas systématique. Je le comprends pas. Et quand tu leur demandes : ils disent ah oui. Mais bon en plus là ils l'avaient sous les yeux. Je trouve que c'était bien de leur donner ce formulaire. Et cela s'y prête vraiment. T'appliques vraiment les formules, c'est quand même bien de les avoir sous les yeux. Et puis tu lui demandes vraiment : à ton avis laquelle est vraiment ? Parce qu'il y a beaucoup de confusions entre ça et ça. Bon là ils voient vraiment que c'est pas la même chose. La feuille sur les transformations d'écritures. Ça j'ai repris intégralement sur le Pyramide. C'est exactement ce qu'ils ont mis dans le cours : les trois méthodes et puis des exemples. Bon ça j'ai pioché dans plusieurs exercices. L'objectif était de mettre en place le développement et les factorisations en vue des équations. Alors dans les développements $x \times 2x$ ça fait 3x. Pas mal d'erreurs de signes.

AL : Comment est-ce que tu interprètes l'erreur $x \times 2x$ ça fait 3x ?

B : Pour moi c'est encore que $\times$ c'est la même que le signe +. Et là je le comprends pas mal parce que pour eux je pense que $x \times x$ ça fait x^2 c'est peut-être pas tout à fait naturel. Je ne sais pas s'ils font beaucoup de trucs de ce genre au collège.

AL : Oui ils en font. Par exemple avec les identités remarquables en troisième.

B : Oui mais je ne sais pas s'ils ont le réflexe... Bon peut-être maintenant parce qu'ils commencent à manipuler. Et souvent quand ils ont une identité remarquable $(a+b)^2$, souvent il y en a qui écrivent $(a+b) \times (a+b)$, quand c'est pas $(a+b) \times (a-b)$. Bon tu leur dis : ah non quand même maintenant... Mails $(a+b) \times (a-b)$ je l'ai vu pas mal de fois quand même, c'est embêtant. En discutant avec lui tu arrives à lui montrer que c'est pas la même chose. Mais tu passes deux minutes avec lui. Pour un qui a fait une erreur et il n'est pas tout seul. C'est embêtant : ce sont des erreurs graves qu'il faut corriger. Et je suis sûr que s'il y en a un qui fait ça au tableau et que tu expliques que c'est faux. Ça passe pas. Quand tu viens lui expliquer à lui, ça passe mieux. Et pour les équations c'est pareil : s'ils ont $(x+1)^2=0$, ils ne savent pas. Alors je leur ai expliqué de deux manières : $(x+1)^2$ c'est $(x+1) \times (x+1)$, on a dit qu'un facteur est nul, etc. Ou je leur ai dit : si j'ai un nombre au carré et je vous dis que cela fait 0, qu'est-ce que vous pensez de ce nombre ? Ben c'est nul. Donc $x+1 = 0$. Alors encore des erreurs de signe : $\times$ devient + à la ligne suivante. Alors c'est plus de l'erreur de copie quand même. Alors difficultés avec 3 facteurs. Cela coince pas mal : il y en a qui te développent les deux premiers et quand ils recopient à la ligne d'après ils ne te mettent pas les parenthèses. Alors je leur dis : vous avez commencé par développer ça, c'est comme si vous aviez mis de grands crochets ici. Ça j'en vois encore. Il y a aussi des trucs du genre : certains n'ont pas le réflexe de réduire avant de développer. Et c'est monstrueux. Justement un qui a fait ça je l'ai envoyé faire au tableau. Il y en a eu plein le tableau et j'ai demandé s'il y en avait d'autres qui étaient allés plus vite. Là j'ai dit : là tu aurais pu réduire, c'était beaucoup plus simple.

Factorisations : là tu factorises par (x-1), là on te met un -1. Donc là je fais systématiquement écrire $(x-1)^2$ c'est ça fois ça. E(x), là je te l'ai écrit ici. Là il y a vraiment de tout. Et là le 2 qui normalement était ici s'est retrouvé ici. Là j'ai du mal à comprendre. Là je comprends, ils oublient un terme, là il y a un signe plus qui passe à la trappe, là c'est le signe $\times$ qui devient +, mais alors là pourquoi le 2 passe d'ici à ici. Je ne sais pas. Ensuite $36x^2-4$, cela ne loupe pas. Pour H(x) il fallait factoriser directement par x^3. Je m'attendais à des difficultés mais il y en a quand même qui ont trouvé. Il y en a un qui a vu qu'on pouvait factoriser d'abord par x, puis encore par x mais au lieu d'écrire x^2 il a écrit 2x. Mais sinon j'ai été agréablement surpris : ils manipulent pas mal les factorisations. Il y en a même plusieurs qui m'ont dit : c'est comme l'année dernière au collège. Donc c'est qu'ils en ont fait. Cela va pas mal. Notation scientifique, racines carrées. Alors ça j'avais trouvé ça dans le Pyramide, j'ai trouvé cela pas mal : tu donnes deux nombres en notation scientifique et alors produit, enfin produit c'est pas dur, mais alors somme, différence et les écrire sous notation scientifique. Alors je m'y attendais : j'ai vu de tout. J'étais au tableau et je leur ai demandé : x+y qu'est-ce que vous me proposez ? Là évidemment $(9+36) \times$... Là j'ai dit : rappelle-toi la formule que j'ai rappelée. J'ai écrit ça dans un coin et je l'ai développé et j'ai dit : regarde, ce n'est pas du tout la même chose. Et dans chacun des deux groupes, il y en qui m'ont dit : on pourrait transformer pour avoir la même puissance de 10. On a essayé et cela a marché. Et à la fin ils remettent systématiquement en notation scientifique. Ensuite celui-là j'ai donné en décimal et ils ont regardé ce que tout ça donnait. Bon A ça va mais pour A^2 cela ne fait pas un pli ils essaient de mettre ça au carré. Alors je leur ai dit : non c'est pas pratique, essaie d'utiliser la notation scientifique. Mais avec A^2 cela ne passe pas bien. J'aurais dû demander directement avec A^{15}. A^2, c'est facile : tu ajoutes deux 0, cela va bien. Mais avec A^{15} ils auraient été bien embêtés et avec la calculatrice cela n'aurait pas marché. C'était pour leur montrer l'intérêt de la notation scientifique. Moi je trouve que c'est un peu artificiel pour eux, surtout en maths. Ils doivent s'en servir en physique. Mais en maths c'est vraiment pour dire qu'on le fait. Mais l'avantage c'est que cela fait travailler sur les puissances. Alors encore des difficultés sur les calculs de puissance mais moi j'attribue ça à du cours et confusion entre a^{-n} et $(-a)^n$: $2^{-3} = -8$. Alors là on regarde les formules. L'exercice 3, c'était des conversions mais c'était une redite. Bon j'avais dit : si on a le temps on le fera. Puis ceux qui avaient fini, je leur avais fait chercher, mais bon. L'exercice 4 : du développement avec des racines. Pas de grosses difficultés. Et le 5 : des comparaisons de nombres avec des racines. Pour leur donner la méthode : on élève au carré et on compare ou bien des fois il y a mieux à faire, là on peut simplifier, là aussi. En général, en fait cela revient à élever au carré mais ça je n'y avais pas pensé, $2\sqrt{3}$, ils remettent le 2 sous la racine, ils disent cela fait $\sqrt{12}$, celui-là ça fait $\sqrt{18}$. Mais ça je n'y avais pas pensé mais c'était pas mal. Alors mise en équation, j'en avais trouvé dans le bouquin, je n'avais pas fait de feuille. J'avais sélectionné le 1, le 3, le 4, le 33. Alors le 1 c'est encore de la géométrie. Je leur ai déjà fait rappeler les 4 étapes. Les équations n'ont pas posé de problème mais là il y a des problèmes du type "volume d'un triangle", "aire du pavé", c'est un peu bancal. Sinon la mise en équation n'a pas posé de problème. Comme c'était le premier, je l'ai fait avec eux au tableau. Le 3 j'ai envoyé un élève au tableau et on a cherché ensemble. C'était un peu plus délicat. Là je leur ai demandé l'inconnue, les contraintes. Au début ils ne voient pas ce que cela veut dire contraintes. Je leur ai dit : est-ce que cela peut être un nombre décimal ? Donc voilà la mise en équation là ils savent pas. Je leur ai demandé combien il y a de frères et sœurs en tout. J'avais posé x le nombre de sœurs et là tu as de tout : tu as x ou 2x ou... Je leur ai dit : imaginez combien les parents ont d'enfants. Ils finissent par te dire que c'est 2x+1. Bon après la mise en équation pose problème. Là j'ai pris un problème concret : imaginez, on a 3 enfants, on leur donne 10 dragées chacun, combien il y a de dragées ? 30. Bon là il y a 2x+1 enfants, chacun en a douze cela fait combien. Et là il y en a qui m'a dit : cela ne sert à rien avec le premier cas de figure, cela suffit. Oui mais je lui dis : et tu fais quoi quand tu as ce cas de figure ? Il ne savait plus. Je lui ai dit : c'est l'intérêt d'avoir les deux. Donc je leur ai fait écrire les deux expressions et j'avais fait écrire le nombre total de dragées est... Et chacune des deux expressions. Après il y en a qui disent que c'est égal. La résolution de l'équation ne pose pas de problème. Et après pour trouver le nombre total de dragées tu te retrouves avec deux formules et là j'ai demandé : laquelle on utilise ? La première... La deuxième... Il y en a qui disent qu'on ne peut pas prendre la deuxième car Martin n'est pas compté... Tu vois c'est pas... J'ai insisté en leur disant de bien faire étape par étape, en regardant chaque donnée l'une après l'autre. Bon c'est vrai que c'est difficile pour eux, ça je le comprends. Le 4 c'était un carré qui devenait rectangle. Je leur ai laissé faire seuls, c'est bien passé. Et le 33, alors là ! Je pars de machin à telle vitesse... C'est tellement classique qu'on peut pas passer à côté... Bon je l'ai fait moi-même avec leur aide. J'avais regardé ils proposaient quelque chose dans le livre : le temps mis pour parcourir x kilomètres c'est la même chose que pour parcourir 18-x. Mais moi j'ai voulu leur faire faire d'une autre méthode : je leur ai fait un petit dessin avec les deux villes, le point de rencontre, lui il fera d_1 et lui fera d_2, qu'est-ce que vous pouvez me dire ? Là cela a été laborieux ils ont eu du mal à me dire que $d_1+d_2 = 18$. Ils finissent par y arriver mais il faut vraiment aller le chercher. Il y en a aussi qui disent tout de suite d = vt. Le réflexe. J'ai dit : c'est bien. Je l'ai mis dans un coin. On va s'en servir. Donc après le calcul de d_1 et d_2, dans le premier groupe cela c'était pas mal passé. Le deuxième ils ont eu du mal à voir. Mais ils participent pas mal, ils comprennent bien. Alors je leur avais fait écrire au début : t est en heures. Donc après on trouve $t = \frac{1}{8}$, c'est quoi ? C'est des heures. Qu'est-ce que ça fait ? Et là tu vois je t'avais dit qu'il y avait des problèmes de conversion dans l'évaluation mais là ils disent : il faut faire 60 divisé par 8. Alors on trouve : 7,5. Je leur demande : c'est quoi ? C'est des minutes. Et après ils te disent que c'est 7 minutes et 30 secondes. Mais il faut les guider en fait. D'eux-mêmes ils ne l'auraient pas fait. Après je leur ai demandé de le refaire à la maison avec la méthode du livre. C'est pas la même approche, la même inconnue. Je ne l'ai pas encore corrigé. Le TD : résolution d'équations avec une inconnue au même dénominateur. ça il n'y en a pas du tout dans ce bouquin. Alors je trouve que c'est quand même pas mal à faire. Alors j'ai guidé, j'ai encore dû m'inspirer du Pyramide. Je donne un exemple. Avant toute chose : domaine de validité. Là j'ai bien expliqué. J'ai introduit la notation $\mathbb{R}$ privé de... Mais je préfère dire valeur interdite, je trouve que c'est plus parlant pour eux. Et là deux méthodes pour résoudre l'équation : on met tout dans le premier membre et on réduit au même dénominateur ou bien produit en croix. Ils préfèrent bien sûr le produit en croix.

AL : Et toi tu préfères quoi ?

B : Le produit en croix aussi. C'est moins source d'erreurs.

AL : Avec les inéquations cela risque d'être source d'erreurs.

B : C'est vrai je n'y ai pas pensé à ça. J'ai vraiment bien fait de mettre cette méthode-là alors. Donc je leur mets de vérifier que ce n'est pas une valeur interdite. Finalement ils me disent : oui ce n'est pas une valeur interdite. Mais tant qu'ils n'ont pas vu que cela pouvait en être une ils ne comprennent pas ça. Alors je m'y attendais : ils oublient systématiquement de regarder les valeurs interdites. Pour eux cela ne sert à rien. Bon je pensais : attends le petit c tu vas voir. Et donc dans le petit c la valeur interdite c'était 2 et la solution c'était 2. Alors là il y en a qui me demandent : qu'est-ce qu'on dit ? Je leur ai demandé ce qu'ils en pensaient. Ils finissent par te dire que c'est impossible. Il y en a même qui connaissent le symbole vide. Et alors je n'ai pas laissé ça comme ça : ce n'est pas très parlant. Bon ici tu peux factoriser par x-2. Je leur ai montré : vous voyez cela fait toujours 3 et on nous demande que ce soit égal à 1 donc ce n'est pas possible. Sinon eux ils ne savent pas ce que cela veut dire. Dans d là il y a une petite astuce : tu te retrouves avec une identité remarquable. Là ils n'ont rien vu. Ah oui alors là pour trouver la valeur interdite c'est facile : -2, -1, 2. Par contre 1-2x il y en a qui ont commencé à avoir un problème. Alors là je me suis dit que j'aurais dû le faire ici, j'ai détaillé : on veut pas que ce soit 0, donc on cherche la valeur pour laquelle c'est 0, donc en fait, on résout une équation. J'aurais dû le détailler ici. La prochaine fois je le ferai. Et là dans celui-là, il y a une somme de deux fractions et ils se contentent d'une valeur interdite. Et en discutant avec eux, cela est venu. Les autres je leur ai dit : faites-les. C'est dommage il y a plein de choses et on n'a pas le temps de les faire. Je compte sur leur bonne volonté mais il ne faut pas rêver ; je leur ai dit : entraînez-vous et venez me voir, moi je suis disponible. Je ne peux pas non plus travailler à leur place. Alors le DS, j'ai commencé par les valeurs absolues : vraiment pas dur. Globalement pas mal réussi. Là tu vois il y en a qui écrivent : les solutions sont $|7{,}31|$ et $|-7{,}31|$, là c'est un peu délicat. ça ouais : $-|4| = -4$. Il y en a qui comprennent toujours pas pourquoi c'est pas bon. J'ai dit : regarde l'équation, est-ce qu'il y a un moins ? Tu as ajouté quelque chose c'est plus la même équation. Là des erreurs de calculs (A), il y en a qui suppriment les valeurs absolues sans se poser la moindre question, il y en a d'autres qui les gardent jusqu'au bout en faisant quand même les calculs : on fait les calculs, puis on fait les différences des valeurs absolues, cela fait valeur absolue. Je leur avais dit : c'est des priorités, on calcule d'abord ce qui est dedans et après on les enlève. De la simplification ici. Cela a été pas mal. Ici (exercice 3) beaucoup d'erreurs pourtant on en avait fait, tu as vu. Des erreurs de signes. Ici le dénominateur commun c'est souvent $3a^3$ on se contente de multiplier. Je veux bien mais après il faut voir qu'on peut simplifier mais ils ne le voient pas. Cela se comprend. La simplification par $\frac{1}{a}$ il faudra encore insister. Et du passage à l'inverse abusif. Quand je leur ai rendu le DS je leur ai demandé ce qu'ils en avaient pensé. Ils l'ont trouvé trop dur. Mais il ne faut pas se ficher de moi quand même, on avait tout fait. Et ils m'ont dit : c'est les lettres. L'exercice 4 : du développement. a et b pas mal mais il y en a qui développent sans identité remarquable. Ça passe mais on est quand même en seconde. c, d, des erreurs sur les formules de puissance. Ici l'exercice 5 : pas mal. Bon j'attendais la forme 3×5 et il y en a qui écrivent 15. Ils ne répondent pas à l'énoncé. Il y en qui abandonnent les puissances : il écrivent $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times$... et ils ont compté... Et puis celui-là pas mal, tu obtiens $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{7}$ et encore des erreurs comme tout à l'heure. Et puis celui-là c'était exactement, bon j'ai changé les chiffres quand même... Et alors il y en a très peu qui l'ont fait. Là j'ai râlé. C'est vrai qu'on l'a fait qu'une fois, mais à partir du moment où l'on l'a fait une fois, que j'ai donné la méthode... Et ils m'ont dit : ouais c'était dur et l'exercice 6 était dur. Donc : là j'ai dit non. En fait, on avait fait presque tout. Le plus dur c'est le 3. La plupart peuvent me faire beaucoup mieux que ce qu'ils m'ont fait. ça plus des erreurs de calcul, tu arrives vite à des notes pas terribles. L'aide individualisée, je me suis basé sur ce que j'avais vu sur l'exercice 3 d'algèbre. Pour le fameux $|x| = -x$, j'ai fait l'exercice 1. La plupart ils donnent une valeur négative, mais alors une, parce qu'il faut en donner une. Le signe ils disent : on peut rien dire. Et certains s'ils ont donné -1 et bien -x sera -1. Et il y en quand même qui disent que -x sera toujours négatif. Et là ils étaient à 8 et ça je suis passé tous les voir. J'ai dit : qu'est-ce que tu as appris là ? Il y en a quelques-uns qui m'ont dit : x peut avoir n'importe quel signe, -x aussi. J'étais content. mais il y en a qui ne voient rien du tout. Là des fois le français est approximatif mais en gros ils comprennent quand même ce qu'ils font, pour la plupart. Et ça je m'étais inspiré d'un truc qu'on nous avait donné à l'IUFM. Et puis là j'ai refait un exercice du type de celui qu'il y avait dans l'évaluation. C'était pour les exemples abusifs : tu donnes un exemple et tu généralises. Pour le d il y en a qui disent non mais ils ne savent pas trop pourquoi. Mais là il y en a une qui a dit : si $x^2>8$ c'est positif, si $x^2<8$... Hop. Là tu ne peux pas dire mieux.

AL : Tu proposes ça aux élèves en difficulté ?

B : Oui, ceux qui ont eu les moins bon résultats sur l'évaluation. Je n'en ai pris que 7 au début. Comme je ne savais pas quoi faire au début et que les volontaires ça ne court pas les rues, je voulais qu'ils voient déjà ce qu'était l'aide individualisée, faire la pub quoi, les faire venir parce que c'est quand même convivial. J'espère qu'il y aura des volontaires maintenant.

AL : Est-ce que tu penses que cela ne serait pas intéressant de le faire faire aux autres ?

B : Oui c'est vrai. Mais c'est vrai que je pourrais le donner en exercice pour la classe. Mais disons qu'il aurait peut-être fallu le faire plus tôt dans l'année. Maintenant ils vont se demander d'où ça sort. C'est pareil il y en a qui avaient un peu de difficultés ; je leur ai dit : regarde ce que tu fais sur une calculatrice. Mais c'est vrai que le 2 cela aurait été profitable de le faire faire à toute la classe. Mais après quand il y aura des volontaires qui ne seront pas venus là, je pourrai peut-être leur proposer cet exercice.

AL : Celui-là pourra être intéressant à faire aussi au moment où tu feras une fonction. Pour étudier les variations d'une fonction, il y a deux possibilités : soit étudier le signe de f(b)-f(a), ou on calcule f(a) et f(b) en détaillant les étapes de calcul et en comparant au fur et à mesure.

B : A la limite on peut le refaire à ce moment-là. Oui c'est pas mal ça.

AL : Dans ce que tu as fait, qu'est-ce qui a le mieux et le moins bien marché ?

B : Je trouve qu'ils fonctionnent quand même pas mal sur les équations, sur les factorisations. Beaucoup mieux que sur les puissances. Oui peut-être plus de problème sur le numérique.

AL : Appliquer les formules ?

B : Ouais application des formules. Alors est-ce que cela vient du fait qu'ils ne les connaissent pas ? Je n'en sais rien... Ou alors est-ce qu'ils n'arrivent pas à se les approprier et à les appliquer ? Mais moi c'est vrai je les trouve plus à l'aise sur les équations. On verra ce que cela donnera au DS. Et puis les factorisations, ça c'est bien passé. Je m'attendais à voir des choses bien pires que ça.

AL : Quels les enseignements sur ton propre enseignement as-tu tiré de ton contrôle ?

B : Je me pose pas mal de questions. Parce que dans la mesure où les exercices que l'on a traités n'ont pas été bien faits, je me suis demandé si on en avait fait assez. En réfléchissant, je me suis dit que je n'avais guère le temps d'en faire plus. Alors là je me demande comment je pourrais faire. Parce que... Je ne sais pas si c'est un tort ou pas mais je ne vérifie pas les devoirs. J'estime qu'ils sont en seconde, qu'ils ont quinze ans, bon... Là je te dis que j'ai constaté que c'était pas vraiment fait. Donc je leur ai demandé de les faire sur feuille et je pense que je vais continuer comme ça. Ou alors ce que je vais faire c'est qu'à chaque cours je demanderai à cinq élèves de me montrer leur cahier. Est-ce que c'est eux qui n'ont pas assez travaillé ou est-ce que c'est moi qui ne les ai pas fait assez travailler ? J'en sais rien. Peut-être que je devrais plus insister, mais si j'insiste plus, je passe deux fois plus de temps sur le chapitre. Je ne vois pas comment faire. $10^n + 10^p = 10^{n+p}$, on a fait suffisamment de calculs pour qu'ils se rendent compte qu'ils n'ont pas le droit d'écrire ça.

AL : Sur le dernier exercice de ton DS, tu peux te dire comme tu n'en as fait qu'un...

B : C'est vrai, ça je le reconnais. Il y en a qu'un. Peut-être que je suis trop exigeant en disant : on l'a vu une fois, vous connaissez la méthode. Mais il y avait d'autres choses qui ont été vues et revues.

AL : Il faut dire ici tu as touché des points difficiles : la valeur absolue, les lettres et les puissances. Pour les puissances, ils ne réfléchissent pas. Tu vois quand tu m'as parlé d'un élève qui a écrit $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times$..., il s'est peut-être trompé parce qu'il a fait des erreurs de calculs mais lui il a compris ce qu'était une puissance.

B : J'espère de temps en temps dans l'année faire de petits exercices sur les puissances. Bon c'est pareil le temps manque. Deux heures de cours par semaine, c'est...

AL : On va passer à des questions plus générales. Je voudrais connaître ton cursus universitaire.

B : J'ai fait classes prépa. Spé M, spé MP, 5/2. Après je suis allé en licence, j'étais admissible aux ENSI. J'ai eu ma licence et je suis venu en CAPES.

AL : Quels étaient les domaines en maths que tu appréciais le plus quand tu étais élève ou étudiant ?

B : L'analyse. Parce que je trouvais ça simple, facile. Surtout aux petits niveaux : il suffit de dériver, c'est des études assez simples. La géométrie je n'ai jamais trop apprécié. Mais même encore l'année dernière c'est l'analyse qui me plaisait le plus. L'algèbre j'aime bien quand ça reste de l'algèbre linéaire, moi ce que j'ai fait en sup. Jusqu'aux diagonalisations, ça me plaît bien. Quand cela devient bilinéaire, je trouve que ça devient lourd.

AL : L'analyse te semble plus simple ?

B : Ouais. Surtout... Je ne sais pas te dire pourquoi. Comme l'algèbre linéaire, je ne trouve pas ça trop violent. Encore que bilinéaire cela devient plus... C'est vrai je me suis déjà posé la question. C'est vrai que quand j'étais au collège, j'avais presque des difficultés. Thalès c'était une horreur pour moi.

AL : Justement : est-ce que tu as rencontré des difficultés en maths ?

B : Disons que dans ma première spé, j'étais un peu largué, cela allait vite. La deuxième j'ai compris beaucoup de choses, surtout en analyse. C'est là que j'ai vraiment fait des progrès en analyse. J'ai compris toutes les différences entre les convergences. Et je reviens à l'algèbre bilinéaire, cela ne m'a jamais plu plus que ça. Après en licence, le L6 cela ne me plaisait pas plus que ça.

AL : C'est quoi le L6 ?

B : Algèbre et géométrie. Enfin moi en licence j'arrivais de prépa avec une habitude de travail, j'ai travaillé les TD, le cours je le bétonnais. Bon après ça passe comme une lettre à la poste au module. Je comprenais le cours et les exos. Mais quand je voyais d'autres exercices, je ne voyais pas trop ce qu'il fallait faire. La topologie, j'aimais bien aussi.

AL : Est-ce que tu pourrais me citer des mots qui rendraient compte de ta conception des maths et qui pourraient résumer ton attirance pour les maths ?

B : Alors là je suis attiré par les maths, je pourrais presque dire, parce que je ne sais rien faire d'autre. Naturellement j'y suis venu. Quand j'étais au collège, je n'ai jamais eu besoin d'apprendre une leçon de maths. Au lycée, j'ai commencé à voir le cours mais enfin cela venait bien. Parallèlement en physique cela ne se passait pas trop mal. Je n'ai jamais vraiment été littéraire. Cela ne me passionnait pas mais cela ne me déplaisait pas non plus. Et puis après quand vient le moment de choisir, pourquoi pas classes prépa. Là je me suis rendu compte que je n'étais pas fait pour la physique. Donc c'est pour ça que je te dis que j'ai fait beaucoup de progrès en spé parce que j'avais l'optique d'aller à la fac après parce que je voulais faire prof. Donc tu vois, naturellement je suis venu aux maths et cela m'a toujours plus ou moins plu. Et puis cela s'est bien passé. Sinon qu'est-ce qui définit les maths ? Alors là... A la base c'est des calculs. Quand tu es petit, on te fait faire du calcul. Maintenant tu te rends compte qu'après c'est plus ça du tout. Quand des gens te demandent ce que tu fais, tu fais des maths. Ils ne s'imaginent pas du tout ce que tu fais. Trouver des mots qui définissent les maths...

AL : Pour toi qu'est-ce que les maths ?

B : Logique... Rigueur... C'est ça que j'ai appris surtout en 5/2 à être rigoureux. Et c'est ça que j'aime en analyse : une démonstration en analyse bien propre, bien faite... Je ne dis pas que c'est beau, il ne faut pas exagérer. Mais je trouve ça agréable. C'est propre. Quand je révisais les leçons d'oral du CAPES, les leçons de géométrie si elles étaient bien faites tant mieux, si elles étaient pas trop bien faites, j'essayais de voir quand même un peu. Mais les leçons d'analyse je les ai quasiment toutes reprises avec mon cours de sup et à la fin j'étais content d'avoir fait une démonstration propre, à mon goût.

AL : A la limite on reviendra dessus plus tard, s'il y a des choses qui te reviennent. Dans la première séance de didactique, je t'avais demandé de me donner cinq mots que tu associais au mot algèbre. Peux-tu expliquer tes choix ?

B : C'est vraiment les premiers qui me sont venus à l'idée. Pour moi l'algèbre... C'est vrai que l'algèbre que tu fais avec des secondes ou des collèges, cela n'a rien à voir avec ça. Mais pour moi l'algèbre c'est vraiment devenu ça. Je me souviens la première fois qu'on m'a dit algèbre, on m'a dit : on va faire de l'algèbre. J'ai regardé avec des grands yeux. Finalement on n'a fait que des calculs. Et là maintenant quand on me dit algèbre, je ne pense même plus à ça, je pense à ça : espaces vectoriels, tous ces trucs-là. L'algèbre de fac.

AL : Sauf calculs ?

B : Calculs parce que finalement... Là j'ai dû repenser à ce qu'on faisait dans le secondaire. Ce qu'on apprend là, l'application c'est faire des calculs. Et c'est pareil les structures, c'est les règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

AL : Ensuite je te demandais les fonctions de l'algèbre : calculer...

B : J'en suis revenu à ça, oui.

AL : Et en géométrie ?

B : Là j'ai pensé au L6. C'est vrai la structure de groupe : les isométries cela forme un groupe, etc. Cela permet d'étudier les propriétés des transformations.

AL : Lors de la première séance, j'avais parlé des dimensions outil et objet de l'algèbre. Pour toi, ce que tu as fait en fac, est-ce que c'était du côté outil ou du côté objet ?

B : Objet. Parce que finalement, j'en reviens à la diagonalisation des matrices, c'est bien et puis après... Quand on m'a expliqué ça et bien après c'est tout... Après en analyse numérique tu diagonalises et tu appliques ça pour des algorithmes, des machins comme ça, à la limite. Ce module je n'en ai jamais vraiment vu l'utilité car ce sont vraiment des grosses démonstrations... L'intérêt de ce module m'est vraiment passé à côté. Donc là tu vois que ça peut servir. Bon sinon. Si oui par exemple en algèbre bilinéaire, quand on te présente le produit scalaire, tu comprends que le produit scalaire dans le plan c'est pas innocent tout ce qu'il y a. Encore que ce n'est pas une application finalement, c'est le produit scalaire en dimension 2. Mais sinon... Pour moi on faisait de l'algèbre, on ne se posait pas de questions.

AL : Et au niveau où tu vas enseigner cette année, est-ce que tu penses que cela va être pareil ?

B : Et non c'est beaucoup plus concret. Là on leur pose un problème, on utilise l'algèbre pour poser l'équation et après on la résout. On a un but quand même.

AL : Là tu penses à la résolution de problèmes avec les équations ?

B : Ouais. Et puis après avec les fonctions : étudier une fonction, qui elle-même vient d'un problème aussi. Surtout à ce niveau, il faut qu'ils se raccrochent à quelque chose de concret sinon ils sont un peu perdus.

AL : Pourquoi est-ce que tu as choisi de devenir prof de maths ?

B : ... Cela m'a toujours trotté dans la tête au collège et au lycée. Et puis j'ai un petit frère qui a cinq ans de moins que moi et j'ai toujours bien aimé lui expliquer des choses. J'ai toujours aimé ça. Bon je suis allé en prépa un peu pour voir sachant que je pouvais retourner à la fac pour être prof. Donc je pouvais être ingénieur sans savoir ce qu'était vraiment être ingénieur. Tu as aussi la vague idée de normale sup derrière, mais enfin bon quand même... Je me suis rendu compte que cela allait vite et la physique j'étais complètement largué. Donc là je me suis dit : prof c'est ça. Et puis me voilà. Cela m'a toujours trotté dans la tête, mais je n'ai pas dit à quinze ans : je veux être prof et rien d'autre. Bon tant mieux. Là ce que je fais depuis un mois cela me plaît vraiment.

AL : Qu'est-ce que tu penses que les élèves attendent de toi en tant que prof de maths ?

B : Pour ceux qui attendent quelque chose de moi à mon avis... Ils attendent de moi que je leur donne un savoir, que je leur explique des choses. Enfin non pas seulement que je leur donne un savoir mais que je les aide à acquérir un savoir. Je suis une aide. A la fois je leur amène un savoir et je leur apprends à l'utiliser. Bon je dis ça pour ceux qui attendent quelque chose de l'école.

AL : Et toi comment est-ce que tu vois ton rôle par rapport aux élèves ?

B : Pour moi j'ai l'impression d'avoir une grosse responsabilité envers eux. Bon là j'ai eu le CAPES cette année, on m'a jugé sur mes capacités en maths, on ne sait pas du tout comment je suis devant une classe et on m'a laissé une classe de seconde. Cela fait peur finalement. Tu te dis que leur niveau en maths dépend de moi finalement. Bon celui qui est très bon avec ou sans moi il s'en sortira. Celui qui est très mauvais c'est la même chose. Un élève moyen, si moi je ne sais pas le tirer vers le haut, lui trouver les mots justes, peut-être qu'à cause de moi il va... Moi je trouve ça délicat. Pour moi, même après dans le futur, j'ai quand même une grosse responsabilité envers les élèves. Cette année la responsabilité est la même mais je la trouve encore plus lourde à supporter. Je leur dois ce que je peux faire de mieux.

AL : Comment est-ce que tu imagines l'enseignement des maths ?

B : Avant je me faisais une idée : on donne le cours, les exercices à faire, on corrige et puis c'est tout. Mais là je me rends compte, ce que je te disais, il faut leur apprendre à travailler. Tu as beau leur donner une formule, leur donner l'exercice, ils ne sauront pas forcément le faire. C'est à toi de leur apporter l'aide, leur donner des conseils. Et puis leur donner un regard critique par rapport à leurs solutions. C'est pas évident. Mais c'est aussi beaucoup un travail dans les autres matières, le regard critique. Espérer que ces matières vont venir interférer avec les maths après. Mais moi j'essaie, à chaque fois le retour au problème : qu'est-ce que vous en pensez ? Les faire réfléchir, pas leur faire bêtement résoudre une équation...

AL : Comment est-ce que tu imagines l'enseignement par rapport aux enseignements des autres domaines des maths ?

B : J'aurais tendance à dire qu'il est plus facile parce que finalement ils travaillent avec des nombres, des sommes... Alors qu'en géométrie il faut connaître les théorèmes, avoir une tête bien structurée pour pouvoir construire une démonstration. Bon l'analyse c'est encore autre chose : quand on balance la dérivée comme ça... Bon c'est pas dur à dériver, mais enfin à quoi ça sert. C'est des concepts plus délicats. Alors que ça c'est pas... Et cela permet de résoudre des problèmes vraiment tous simples. C'est manipuler les sommes, des différences... Je pense que pour eux c'est plus simple, c'est ce qu'ils font depuis qu'ils sont tout petits finalement.

AL : Est-ce que tu te poses des questions par rapport à l'enseignement de l'algèbre ?

B : Je dirais sur l'enseignement en général. Bon en ce moment c'est de l'algèbre parce que je fais de l'algèbre. Oui peut-être que ce que je pense être des questions d'enseignement sont des questions de l'enseignement de l'algèbre. Je ne sais pas puisque je n'ai fait que ça depuis le début de l'année. Sur l'algèbre en particulier, non, je ne me suis jamais posé de questions sur l'enseignement.

AL : Quelles sont les questions que tu te poses sur l'enseignement ?

B : Sur quels exercices faut-il insister ? Est-ce que cela vaut la peine d'être vu ? Est-ce ça c'est judicieux de le mettre dans le cours ? Alors j'essaie de faire un cours pas trop lourd pour ne pas perdre temps puisqu'ils ne le liront pas de toute façon.

AL : Comment est-ce que tu choisis ce que tu vas mettre dans ton cours ? Les exercices ?

B : Les exercices, en gros, je les fais et puis je me demande ceux qui peuvent être intéressants. J'essaie de trouver des exercices où il y a des trucs qui pourraient leur donner l'idée, pour qu'après ils aient le réflexe. Pour mon cours, j'essaie de faire quelque chose de succinct, de clair. Les exemples j'en mets des très simples. Ensuite j'essaie de faire très rapidement des exercices d'application du cours et après on va voir un peu plus loin.

AL : Est-ce que tu as rencontré des difficultés particulières par rapport à l'algèbre ? On en a peut-être déjà parlé.

B : Des difficultés d'élèves ouais je t'ai déjà montré. Difficultés pour moi... Non je crois que je ne suis jamais resté bouche bée... Peut-être que des fois je leur ai donné des explications qui n'étaient pas... Mais cela ne me revient pas en tête... Cela a dû m'arriver d'être pris au dépourvu et de donner une explication pas terrible. L'idéal c'est de se poser les questions avant. Il y a des choses on y pense pas. Surtout moi, j'ai jamais vu un élève de seconde, je ne sais pas comment c'est fait finalement.

AL : Est-ce que tu penses que tu te poseras plus de questions en géométrie ?

B : Peut-être qu'étant donné que moi-même la géométrie cela ne m'a pas plu énormément, peut-être que je vais plus me rendre compte des difficultés qu'ils ont. Mais d'un autre côté je ne sais vraiment pas comment aborder parce que quand je vois les horreurs qu'ils m'ont écrites dans l'évaluation, des démonstrations qui n'ont ni queue ni tête, je me dis qu'il y a du travail. Surtout quand je serai prof au collège il va y avoir vraiment beaucoup de travail. Je vais essayer de les préparer vraiment à fond. Cela revient à se poser des questions finalement.

AL : Est-ce que tu penses que quelque chose a changé dans ta vision de l'algèbre depuis que tu enseignes ?

B : Le questionnaire c'est le meilleur exemple. Pour moi au début de l'année l'algèbre c'était ça, maintenant c'est des équations. Pour moi l'algèbre, j'en suis certain, c'est devenu ce que font les élèves au lycée.

AL : Est-ce que tu ressens des besoins en connaissances didactiques en algèbre qui te permettraient d'être plus efficace dans ton enseignement ?

B : Ouais quand tu as un problème comme je t'ai montré tout à l'heure : quand tu as un produit avec un 4 au milieu et qu'ils mettent des signes plus, trouver une réponse. Bon il y a certaines fois c'est facile de trouver un contre-exemple mais là c'est pas évident. A part réécrire l'expression avec des signes "×" pour qu'ils se rendent compte. Certaines situations comme ça tu ne sais pas trop quoi dire à part refaire le calcul, bien détaillé proprement. Peut-être qu'on ne peut pas faire autre chose, je n'en sais rien mais... Le problème de -x, ça c'était dans l'évaluation. On en avait parlé un petit peu ensemble en formation. J'ai construit un peu l'exo comme ça. dans les bouquins ce genre de choses n'est pas traité. Pourtant ce sont des erreurs courantes. Et quand on en discute avec les autres stagiaires, ils ont vu les mêmes erreurs dans leur classe. Cela serait pas mal qu'il y ait un exercice dans le livre. Finalement c'est vrai que dans le livre tu n'as pas de réponse à des problèmes comme ça. A la limite des exercices d'aide individualisée qui ciblent sur certains problèmes, ben tu n'as rien. L'autre jour j'ai vu à la fin du Pyramide de petites activités qui ont l'air dans cet esprit. Je ne m'y suis pas encore intéressé. L'exercice dans le tableau je n'aurais jamais eu l'idée de le faire si on ne nous l'avait pas montré à l'IUFM.

AL : Tu aurais besoin d'aide en plus...

B : Des exercices ciblés qui permettent de faire face à des erreurs attendues. Parce que les erreurs tout le monde les a. Quand on discute avec les formateurs, ils les connaissent. On devrait pouvoir avoir une banque d'exercices adaptés à ces problèmes pour les appliquer en aide individualisée par exemple.

ANNEXE N° 15 : LA RETRANSCRIPTION DU DEUXIEME ENTRETIEN DE SUIVI AVEC BENJAMIN, LE 19/01/2000

AL : Est-ce que tu as changé ta progression depuis le premier entretien ?

B : J'ai pris un peu de retard, c'est tout. Je pensais commencer les repères juste avant les vacances de Noël et je me suis un peu étendu sur les inégalités. Donc j'ai commencé les repères juste à la rentrée de Noël. Sinon je ne crois pas que la progression ait vraiment été bouleversée. Je pense que la différence avec la progression qu'il y avait au départ, je te l'avais déjà dite quand j'étais venu. Juste après le premier entretien, j'ai commencé les vecteurs alors qu'au départ j'avais pensé faire les inégalités justement. Donc voilà la modification que j'ai faite. Je crois que je n'en ai pas fait d'autre depuis.

AL : En algèbre, la première fois on avait regardé le calcul numérique et les équations. Tu avais pratiquement terminé les équations.

B : Oui je commençais tout juste la géométrie.

AL : Donc là finalement tu as fait les inéquations et l'utilisation de l'algèbre dans les repères. On va regarder ton chapitre sur les inéquations. On ne va pas regarder en détail comme la dernière fois parce qu'avec ton cahier de bord j'ai déjà une vision de ce que tu as fait. J'aimerais que pour ce cours tu me dises comment tu as pensé ce cours au départ, que tu essaies de me faire une chronologie.

B : La première chose à laquelle j'ai pensé c'était d'arriver aux tableaux de signes. C'était surtout de ça que je voulais leur parler. Pour moi inéquations tout ça c'était fait parce qu'ils savent résoudre les inéquations du premier ordre bien sûr. Bon c'était le cas? Cela passait bien. Moi l'objectif de ce chapitre, c'étaient les tableaux de signes. Bon donc j'y suis arrivé assez rapidement... Ah oui, non. J'ai été pas mal embêté quand même. Surtout au début parce qu'il y a eu pas mal d'allégements de programme cette année sur les inégalités. On ne travaille plus sur les produits, etc. J'ai vraiment été enquiquiné par ça parce que je me demandais ce qu'il fallait faire. Je ne savais pas. Dans le programme c'est pas clair. En gros il n'y a plus grand-chose à faire sur les inégalités et moi j'ai été enquiquiné parce que tout ça on s'en sert quand on résout les inéquations au fond. Moi cela m'embêtait vraiment. Donc j'en ai parlé sans en parler, enfin... Bon là-dedans ils demandent de ne plus faire de travail sur les encadrements, moi j'en ai quand même fait un petit peu parce que cela n'est pas si difficile que cela puis je trouve quand même que cela peut être pas mal. Pour moi c'était pas clair. Donc j'ai fait certaines choses. J'ai essayé de faire au mieux. Bon voilà comment je partais là-dedans. Au début j'étais un peu paumé.

AL : Donc la première chose que tu as fait c'était regarder les programmes ?

B : Ah oui, oui.

AL : C'est ce que tu fais à chaque fois que tu commences un cours ?

B : Ouais. Je regarde les programmes et ce qui est fait dans les bouquins. Pas trop dans celui-là parce que je trouve que le cours n'est pas terrible. Je regarde pas mal le Fractale ou le Pyramide. J'ai aussi un cours de seconde d'il y a deux, trois ans de mon frère. Mais oui bien sûr je regarde les programmes d'abord et je coche au fur et à mesure ce que j'ai fait et je mets dans quel chapitre parce que sinon je me perdrais. Donc voilà je partais un petit peu... Je ne savais pas trop ce qu'il fallait dire ou faire. Et puis j'en avais parlé avec mon conseiller pédagogique évidemment : lui continue à faire en gros ce qu'il faisait d'habitude. En insistant un peu moins que d'habitude, mais il fait en gros... Surtout qu'il a une classe d'élèves assez scientifiques donc... Donc j'ai essayé de faire ça, mais l'objectif était d'arriver assez vite aux tableaux de signes. Puisque c'est la grosse nouveauté de la classe de seconde finalement ; puisque les inéquations, ils savent les résoudre.

AL : Donc à travers le programme, tu essaies de repérer tes objectifs sur le chapitre.

B : Disons que ce chapitre, j'y avais été vraiment sensibilisé l'an dernier dans le stage que j'ai fait. Dans la classe de seconde que j'observais, ils étaient en train de faire ça. Mais cela m'a marqué parce qu'en une heure ils faisaient deux tableaux de signes. Ils avaient énormément de mal donc cela m'avait vraiment marqué. Je m'étais dit : il va falloir vite y arriver pour pouvoir en faire le plus possible.

AL : Et après avoir regardé les programmes ?

B : Après j'ai pris les bouquins dont je t'ai parlé. Et puis avec ça j'essaie de prendre ce qui me plaît. Des fois je vois très vite que rien ne me plaît donc je m'y mets moi-même. Ou bien des fois je reprends un paragraphe dans l'un ou dans l'autre, parce que cela me plaît bien.

AL : Quand tu dis : je prends ce qui me plaît, c'est dans le cours ?

B : La présentation qui me plaît... Oui dans le cours.

AL : Donc tu commences par faire ton cours ?

B : Oui et en même temps j'ai le bouquin... Et tu as vu comment je fais : je note en même temps les exercices qui se réfèrent à ça. Sans les faire.

AL : Ce ne sont pas forcément ceux que les élèves vont faire ?

B : Non c'est ceux du livre qui se réfèrent à cette partie. Et après quand je suis dans ma progression, enfin quelques jours avant je prépare ma semaine à l'avance, je regarde les exercices que j'avais vus et là je les fais après moi-même pour savoir quels exercices je vais donner.

AL : Et quand regardes-tu les activités préparatoires que tu vas donner ?

B : Cela dépend. Des fois je les fais en module parce que je trouve que cela serait intéressant de travailler là-dessus. Et puis après je leur fais prendre le cours soit le jour même, soit le lendemain et puis on reporte ce que l'on vient de démontrer. Ou bien des fois je l'intègre carrément dans le cours : je le fais moi-même ou j'envoie un élève le faire. Je l'ai fait dernièrement pour les coordonnées du centre de gravité. C'était en module, mais on a fait du cours en module. J'ai envoyé une élève au tableau. Et sous forme d'activité on a fait la démonstration. Donc j'ai fait participer les élèves. Sinon pour les inégalités avec les carrés, c'est une activité du bouquin. On a fait d'abord l'activité en classe tous ensemble et après on a reporté ça dans le cours.

AL : Et toi dans ta préparation, à quel moment penses-tu tes activités ?

B : Cela je le fais en regardant les cours des bouquins. Je regarde les activités qu'il y a parce que les chapitres commencent par des activités. Quand elles sont dans mon livre, je les note. Quand elles sont dans un autre livre, je les fais sur traitement de textes. Pour moi, regarder le cours, c'était aussi regarder les activités qui vont avec. Moi ce qui me pose le plus problème, c'est comment leur parler des choses, ce que je leur dis. Comment est-ce que je vais introduire cela ? Cela m'embête de leur dire de but en blanc : voilà c'est ça, ça et ça. Alors des fois il y a des activités qui marchent vachement bien, cela se passe bien et des fois je ne sais pas trop quoi leur dire. Cela m'embête toujours de leur balancer un truc comme ça. Donc c'est pour ça que j'essaie toujours de leur faire découvrir. Même si ce n'est pas toujours une activité formelle, un truc qu'on a pris dans le bouquin, au moins essayer de... En parlant avec eux ou se raccrocher à ce qu'ils ont fait avant. Quand j'ai parlé de repères je me suis raccroché à ce qu'ils avaient fait l'année dernière : trois points O, I, J, etc. En essayant de... Pour pas balancer directement parce que donner un point, deux vecteurs non colinéaires, c'est artificiel. Même si la notion de repère qu'on leur a donnée en troisième était plus ou moins artificielle, autant se raccrocher à quelque chose qu'ils connaissent.

AL : D'accord. Où est-ce que tu penses les contrôles ?

B : Cela ça vient à l'intérieur du chapitre, une fois que l'on est dedans. Donc comme j'ai dit, le week-end, je prépare la semaine et en fonction des exercices qu'on a faits en classe, de ce que les élèves m'ont montré, de ce sur quoi on a insisté, c'est là que je commence à préparer le contrôle. Disons que je sais quand je vais donner le contrôle mais avant de préparer le chapitre, je ne sais pas du tout ce que je vais y mettre. C'est en voyant... Et surtout comme je n'ai pas beaucoup d'expérience je ne connais pas encore trop toutes les choses classiques donc je les découvre quand même pas mal en regardant les exercices, donc c'est là que je vois : dans le chapitre, on fait pas mal ces choses là donc j'en mets au contrôle. Je n'arrive pas encore à savoir à l'avance quels sont les exercices type. Pour ça je suis aussi pas mal aidé par mon conseiller qui me donne ses devoirs et je vois ce qu'il a donné. Il me donne ses fiches de modules, etc. Cela me donne quand même pas mal de sources. Donc je vois les choses classiques. Ça c'est quand même une difficulté : les objectifs, en gros je les sais, par exemple là c'est tableaux de signes et aussi intervalles, après quels sont les exercices qui viennent le plus souvent ? Ça il faut pratiquer, il faut regarder dans les bouquins ce qui se passe. Cela ça vient... Je ne dis pas que je découvre en même temps que les élèves mais quasiment... Cela vient sur le tas.

AL : Pour le contrôle, tu me disais que ton conseiller pédagogique te montre ses contrôles...

B : Et moi je lui montre les miens et il me fait des remarques sur les miens.

AL : Et pour le cours, est-ce qu'il y a un travail avec lui ?

B : Il m'a donné ses notes de cours et moi je ne lui présente pas les miennes. Là où il voit ce que je fais, c'est quand il vient me voir, là je lui fais une fiche comme quand le tuteur vient, je lui explique ce que je fais, où j'en suis et puis c'est tout.

AL : Donc il n'y a pas de discussion...

B : J'ai mon cours... Bon il me montre ce que lui fait, mais non je ne lui montre pas mon cours.

AL : On va entrer plus dans le détail de ce cours. On va regarder d'abord les activités. Tu as commencé ce cours le 23 novembre ?

B : Oui le mardi. Alors là c'est pareil j'avais prévu de faire ça dans mon tableau et comme c'était un peu long j'ai préféré leur faire faire une fiche découpée là-dedans avec la place pour écrire la démonstration et on la faisait ensemble en classe.

AL : C'est la fiche qui est collée dans ton cahier de bord ?

B : Oui voilà. Je leur ai distribué ça et on a fait la démonstration ensemble. Donc c'était pour gagner du temps mais le gain de temps n'était pas si évident que cela.

AL : Et là au niveau de la démonstration, tu as fait quelque chose de théorique ?

B : Oui. On cherche le signe de la différence en fait.

AL : D'accord. Quel était ton objectif ici ?

B : Puisque c'était des choses qu'ils connaissaient, c'était déjà de les remettre au point. Parce que j'essaie toujours de me rattacher à ce qu'ils connaissent. Et puis ici c'était pour les démonstrations, pour leur montrer comment on fait pour comparer deux nombres. On évalue le signe de la différence et on regarde ce que cela donne. C'était un peu pour les sensibiliser à ça. J'essaie un petit peu de leur faire des démonstrations pour qu'ils voient un peu ce que c'est.

AL : Cela s'est bien passé ?

B : Moyen, parce que j'ai l'impression que cela leur parait artificiel, surtout de travailler avec des lettres comme ça, ils savent pas trop. Quand je leur dis : si on sait que a-b est négatif, alors on sait que a est inférieur à b, ils acquiescent parce qu'ils arrivent à manipuler l'inégalité. Mais quand ça vient dans une démonstration, il y a quelque chose. Quand il s'agit de mettre en jeu cette méthode, cela ne va pas. Là j'ai encore eu le coup hier, je leur ai fait une démonstration pour le vecteur directeur d'une droite dont on connaît l'équation. Je leur ai fait une vraie démonstration et c'est la pataugé complète. Ils se laissent perdre par les lettres, ils sont perdus tout de suite. Pourtant j'essaie de détailler, de m'arrêter, d'en parler avec eux mais ça... Ça passe mal.

AL : Et en démonstration en géométrie, c'est pareil ?

B : Oui, surtout dans le calcul vectoriel : c'est une horreur. Par contre j'ai eu l'impression dans le chapitre sur les repères que les propriétés vectorielles étaient mieux acquises. Par exemple la propriété : pour montrer que trois points sont alignés, on montre que deux vecteurs sont colinéaires, avant il fallait vraiment les presser, là sur le premier exercice qu'on a fait, il y en a un qui m'a donné la propriété. Peut-être que finalement en laissant macérer un peu cela finit par venir. Peut-être que c'était un peu trop frais, je ne sais pas. Mais c'est vrai que les vecteurs, cela a été un moment vraiment difficile. J'en ai discuté avec d'autres collègues, ils pensent exactement la même chose.

AL : Pour les opérations sur les inégalités, tu as attaqué directement sans activité préparatoire ?

B : Non. Là j'ai commencé par des choses connues : on rappelle ça, etc. En plus ils étaient contents de revenir avec des nombres donc ils écoutaient vraiment bien. Cela se présentait bien. Là c'était des choses qu'ils connaissaient. La petite démonstration que je ne trouvais pas difficile mais qui a eu du mal à passer quand même. Et après j'ai embrayé sur l'activité 4 : rangement de carrés, de racines... Bon là c'était dur. Bon l'élève qui était au tableau était déjà vraiment paumé.

AL : Tu as repris l'activité directement sous cette forme là ?

B : Oui je l'ai prise vraiment comme dans le bouquin. Bon moi cela ne me semblait pas vraiment... Parce que finalement cela n'utilise que les identités remarquables. Alors est-ce que ce qui les a bloqués c'est encore : pour étudier deux nombres, on étudie leur différence. Peut-être, je ne sais pas. Mais là je n'arrive pas trop... A part que ce sont des lettres aussi peut-être ? Je ne vois pas trop ce qui peut les bloquer là-dedans.

AL : Déjà la première question : démontrer que b^2, etc.

B : Oui mais dans la mesure où je ne les ai pas laissés faire ça tous seuls. Je n'aurais jamais donné ça à faire à la maison. On était en classe, je guidais l'élève.

AL : Quelles aides as-tu apporté ?

B : Là une fois qu'on a lu ça, je les laisse patauger pendant quinze secondes évidemment. Et puis je dis : quand tu vois b^2-a^2, cela te fait penser à quoi ? Elle répond tout de suite : identité remarquable et elle écrit : (b-a)(b+a)... Je dis : on veut que ce soit du même signe que b-a, on a déjà b-a donc on va regarder ce qui se passe avec b+a.

Alors après dire comme b et a sont positifs, b+a est positif... Ouais, bof... Est-ce que c'est déjà trop, je ne sais pas trop... ? Là je ne sais pas du tout.

AL : C'est sûr que ce genre de choses ils en ont sûrement peu vu en collège...

B : Ah ça j'en suis conscient, bien sûr. Alors je reviens toujours à des exemples numériques : tu prends a=1, b=2, cela fait 3 c'est positif. Prenons plusieurs exemples comme ça. Ils finissent par être convaincus mais après une fois que l'on revient à b+a positif, cela ne va plus. Il y a un blocage quand on passe de l'un à l'autre.

AL : Dans le premier chapitre, tu n'avais pas fait de démonstration avec des lettres. A part peut-être l'exercice sur les distances et les valeurs absolues.

B : Ouais. Non c'est vrai que je n'ai pas fait tellement de démonstrations. A part la solution de ax+b=0, je fais le calcul mais là ce sont des choses qu'ils ont déjà vues.

AL : Donc c'était pratiquement la première fois...

B : Que je faisais une vraie démonstration avec eux.

AL : Ce n'est pas étonnant. Il y a des raisonnements de ce type dans les fonctions et tu verras que cela pose problème.

B : Alors après c'est pareil $\sqrt{b}-\sqrt{a}$, là c'est le contraire : il faut utiliser l'identité dans l'autre sens. Alors ça c'est enquiquinant, là tu parles de formes conjuguées, c'est plus au programme. A partir du moment où on ne parle plus de forme conjuguée, est-ce qu'on n'en parle plus du tout ? Est-ce qu'on ne démontre rien ? Je ne sais pas. Moi je trouve que c'est intéressant de manipuler des lettres comme ça, parce que maintenant il faut commencer à voir ça. Mais c'est dur. J'en ai parlé quand même de forme conjuguée. Je me suis dit que ce n'était pas grand-chose de donner un mot de vocabulaire. Et puis cela permet de réinvestir les identités remarquables. Je trouve ça pas mal. Et puis j'ai l'impression que des qu'ils voient des lettres ils bloquent.

AL : Ils ne donnent pas vraiment un sens à ce qu'ils font.

B : Ouais peut-être. Et ça je l'avais remarqué dès le début de l'année. Le calcul littéral cela allait mal dès le début de l'année pour beaucoup d'élèves.

AL : Et tu t'attendais à de telles difficultés au début de l'année ?

B : Oui je m'attendais... Autant je ne sais pas. Mais je m'y attendais, je savais que c'était quelque chose d'assez nouveau.

AL : D'où le savais-tu ?

B : Parce que pendant les vacances j'avais regardé les programmes de collège et lycée pour pas être dans le vague dès le début de l'année. Visiblement cela dépend des classes : il y en a qui ont déjà pas mal bossé avec les lettres, d'autres ne savent pas du tout ce qu'est le calcul littéral. Il faut gérer les deux points de vue, c'est embêtant aussi.

AL : C'est vrai que si on regarde les sujets de brevet, on est loin d'exercices de ce type.

B : C'est vrai que c'est beaucoup du numérique. J'ai bossé dessus parce que je viens de finir le stage de pratique accompagnée. C'est vrai que c'est que du calcul.

AL : Ces comparaisons avec les carrés, les racines, tu l'as réinvesti dans des exercices.

B : Pas tellement finalement. Parce que quand on regarde les allégements, bon... Et par contre la comparaison de a et a^2 qui dépend de a >1 ou a<1, ça c'est passé comme une lettre à la poste. Au début je leur ai posé la question, ils m'ont dit que forcément a^2 est plus grand que a. Je leur donné des exemples numériques : 1/2, 1 et 2. Là tout de suite : ah oui cela change en 1. On a fait la démonstration et là cela a été. Pourquoi je n'en sais rien. Parce que finalement la démonstration n'est pas plus simple que ce que l'on fait là. Mais peut-être qu'avec des exemples numériques au départ... Alors que là il n'y a rien auquel se raccrocher. Alors peut-être qu'il aurait fallu commencer par demander à comparer 2^2 et 4^2. Je ne sais pas.

AL : Est-ce que tu vois où tu pourrais prolonger ce chapitre ?

B : Je ne comprends pas.

AL : Où est-ce que tu pourrais reprendre cela et les aider à comprendre pourquoi ?

B : Quand tu leur donnes deux nombres, ils sont pas bêtes, ils comprennent bien ce que cela donne.

AL : Ils savent l'appliquer ?

B : Ah oui, oui.

AL : C'est la démonstration ?

B : Oui bien sûr. L'application ça va. Et cela ça m'arrive souvent : à la fin quand tu donnes un exemple numérique, ils te disent que c'est facile avec des nombres. Hier avec le vecteur directeur, ils ont été complètement assommés par la démonstration. Mais quand on a fait un exercice, il y en a un qui m'a donné les coordonnées : ah ben c'est facile ! C'est vrai que c'est facile mais ils se sont laissés submerger par la démonstration. Il y avait plein de lettres partout : ils sont paumés. Après j'ai fait les intervalles. Là cela a bien été, ils ont bien compris ce qui se passait. J'ai beaucoup insisté sur la relation avec le dessin, sur la différence entre crochets ouverts - crochets fermés. Et ça je trouve que c'est pas mal passé. Intersection et réunion, ils ont bien compris ce que c'était. Là j'ai été surpris. Intervalles c'est quand même... Mais là ça a été bien.

AL : Comment se fait-il que tu pensais qu'il y aurait plus de difficultés ?

B : Pour moi c'est pas très... Parce que peut-être que pour moi intervalle c'est peut-être plus que ce que eux ils pensent aussi. Parce qu'eux regardent ce qui se passe sur la droite, ils prennent le premier, le deuxième et puis hop cela leur fait l'intervalle quoi. Là où j'attendais des difficultés c'était sur intersection et réunion. Mais finalement c'est pas mal passé. Alors la plupart s'aident d'un dessin pour trouver intersection et réunion, c'est normal et tant mieux. Mais j'ai été agréablement surpris.

AL : Donc ensuite...

B : Ensuite j'ai fait l'étude de signes. Vraiment pour moi ce qui était le cœur du chapitre. Bon alors là cela a été une catastrophe. C'était la pire séance de l'année : signe de ax+b. J'ai fait au départ quelque chose de théorique finalement : on passe b de l'autre côté, etc. Il y a trois cas suivant le signe de a, ce n'est pas évident non plus. Tableau de signe. Et puis là, je ne sais pas, cela n'allait pas : pourquoi ? Pourquoi on fait ça ? Déjà il y a une élève qui m'enquiquinait : quand je divisais par a quand a est négatif, j'obtenais x>-b/a. Elle me soutenait que parce que a était négatif le moins disparaissait. Elle en démordait vraiment pas et ça c'est contagieux, cela se propage. Là moi je reprends toujours un exemple numérique, je lui montre. Et c'est vrai que sur un exemple numérique, on l'enlève le moins. Et pour lui faire comprendre que le moins était dans la lettre... Et j'ai retrouvé les problèmes que j'ai eus avec la valeur absolue. Là cela a duré longtemps. Et là quand elle m'a sorti que sur mon exemple j'enlevais le moins... C'est dur de leur dire que c'est pas le même moins. Heureusement qu'il y avait certains élèves plus ou moins d'accord avec moi donc ils ont expliqué aux autres. Et je sentais qu'ils n'étaient pas convaincus, cela n'allait pas. Et bon ils se demandaient pourquoi on faisait un tableau de signes. Alors c'est vrai que faire un tableau de signes pour ax+b c'est un peu nul, je suis d'accord. Donc il y a une élève qui m'a dit que cela ne servait à rien. Alors là je lui ai dit que cela sera pour ce que l'on fera après. Bon cela a duré longtemps. Comme cela n'allait pas, j'ai fait un exemple numérique. Et cela s'enfonçait. La séance était complètement fichue. C'était vraiment une catastrophe. En rentrant j'ai décidé de faire une fiche avec un exemple numérique... Aussi ce qui les gênait je crois c'est que pour connaître le signe de ax+b ou de 2x+1 par exemple, il suffit de savoir quand c'est positif et après on sait quand c'est négatif. Ça j'ai l'impression que cela les a beaucoup gênés aussi. Moi comme je considérais que c'était évident, je leur ai dit au départ : il suffit de voir quand c'est positif. Je n'ai étudié que le cas positif et après dans le tableau on mettait un moins. Pourquoi on met moins ici, etc. ? Donc l'exemple que je leur ai fait : j'étudie quand 2x+1 est positif, quand il est négatif, on reporte dans le tableau. Et après je leur fais remarquer qu'un des deux est superflu parce que... Là j'ai fait une phrase en français pour dire ce qui se passait. Et puis après je leur demande d'en faire un autre. Bon cela a été un peu mieux. Je pense que j'aurais dû commencer par ça. Cela a été une erreur de commencer par du littéral. Ça plus jamais, c'est terminé. Donc deux erreurs : le littéral et seulement considérer le cas où c'est positif. J'ai été trop vite.

AL : Le fait que les élèves ne comprennent pas pourquoi on peut se contenter du cas où c'est positif, s'explique sans doute par le fait qu'ils ne savent ce que signifie résoudre une inéquation. Quand ils trouvent x>2, ils ne savent pas forcément ce que cela veut dire, ni ce qu'ils ont cherché.

B : Disons que systématiquement ils font la représentation sur l'axe des réels mais oui ils ne savent peut-être pas...

AL : Ensuite...

B : On passe aux tableaux de signes, au signe d'un produit. Là cela a été pas mal. Bon la pilule était peut-être passée, je ne sais pas. Bon ils ont sûrement cherché à comprendre à la maison aussi. Bon après étudier un signe, ils ont compris ce qui se passait. On applique la règle des signes... Visiblement cela s'est bien passé.

AL : Là tu as commencé par un exemple ?

B : Oui. J'ai commencé par un petit topo : d'abord on factorise et ensuite on applique la règle des signes. Et directement un exemple.

AL : Pas d'activité ?

B : Non directement ça. Bon ce qu'il faut voir aussi c'est que j'écris ça, mais je leur dis aussi pas mal de choses à côté. Je pose des questions. J'essaie de rendre ça un peu vivant. Cela ne suffit pas. Souvent j'écris un graffiti au tableau : regardez moins un fois moins deux cela fait un truc positif. Pour expliquer la démarche qu'on va employer...

AL : Explique moi comment s'est passée la construction du tableau de signes.

B : J'ai commencé par... Alors là j'avais fait une erreur aussi... J'ai commencé par étudier le signe de chacun des facteurs. Je leur ai dit que l'on voyait apparaître trois valeurs charnières. Et j'ai construit le tableau, j'ai reporté les trois valeurs... Et au départ je n'avais pas tracé les barres... Oui c'est ça que j'ai fait. J'avais pas tracé les barres complètement verticales. Pour la première, j'avais seulement tracé là et j'avais dit : là on met 0, moins et plus. Et après j'ai été coincé... Je crois même que j'avais envoyé un élève le faire au tableau et c'est lui qui m'a plus ou moins entraîné à faire ça et je ne voulais pas le forcer à faire autre chose. Bon à la fin on se retrouve coincé, parce que là il y a un signe moins qui se balade alors que là il y a moins, plus... On est un peu perdu... Donc là j'ai repris : on trace des traits verticaux pour bien séparer. C'est pas mal passé. Mais je me suis rendu compte que la construction du tableau n'était pas bonne. J'avais oublié qu'il fallait construire comme ça. Ils ont bien compris quand même comment cela se faisait. Alors là j'ai été surpris aussi par rapport à la classe que j'avais observé l'année dernière, j'ai trouvé que sur les tableaux de signes ils réagissaient pas mal. Bon je leur ai jamais fait de tableaux de signes super difficiles où il fallait trouver une super factorisation. Mais ce qu'ils m'ont fait c'était bien.

AL : Quelles étaient les difficultés des élèves l'année dernière ? Par rapport à la factorisation ou par rapport au remplissage ?

B : Le remplissage. Ouais ils voyaient pas le lien. Bon étudier le signe de chaque truc, ça c'est pas dur, on résout les inéquations. Et puis après... Et puis ils étaient lents : en une heure ils en faisaient deux. Moi cela m'avait marqué et la conseillère pédagogique m'avait dit que c'était un truc qui passait mal. Donc là je craignais le pire. Et puis en fait à part la première séance cela a été sans problème. Bon par contre la semaine de la rentrée, pour se remettre dans le bain, j'ai refait un tableau de signes et il y a un élève qui n'est pas très fort mais qui n'est pas non plus... Moyen quoi, qui était perdu. Pourtant la forme était factorisée et il ne savait pas quoi faire. Alors il a fallu que j'aille le voir : bon alors qu'est-ce qu'on fait là ? Il savait pas trop. J'ai dit : on va étudier le signe de chacun et hop c'est parti tout de suite.

AL : Il ne se rappelait plus la méthode.

B : Ouais. Je ne sais pas. Mais enfin j'ai été plutôt pas mal surpris de... Et puis après sur les quotients pareil cela a bien été, j'ai vraiment insisté sur la valeur interdite et cela a été pas mal. Quand je l'ai fait en DS, il y en a beaucoup qui ont pensé à la valeur interdite.

AL : D'accord. Lorsqu'après les élèves ont résolu des inéquations, comment cela se passait-il quand il fallait qu'ils donnent le ou les intervalles solutions ?

B : Il y a pas mal d'élèves qui te font un bon tableau de signes et après soit ils ne te donnent pas d'ensemble de solutions parce qu'ils considèrent que le résultat c'est le tableau de signes, soit... Je ne sais plus ce que j'ai vu comme erreur... Enfin de mauvais passages à l'intervalle. Cela coinçait.

AL : Ensuite, systèmes de deux inéquations à une inconnue.

B : Bon cela ça a été. C'est là que je me suis rendu compte qu'intersection et réunion la différence était bien saisie. C'est pas mal passé comme c'était avec des inéquations du premier ordre ça passe pas mal. Ouais j'ai pas mal insisté aussi sur inégalité stricte, inégalité large et puis ce que cela donnait avec les intervalles. Et ils réagissent pas mal là-dessus. Bon après, j'ai parlé des approximations parce qu'ils en parlent dans le programme mais vraiment pour dire. Parce que cela leur paraît vraiment artificiel aussi. Valeur absolue de x-a inférieure à $K.10^{-p}$. Après avec des exemples numériques, cela leur vient un peu mieux. Mais bon vraiment sans plus. Ça j'ai fait un truc en aide individualisée avec trois élèves qui voulaient un peu travailler là dessus. C'est trop formel, cela ne leur dit rien.

AL : Tu l'as fait parce que c'est dans le programme ?

B : Oui et parce qu'il n'y a presque pas d'exercices dans le livre. Et je trouve pas ça forcément... Je trouve que c'est bien de le sensibiliser, de voir la précision, etc. Ça d'ailleurs je l'ai revu dans une activité après. Mais bon après leur faire faire des exercices là-dessus...

AL : D'accord. Donc là la seule activité que tu as faite c'est pour la comparaison des carrés ?

B : Oui..

AL : Cela ne t'a pas semblé nécessaire pour les tableaux de signes.

B : Non cela ne m'a pas semblé nécessaire. Je n'ai pas regardé ce qu'il y avait mais je ne sais pas ce qu'il y a sur les tableaux de signes...Parce que pour moi, c'est le genre de choses où en parlant un petit peu, en expliquant que deux nombres négatifs en les multipliant cela fait un nombre positif, etc., en mettant ça au point, comme c'est des choses qu'ils font assez bien. Je pense que je pouvais me dispenser d'activité là-dessus.

AL : C'est plus en terme de gain de temps ?

B : Oui aussi bien sûr. Parce qu'une activité c'est vrai que cela prend beaucoup de temps.

AL : Comment est-ce que tu choisis les exercices que tu donnes à faire à tes élèves ?

B : Je les sélectionne dans ce que j'ai marqué là. A la maison, cela dépend : des fois je leur donne des trucs faciles pour qu'ils les fassent. Des fois je préfère donner des trucs difficiles sachant que la plupart ne réussiront pas pour voir un peu ce que cela donne, pour qu'ils réfléchissent un peu et puis on le corrige en classe. Bon les exercices j'essaie de voir ce qui est le plus classique, le plus important, ce qu'il faut qu'il leur reste à la fin du chapitre. C'est là que je commence à construire mon devoir aussi, voir ce qu'il est important de connaître. Je les prépare en général pour la semaine comme je t'ai dit.

AL : Quand tu dis : je vois ce qui est le plus classique, qu'est-ce que cela signifie ?

B : ... Et puis ce que donne mon conseiller pédagogique. Pour moi c'est quand même une référence. J'essaie de voir un petit peu ce qui revient. Bon et puis sur ce que moi je sais... Ce que je sais de quand j'étais élève, de ce que l'on va leur demander. Bon mon frère a un passé beaucoup plus récent que moi au lycée donc cela permet de voir... Bon moi c'étaient encore les anciens programmes, j'étais encore à l'époque du bac C. Donc cela a vraiment beaucoup changé. C'est quand même plus frais. Oui et c'est beaucoup mon expérience quand même qui fait que je sais un peu ce qu'il faut savoir en priorité.

AL : Est-ce que sur ce chapitre tes élèves ont rencontré de grosses difficultés sur certains exercices ?

B : Alors là il n'y a rien qui me vient comme ça. Attends, il faut que je retrouve mes notes...

AL : Mais comme ça a priori il n'y a rien ?

B : Non. Ce qui me reste vraiment de chapitre c'est le signe de ax+b. Sinon en exercice, non, il n'y a rien qui me vient vraiment. A part des erreurs sur des choses du genre oubli des valeurs interdites, des choses comme ça, ou bien confondre une intersection et une réunion, enfin bon des choses qui sont normales quand on vient de les voir. Je ne crois pas qu'il y ait eu vraiment d'obstacle dans les exercices.

AL : En ce qui concerne le cours que tu fais écrire aux élèves, qu'est-ce que tu fais écrire ?

B : En général c'est ce qu'il y a là.

AL : Oui. Mais est-ce que ce sont plutôt des définitions, des propriétés, des points de méthode...?

B : Surtout des définitions et des propriétés. Alors là il y a des points méthode parce que cela s'y prête, pour les tableaux de signes je veux leur donner une méthode. Les méthodes, je les donne plutôt en module. Sinon c'est assez classique : définitions, propriétés.

AL : Et tu repères dans les livres ce qui te semble important ?

B : Oui.

AL : Est-ce que tu as l'impression que ta vision du cours a changé ? Est-ce que la démarche que tu m'as décrite, regarder les programmes puis les livres, était la démarche que tu avais au début de l'année ?

B : Oui depuis le début. Parce qu'au début je ne savais vraiment pas comment m'y prendre. La première référence c'était le programme de toute façon.

AL : Donc tu n'as pas changé ta méthode ?

B : Non. Je travaille toujours pareil.

AL : Et est-ce que ta vision de ce que tu fais écrire dans le cours a changé ?

B : Surtout pour des gains de temps. Comme je t'ai montré tout à l'heure, je pensais que j'allais gagner du temps en leur faisant remplir une fiche. Bon finalement cela ne sert à rien. Dans le chapitre sur les vecteurs à la fin je voulais terminer par une démonstration du théorème vectoriel. Bon moi la démonstration elle me prend deux pages et demies. Je trouve qu'elle est bien mais je me suis dit : cela va être trop lourd, je ne peux pas leur faire ça. Donc je leur ai construit une activité là-dessus. Bon on m'aurait montré cela au mois d'août je me serais dit : oui, évidemment on fait ça en seconde. Bon en voyant ce que c'est avec les élèves je me suis dit : soit on le fait en activité, soit on ne le fait pas du tout.

AL : Si tu reprenais ce chapitre, qu'est-ce que tu changerais ?

B : Evidemment le signe de ax+b. Sinon peut-être que j'introduirais l'activité qui est mal passée par du numérique. Même si là je ne suis pas persuadé que du numérique... Je ne sais pas du tout... Si je leur dis $2<4$, $2^2<4^2$, ils vont me dire oui évidemment... Alors que le passage est plus évident ici : on voit bien qu'il se passe quelque chose en 1. Mais là... Ça je ne sais pas comment je le referais. Sinon les intervalles, je pense que ce que j'ai fait est pas mal passé.

AL : Pour les carrés, tu vas le revoir au niveau des fonctions.

B : Oui.

AL : Et là tu pourras donner un sens graphique à ça. Et ils auront un repère avec la courbe pour retenir.

B : Oui c'est vrai. Mais j'ai l'impression que plus que le résultat c'est la démonstration qui les... Je pense que c'est ça qui coince. Le fait que $a^2<b^2$, ils en sont persuadés et cela ne pose pas de problème. Ils appliquent bien ça. C'est le passage qui coince.

AL : Ce passage tu le reprendras avec les fonctions.

B : Oui et peut-être que comme les vecteurs, cela sera plus digéré et que cela passera mieux. J'aurai peut-être d'agréables surprises.

AL : Je voudrais que l'on finisse sur le ou les contrôles.

B : Bon il y a un contrôle d'une heure que voilà et il y a peut-être eu un contrôle d'une demi-heure mais je ne sais plus sur quoi cela portait... Calcul vectoriel... Non il n'y a eu que ça : le DS.

AL : C'est quoi la différence entre contrôle et DS ?

B : C'est ténu... Le contrôle dure une demi-heure et le DS dure une heure. Et l'interrogation dure dix minutes et est souvent surprise.

AL : Dans ce DS il y avait deux exercices d'algèbre ?

B : Là il y avait pas mal de vecteurs. Les deux exercices que j'avais donnés sur les inéquations étaient plutôt simples. C'était pour avoir des points. Comme je savais que les exercices 3 et 4 ils auraient du mal. J'ai fait simple volontairement.

AL : Est-ce que ça c'est ce que tu exiges de tes élèves ? L'exercice 1 oui parce que ça c'est déjà exigible en troisième. L'exercice 2 avec les tableaux de signes ? Est-ce que c'est le minimum que tu exiges de tes élèves ?

B : Oui.

AL : Est-ce que tu comptes aller plus loin ? A part le deuxième ici je vois que tout est factorisé.

B : Alors ça je compte y revenir un peu plus tard sur des choses plus difficiles à factoriser. Je ne sais pas quand. Oui ça je suis conscient que je n'ai pas fait... La plupart sont déjà factorisées. C'est vrai. J'en referai des plus difficiles où il faut faire un effort.

AL : L'exercice 1 je pense que cela a dû aller quand même. L'exercice 2, est-ce que tu as repéré des choses ?

B : Je lis ce que j'ai noté... Oui il y en a beaucoup qui se contentent du tableau. Pour eux le tableau, c'est la solution et des oublis de valeurs interdites. Sinon je mets que cela a été bien traité. Tout le monde semble avoir compris... Mais le but de l'exercice 1 c'était surtout de passer aux intervalles et ça ça a été pas mal.

AL : Et ceux qui écrivent des solutions à partir de tableaux, est-ce que c'est correct ?

B : Je n'ai rien noté donc c'est que la plupart des choses que j'ai vues étaient correctes. Je n'ai pas souvenir de choses marquantes. C'est sur ce DS que je t'avais donné des copies je crois ?

AL : Je n'ai pas regardé... Non c'est le deuxième.

B : C'est qu'il n'y avait rien d'intéressant alors.

AL : Comment as-tu choisi ces exercices ? Tu m'as déjà dit que tu les as choisis pas trop difficiles pour donner des points.

B : Pour que ce soit raisonnable et pour que je me rende compte s'ils ont compris ce que c'est qu'un tableau de signes. Parce que si je leur donne des choses plus difficiles à factoriser, il faut déjà franchir l'obstacle de la factorisation et ensuite construire le tableau de signes. S'ils n'arrivent pas à franchir l'obstacle de la factorisation, on ne sait pas s'ils ont compris les tableaux de signes. Alors que là c'est tellement simple que celui qui a compris le tableau de signes, il sait faire. Je me suis rendu compte que la plupart a compris. Donc maintenant on va pouvoir faire un peu autre chose. Mais un peu plus tard. Mais c'est vrai que lors du travail sur les fonctions, commencer par ça, cela serait peut-être pas mal.

AL : C'est-à-dire ?

B : Commencer par des tableaux de signes.

AL : Les fonctions tu les attaques bientôt.

B : Sans doute après les vacances de février.

AL : Donc finalement sur ce chapitre cela a globalement bien marché.

B : Oui. Enfin tu vois que je n'ai pas été très exigeant finalement.

AL : Oui mais finalement tu as vu que sur le minimum cela allait. Comment est-ce que tu gères la correction de tes devoirs en classe ?

B : Alors là, je ne sais pas trop quoi faire donc cela dépend des moments. Le premier, je crois que j'ai voulu le corriger en classe, cela prenait trop de temps donc j'ai laissé tomber. Alors maintenant ce que je fais, moi je trouve que ça va pas mal, c'est que je relève ce que je vois comme erreurs principales. Déjà pour le cahier de bord. Je les note sur une feuille et j'en parle aux élèves avant de rendre les copies. Et puis le ou les exercices qui ont été les plus mal traités, on corrige. Donc là c'étaient les deux exercices 3 et 4 de géométrie qui n'ont pas marché du tout. Le 4, on avait fait le même exactement en classe donc ça je ne corrige pas et l'autre je l'ai donné à refaire à la maison.

AL : Est-ce que ta vision des évaluations a changé depuis le début de l'année ?

B : Je suis moins exigeant que ce que je pensais être. Même globalement. En classe je tolère un certain niveau de bavardages parce qu'on ne peut pas les museler complètement. Je ne pensais jamais tolérer cela. En DS, c'est pareil : je pensais leur demander quand même des choses plus difficiles que ça. Mais je me suis adapté à la classe. Mais là moi je suis toujours embêté devant un DS comme ça, est-ce que c'est vraiment au bon niveau ? Je ne sais pas. Je les montre toujours à mon conseiller qui me dit toujours que ça va, que c'est correct, c'est ce qu'on peut demander à une classe de seconde. Est-ce que je ne suis pas assez exigeant ? Je ne sais pas, je n'arrive pas à savoir.

AL : Moi je peux te répondre par rapport à l'algèbre. L'exercice 2, comme je t'ai dit, t'a permis de voir dans un premier temps s'ils ont compris la base. C'est vrai qu'après tu pourras pousser un peu.

B : Il faudra aller plus loin, c'est vrai.

AL : Mais comme tu dis, cela ne sert à rien de pousser sur des choses très pointues. Là tu as choisi d'évaluer sur ça, mais il y avait d'autres choses où tu pouvais évaluer. Par exemple les approximations, pour toi c'était comme ça, pour leur présenter des choses ?

B : Oui pour leur montrer ce que c'était qu'une approximation.

AL : Tu me diras les encadrements tout ça c'était...

B : Voilà, il y avait des trucs intéressants du genre on encadre pi entre 3,14 et 3,15, entourer l'aire d'un cercle de rayon je sais pas combien. Là on peut faire des choses mais c'est plus au programme. Il y en a plein le bouquin des exos comme ça mais tout ça ça saute. Et moi finalement en regardant je ne trouve plus que ça d'intéressant là-dedans.

AL : Dans les repères, est-ce que tu as repéré des choses sur des difficultés des élèves ou sur leurs démarches ?

B : Ecoute, ça c'est tout frais.

AL : Tu parlais des difficultés dans les démonstrations avec l'exemple du vecteur directeur.

B : Ouais. Bon c'est vrai que cela parait artificiel aussi. Sur la droite je prends deux points A et B, et leurs coordonnées, je divise... C'est vrai que c'est bizarre. Mais pour passer d'une étape à l'autre c'est jamais très compliqué. Sinon là quand j'ai commencé à parler de repères... Déjà j'ai parlé de repères de droites pour leur parler de mesure algébrique. Bon ça cela a été à peu près... A part il y a un truc qui les a embêtait c'est quand je leur ai dit que c'était pas unique... Ils se demandaient pourquoi j'ai dit ça. Je leur ai montré qu'on pouvait en prendre plusieurs et puis que c'était important de dire dans quel repère on se plaçait sinon on ne savait pas de quoi on parle. Après quand je leur ai parlé de repère du plan j'ai fait le lien avec les repères (O, I, J) qu'ils connaissent en troisième. Donc quand je leur ai parlé de repères, tout de suite ils m'ont parlé de repères orthonormés. Je leur ai dit : on oublie les repères orthonormés, on verra ça au chapitre d'après, là cela peut être n'importe quoi. Donc j'ai fait plein d'axes un peu n'importe comment. Et là je m'efforce de travailler dans des repères qui ne sont pas orthonormés. Sinon je trouve que c'est pas mal... Ils ont eu du mal à faire le lien entre les cordonnées de u(x,y) et que u =xi + yj. Mais cela commence à venir. Sinon cela va pas mal. Je leur avais fait faire un DM avec des exercices de brevet dans les repères et cela a été. Même ce qu'on utilise sur les vecteurs où ils avaient des difficultés, cela revient bien.

AL : J'ai quelques questions supplémentaires à te poser. J'ai l'impression que c'est assez facile pour toi de repérer les erreurs de tes élèves. Est-ce que c'est le fait que je t'ai demandé de remplir le cahier de bord qui favorise cela ?

B : Ouais beaucoup. Le cahier de bord j'ai commencé à le faire deux ou trois semaines après la rentrée quand tu m'avais demandé d'en faire un. mais ce que j'ai écrit au début, c'est que cela m'est resté quand même. Sûrement qu'au début de l'année quelqu'un m'avait parlé de ça, peut-être qu'au début de l'année les cours de didactique parlaient de ça, les erreurs... Peut-être que j'y ai été sensibilisé, je ne sais pas... Mais là je m'efforce de regarder ce qu'ils font pour remplir le cahier de bord. Et ça m'intéresse parce que je me rends compte que quand je parle avec Régis ou avec n'importe quel autre collègue et que je dis : j'ai vu ça. Ils me disent : oui on a déjà vu ça des centaines de fois. Je me rends compte qu'on voit toujours la même chose. Donc ce que je vois là cela me servira. La prochaine fois que j'aurai des secondes je ferai en sorte d'éviter les erreurs que je vois là, ou contraire de l'amener pour voir...

AL : Et ces erreurs, tu les repères par rapport aux élèves qui sont au tableau ou sur les cahiers ?

B : Non sur les cahiers.

AL : Et avec 33 élèves tu y arrives ?

B : C'est en module que je fais ça. Je ne donne pas énormément d'exercices en classe entière. J'en donne mais c'est assez difficile à gérer parce que ça bavarde tout de suite. Et je n'ai pas le temps en classe d'aller voir beaucoup d'élèves. Donc cela ne va pas bien. J'ai l'impression que cela ne sert pas à grand-chose. Les exercices que je donne en classe entière, c'est l'application directe de cours. C'est pas un exercice de recherche ou de... Ça c'est en module.

AL : Autre question par rapport à ton emploi du temps : je n'ai pas compris quand il y avait des modules, des cours ?

B : Je les ai en classe entière le mardi de 14 à 15 et le samedi de 10 à 11. Le lundi j'ai un demi-groupe de 11 à 12 et l'autre demi-groupe de 13 à 14. Donc là je fais le même module aux deux groupes. Et le vendredi, c'est ce que j'appelle le module quinzaine, un groupe une semaine sur deux. Alors là c'est un peu enquiquinant à gérer parce qu'on ne pas vraiment faire des choses qui sont dans la progression. Parce que ce que l'on fait avec un groupe cette semaine, on aura fait deux heures de cours avant de revoir l'autre groupe. Par exemple cette semaine je commence les systèmes, qui sont un peu en dehors et qui se rapportent aux équations de droites donc on va y revenir, mais qu'on peut faire... Bon on ne fait pas de cours, une fois qu'on a donné la caractérisation avec les déterminants c'est bon, donc je leur fais une fiche là-dessus et ça y est. Là je vais gérer quelque chose en parallèle comme ça. Sur les conseils de mon conseiller pédagogique, je pense que je ferai les statistiques comme ça aussi.

AL : Et l'aide individualisée, c'est toutes les semaines ?

B : Oui, une heure le vendredi de 4 à 5.

AL : En ce qui concerne l'aide individualisée, comment est-ce que tu choisis les exercices que tu vas traiter ?

B : Je demande à mes élèves ce qu'ils veulent faire. Alors jusque là je préparais des fiches en fonction de ce que l'on me demandait. Depuis... Déjà au mois de décembre, j'ai été pris par le temps avec le stage de pratique accompagnée, et je n'ai plus eu trop le temps de faire des fiches : il y en a une où c'est du montage, des fois je leur ai donné des exercices dans le livre. Ce que je fais là depuis la rentrée, ça s'y prête parce que tous les élèves me demandent la même chose, là j'ai innové cette semaine : j'ai refait un cours à 8 élèves. Alors là ils voulaient retravailler sur ce qu'ils avaient vu en troisième sur les repères. Ensemble on a revu les formules de troisième : comment en pratique retrouver l'équation d'une droite. Ce qu'en pratique on n'a pas le temps de faire en seconde, on ne va pas passer une heure de module à faire ça. Je vais recommencer demain avec d'autres élèves. C'est pas mal, cela permet de remettre des méthodes en place. C'est une nouvelle chose que je fais en aide individualisée, je trouve que c'est pas mal de remettre plus ou moins les choses au point. C'est un peu différent de ce que je faisais jusque là. Ce n'est plus un travail de fiche. En fait je m'adapte à ce que les élèves me demandent.

AL : Les fiches étaient individualisées ou bien tu leur disais : aujourd'hui on travaille sur cette fiche-là ?

B : Non c'était individuel. S'il y en avait trois qui me demandaient trois choses différentes, j'essayais de préparer trois fiches. Et je les mettais sur la table et chacun prenait ce qu'il voulait. Et un qui avait traité la fiche "équations" pouvait prendre la fiche "valeur absolue". Et s'il a envie de me la rendre, il me la rend.

AL : Là tu me parles de ton stage de pratique accompagnée, est-ce que tu y as vu des choses en algèbre ?

B : J'ai noté des trucs pour toi. C'était une classe vraiment très faible. Une classe de troisième. J'ai observé les 4 niveaux mais le reste c'était de la géométrie. Pour leur faire apprendre les identités remarquables, le prof leur a donné un ordre : la première c'est $(a+b)^2$, bon... Et à chaque fois il s'y réfère. Moi j'ai certains élèves dans ma classe qui travaillaient comme ça. Au lieu de me dire c'est $(a-b)^2$ égale ça, ils me disaient : c'est la deuxième. Pour moi... Même si l'ordre est toujours quasiment le même j'exige qu'on me donne... Bon. Moi je trouve que quand ils arrivent en seconde ils sont un peu paumés. Alors, j'en ai parlé avec mon conseiller pédagogique. Il en est conscient mais il sait que ses élèves s'il y en a ou deux qui iront en seconde et encore ce n'est pas sûr. Il sait que ce sont des élèves qui ne poursuivront pas d'études. Pour moi c'est un obstacle à la formule littérale. Moi c'est ce que j'ai constaté en seconde sachant ça. Ce que j'ai trouvé intéressant, je ne m'y attendais pas du tout, c'est pour appliquer les identités remarquables, par exemples ils veulent développer $(x+1)^2$, ils écrivent la formule comme ça en laissant des trous et ils remplacent après. En fait ils n'appliquent jamais la formule littérale : ils se réfèrent à 1, 2 ou 3. Et finalement la formule ils la connaissent mais pas avec les lettres. Et ça marche pas mal.

AL : Oui parce qu'avec les parenthèses, s'ils mettent 2x, ils vont penser à tout élever au carré.

B : Oui voilà. Et ça marche pas mal. Et cela m'a vraiment surpris et j'ai trouvé que c'était pas mal. Mais là c'est pareil, l'élève qui se pointe en seconde après.

AL : Oui mais après ton conseiller ne leur impose peut-être pas systématiquement de l'écrire comme ça...

B : Il n'impose rien, ils le font naturellement.

AL : S'ils le font comme ça et que ça marche c'est pas gênant. La seule difficulté c'est peut-être la factorisation.

B : Et ben là c'est pareil. Et cela je trouve que c'est pas mal à faire au début. Bon après cela dépend des élèves aussi. Bon j'ai trouvé cela intéressant. Bon ça je ne sais pas si ça t'intéresse : ça j'avais constaté avec mes secondes confusion entre addition et multiplication. La longueur AC c'est 2x. Cela je l'avais vu aussi dans ma classe. Et puis je les ai pris en main sur le chapitre de trigonométrie où on a besoin de résoudre des équations de cette forme. Et systématiquement ils font le produit en croix et ils écrivent $x/2 = 3/1$. Et ils reviennent à $x=6$. Et ça ils n'arrivent pas à s'en débarrasser. Je l'ai fait une fois au tableau... Bon le prof a l'habitude de faire ça, il prend de la couleur, le divisé par 1 il l'écrit avec une couleur différente. Moi je n'ai pas l'habitude. Bon au début j'essayais de faire comme ça pour leur montrer et puis après j'ai résolu directement, ils étaient complètement perdus. Pourtant j'ai pas sauté d'étape. Tout simplement j'ai pas écrit 1 ici et j'ai pas écrit 1 ici. Et cela va trop vite pour eux.

AL : Cela peut les aider quand il y a le x au dénominateur.

B : Alors là tu entends tout et n'importe quoi.

AL : Le produit en croix est vraiment utile quand il y a le x au dénominateur.

B : Oui exactement mais eux ils ont besoin de le faire comme ça. Voilà ce que j'ai remarqué.

AL : Est-ce que tu sens que des choses ont changé dans ta vision de l'algèbre ? La dernière fois tu m'avais dit que c'était ta vision de ce qu'on enseigne qui avait changé.

B : Oui pour moi l'algèbre c'était plus ou moins espaces vectoriels, etc. Bon est-ce que cela a changé maintenant ? Je suis un peu surpris que tu ne me parles pas de vecteurs. Pour moi algèbre - espaces vectoriels, espaces vectoriels-vecteurs.

AL : Moi je travaille sur l'algèbre élémentaire. Les vecteurs m'ouvriraient sur d'autres choses.

B : Oui d'accord. Mais je ne me trompe pas cela fait partie de l'algèbre.

AL : Oui.

B : Non ma vision de l'algèbre je crois pas... Je ne sais même plus ce que je t'avais dit l'autre jour.

AL : Tu m'avais dit : pour moi l'algèbre c'est devenu ce que font mes élèves.

B : Ouais, ouais.

AL : Et est-ce que tu vois autrement l'enseignement de l'algèbre ?

B : ... Disons à part que c'est ce que je préfère, je vois pas ce que je peux trop dire.

AL : Tu préfères... ?

B : En seconde. Oui bien sûr. Tout ce qui est calcul, inégalités, fonctions. Vecteurs, moins parce que cela passe mal avec les élèves c'est tout. Comme on fait pas d'analyse, il n'y a plus que l'algèbre qui peut me plaire là-dedans. La géométrie c'est pas trop mon truc.

ANNEXE N° 16 : LA RETRANSCRIPTION DU TROISIEME ENTRETIEN DE SUIVI AVEC BENJAMIN, LE 27/06/2000

AL : On va déjà regarder ce que tu as fait en algèbre depuis que l'on s'est vu, le 19 janvier.

B : J'avais fait équations de droites, coordonnées d'un vecteur directeur. Condition de parallélisme. Et après on arrive dans les fonctions. Et après c'est des stats et l'année est terminée.

AL : Déjà dans les repères, est-ce qu'il y a des choses qui t'ont marqué ?

B : J'ai remarqué que la géométrie dans les repères passe quand même bien, par rapport à ce que j'avais vu sur le travail vectoriel, cela avait été vraiment une catastrophe. Par contre dès qu'on est arrivé dans les repères on a réinvesti ce qu'on avait vu, condition de colinéarité, etc. J'ai constaté que c'était bien compris et ils l'ont réinvesti facilement. Cela était facilité aussi parce que dans les repères c'est pas difficile de montrer que deux vecteurs sont colinéaires. Là j'ai été surpris pas parce qu'ils arrivaient facilement à faire les calculs, ça je m'en doutais, mais par le fait qu'ils arrivaient à réinvestir ce qu'on avait vu trois mois avant alors que sur le moment cela avait été laborieux. Sinon, ça je m'y attendais, c'est la confusion entre condition de colinéarité et condition d'orthogonalité. Sinon il y a quelque chose que j'avais remarqué : au début dans mon cours j'avais décidé d'écrire les équations de droites sous la forme y=mx+p et il s'est avéré qu'il y avait peu d'élèves qui avaient fait ça l'année dernière, ils ont voulu que je les note y=ax+b. Bon cela ne m'a pas gêné, mais moi après dans mon cours je notais les coordonnées du vecteur directeur (a ; b) et je n'ai pas changé. Ce qui fait que pour eux, dans le vecteur u de coordonnées a et b, a était le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine. Ce qui a posé des tas de problèmes. En fait je m'en suis pas rendu compte tout de suite et je m'en suis rendu compte avec une élève en aide individualisée. C'est vraiment une maladresse de ma part. J'avais remarqué aussi qu'il y a eu des problèmes avec le x qui au début de l'année était une inconnue et qui maintenant est une abscisse. J'ai l'impression qu'il y a des élèves qui pataugent vraiment là-dedans. Avec les lettres ils n'arrivent pas bien à faire de différence.

AL : Qu'est-ce que tu as vu plus précisément ?

B : Je ne m'en rappelle plus, à l'occasion j'ai constaté ça. Moi ce que j'essayais de faire quand je parlais de l'abscisse d'un point, c'est de mettre x avec un indice. Mais dans les équations de droites, y=ax+b, j'ai eu l'impression que pour eux x et y restent des inconnues, des choses qu'il faut déterminer. J'ai l'impression qu'ils ne comprennent pas que x représente n'importe quel nombre réel, une généralité. Je ne saurais pas te dire précisément quand j'ai ressenti ça. Ce qui me gêne quand je donne les coordonnées (x;y) à un point ou un vecteur, c'est trop proche du x et du y de l'équation. Je ne sais pas comment le formuler. Je ne sais pas dire ce qui me gêne vraiment, mais je préfère l'écrire x_A, y_B. Toujours est-il le coup du a et du b... Et puis aussi j'ai tendance à me laisser faire par les élèves. Je leur demande : on les appelle comment. Ils me donnent les coordonnées et je les prends, même si c'est x et y. Peut-être que si j'imposais, eh bien, à force, ils prendraient aussi. Et j'ai l'impression que cela doit varier d'un exercice à l'autre comme je leur demande ce qu'on prend. Peut-être que cela serait mieux d'avoir une notation claire, toujours la même tout du long. Je ne sais pas.

AL : Dans le cours, il faut, je pense, garder les mêmes notations. Mais il faut aussi leur apprendre à en changer.

B : Ensuite... J'avais donné un exercice où il y avait trois points et où il fallait écrire l'équation d'une droite parallèle à une droite passant par un point. J'avais prévu d'utiliser le coefficient directeur. Mais il y a un élève qui est passé par les vecteurs : le vecteur directeur de la droite cherché avait les même coordonnées que le vecteur AB, puis il s'est ramené à la forme du vecteur directeur du cours et a trouvé l'équation de droite cherchée. Cet élève a compris ce qu'il avait fait mais les autres non. C'est pareil le fait qu'un vecteur puisse avoir tout un tas de coordonnées, ça heu... Enfin pas tout un tas de coordonnées, que quand on multiplie par un scalaire non nul cela reste un vecteur directeur... Pourtant quand j'ai fait le cours, j'ai bien insisté : c'est un vecteur directeur, en en dessinant plein, des grands, des petits. C'est pour cela aussi que j'ai été assez ferme : je leur ai fait noter les coordonnées de vecteur sous forme de colonnes pour différencier par rapport aux points. Pour moi, il y a une vraie différence mais pour eux cela n'a rien à voir, un point peut être mis en colonne. J'ai constaté qu'il y avait des profs aussi qui notaient les coordonnées de points en colonne. Moi cela me gêne vraiment. Et c'est vrai que c'est fort difficile de leur faire comprendre la différence. Ensuite on arrive à la norme, bon cela passe bien. Ce qui est bien c'est que donner la formule de la norme m'a permis de leur démontrer la formule qui leur donne la longueur AB. On retrouve quelque chose qu'ils connaissaient déjà. Je trouve cela bien de leur dire vous voyez ce que vous connaissiez avant, vous savez le démontrer. Là, j'avais donné un exercice à la maison pour démontrer la condition d'orthogonalité. J'avais envoyé une bonne élève au tableau. Mais les autres n'ont pas forcément suivi. Et puis c'était toute une histoire d'équivalences. C'est complètement à base d'équivalences. J'ai pas insisté là-dessus mais est-ce qu'ils comprennent bien ce que veut dire "être équivalent" ? J'ai essayé de leur dire : quand on a "si et seulement si", cela veut dire que l'on peut faire dans un sens et après on peut revenir dans l'autre. Ça finit pas venir mais je ne sais pas s'ils comprennent vraiment le sens. Je me rappelle que mon prof de seconde nous avait dit : si j'arrose le gazon, il est mouillé mais s'il est mouillé, je n'ai pas forcément arrosé. Cela permet de bien comprendre la différence ente condition nécessaire et condition suffisante ; mais pour moi c'est pas directement l'équivalence. Je n'ai pas voulu les embrouiller avec ça parce que je pense que c'est un autre problème qui vient après. Si un élève m'avait sorti une équivalence fausse, je lui aurais donné un exemple. Mais comme ils ne sont pas très à l'aise avec ça, je ne pense pas qu'ils s'y risquent.

AL : Ce n'est pas qu'ils ne sont pas à l'aise, ils ne savent sûrement pas ce que c'est. En géométrie au collège on ne voit pas d'équivalence.

B : Moi je ne savais pas trop ce qui se passait au collège. Et quand je leur en ai parlé le premier coup : on met si et seulement si,, cela veut dire que cela marche dans les deux sens. Bon ils acquiescent. Mais comme ces équivalences, on peut les utiliser dans les deux sens, on ne peut pas voir s'ils comprennent comment ça marche. C'est comme Pythagore. Mais Pythagore, ça ils savent le dire par contre, ils me reprennent même parce que, moi, je ne dis jamais réciproque. Il y a une vraie différence entre théorème de Pythagore et la réciproque.

AL : En quatrième, on leur fait apprendre les deux. Ce n'est pas parce qu'ils utilisent le mot qu'ils savent ce que cela veut dire.

B : C'est comme quand on résout des systèmes d'équations, c'est pas évident de leur dire quand on a des équivalences. Quand on a un système (2;2), ça va, on a une condition d'existence et d'unicité, c'est bon on peut travailler par équivalence. Mais pour les systèmes (3;3), on en a fait quelques-uns, on fait une méthode un peu bizarre et on leur dit : là il faut vérifier, sans en dire plus. Ils m'ont cru, heureusement. C'est pareil les systèmes (2;2), ils ont toujours eu l'habitude de les faire sans la caractérisation et pour leur mettre dans le crâne qu'il faut utiliser le déterminant pour voir le nombre de solutions, ils se demandent toujours pourquoi je leur fais faire ça parce qu'avant ils savaient très bien le faire sans ça. Ils étaient vraiment rebelles à ça... Bon on s'éloigne du sujet. L'orthogonalité... Bon ils connaissaient déjà la condition d'orthogonalité de deux droites. Cela passe bien. Ah oui pour la méthode de détermination d'équation de droites, il y en a beaucoup qui utilisent des systèmes. Mon conseiller pédagogique m'a dit que, comme au collège, ils voient les systèmes cela faisait une bonne application de la résolution de systèmes. Mais je trouve que la méthode du coefficient directeur est plus rapide. J'ai assez vite baissé les armes, comme ils avaient une méthode et que cela marchait bien. La première fois que j'ai vu cette méthode, je me demandais de où ça sortait. Là je leur ai donné une feuille d'exercices sur ça. Cela a été. Mais dans cet exercice, je leur demande l'équation d'un cercle. Je voulais voir ce que cela donnait. Et là le fait qu'un cercle ait une équation... Pour eux équation, c'est y=ax+b de toute façon. C'est pas évident à expliquer non plus. Ils me demandaient ce qu'il fallait faire. Je leur disais : une équation, c'est quoi ? y=ax+b. Mais oui mais... J'essayais de leur faire dire que c'était une relation entre des coordonnées. Je ne pense pas que j'ai réussi. Et j'ai fini par leur dire. Je l'ai fait avec eux, mais même les très bons élèves... Bon ça se comprend. Je l'ai fait pour voir ce que cela allait donner, mais je ne m'attendais pas à ce que cela marche bien. Pour la démonstration j'avais dit : un point M appartient au cercle si et seulement si la longueur est égale au rayon. Et ça il y a une élève qui ne l'a pas avalé. Pour elle quand on écrit ça, on sait déjà que le point M appartient au cercle, donc on triche. Pour moi c'est une condition, mais elle n'a pas compris. Et j'ai fini par leur dire : on fait cet exercice comme ça, mais je ne vous demanderai pas ça en devoir. Enfin ils ont fini par me dire : on comprendrait mieux avec des nombres et on ne connaît pas x et y. Là j'ai dû leur répondre : dans une équation de droite vous ne connaissez pas x et y. Le fait que x et y sont du même côté, ils sont mis au carré, cela doit les gênés. Bon je comprends que cela les gêne et je n'ai pas insisté.

AL : Où as-tu eu cet exercice ?

B : C'est un exercice de mon conseiller pédagogique.

AL : Tu disais que tu as voulu leur faire dire qu'une équation est une relation entre coordonnées. Est-ce que tu as fais un travail sur ça avec les équations de droites ?

B : Non. Parce que comme ils connaissaient déjà les équations de droites et qu'on n'introduit pas les équations cartésiennes, j'ai dit : vous avez vu l'année dernière qu'une droite a une équation de la forme y=ax+b, et puis c'est tout. C'est vrai que finalement, c'est ce que je t'ai dit tout à l'heure avec mon x et mon y qui varient l'un en fonction de l'autre...

AL : En troisième, ils n'ont pas forcément compris le sens d'une équation de droites. Ils ont acquis des méthodes, mais ne savent pas ce qu'est une équation de droites. Pour eux le mot "équation" fait référence a quelque chose à résoudre et là il n'y a rien à résoudre.

B : Oui c'est vrai que cela porte le même nom... Bon je leur ai fait une interro écrite sur ça. Après j'ai commencé les activités sur les fonctions. Au départ j'ai fait un truc assez classique : un rectangle qui est dans le triangle et qui varie.

AL : Quels étaient tes objectifs sur les fonctions ?

B : Introduction des nouvelles notions : parité, variations. Ensemble de définition dans une moindre mesure parce que ce n'est plus explicitement au programme. Et puis savoir ce que c'est qu'une étude de fonction. Donc j'ai voulu commencer par ça, pour qu'on sente quelque chose qui bouge en fonction de x. Et là j'ai regretté après coup de n'avoir pas prévu un rétroprojecteur par exemple, parce qu'au tableau j'ai recopié le dessin. Et puis après pour leur montrer que quand x bouge, le rectangle s'allonge dans un sens ou dans l'autre, il fallait refaire un dessin. Et une fois que tu as fait trois rectangles, on ne voit plus rien. Et ils ont eu énormément de mal à comprendre ce qui se passait. Moi je vois bien la variation du rectangle, mais je ne suis pas sûr qu'eux l'aient vu. C'est dommage parce que c'était la clef de l'activité. Pour eux x, c'est celui qui est écrit là et s'il y en a un autre tant mieux mais... x c'est un peu la lettre magique, cela désigne un truc mais là... Là on leur demandait une sorte d'ensemble de définition. Je crois que j'ai eu du mal à leur faire dire aussi. MN en fonction de x, il n'y a pas eu de problème. Le calcul de l'aire ça va aussi. Là j'ai introduit le premier vocabulaire : vous voyez l'aire varie en fonction de x, c'est pour ça qu'on met A(x). Après sur le tableau de valeurs, il y en a plein qui ne savaient pas ce que c'était. Bon je pense qu'ils en avaient déjà fait, peut-être pas sous ce nom-là, cela a permis de mettre les choses au point. Il y a eu des problèmes pour tracer la courbe, il y en a qui ont joint les points en traçant des droites. Mais là c'est comme on l'a dit l'autre jour : non c'est pas une droite et il faut me croire sur parole. Ça c'est pas évident. Tu vois : cette courbe est régulière. Qu'est-ce que ça veut dire ? C'est sûr qu'on va pas lui dire que la dérivée est continue, je suis d'accord mais... Moi ça me pose un vrai problème. Je suis obligé de leur dire : croyez-moi cela fait une belle cloche comme ça.

AL : Oui mais à leur niveau tu ne peux pas tout justifier.

B : Cela reprend ce que j'ai dit dans mon mémoire, on leur dit parfois : croyez-moi. Alors qu'en maths on est obligé de tout justifier. Et nous on leur balance des trucs comme ça. Il y a des moments ils doivent se dire : qu'est-ce qu'il nous raconte ? C'est le décalage qui me... Mais d'un autre côté quand je pense à ce que je ressentais en tant qu'élève, cela ne me gênait pas. Mais en réfléchissant, c'est sûr qu'un jour il y en a un qui va me le dire, c'est pas possible.

AL : Moi ici je justifierais la forme de la courbe d'après l'écriture de la fonction.

B : Pour la fonction carré, quand ils voulaient joindre les points par une droite je leur ai dit qu'on voyait bien que ce n'était pas une fonction affine. Mais le "on voit bien que c'est pas une fonction affine"... Enfin bref. Bon alors après je balance mon cours sur les fonctions. Je commence par la notation comme ça parce qu'il faut bien le dire à un moment ou un autre. Et là ils m'ont regardé avec des yeux énormes. Et le but en faisant cette activité c'était de pouvoir s'y raccrocher dans le cours et là ça va mieux. Quand tu dis : regardez on va prendre l'exemple qu'on a vu dans l'activité, ça va mieux. La notation "x associe f(x)", pour eux c'est bizarre, alors que quand tu écris "à x associe A(x)" et une vraie fonction de x, je pense que cela passe mieux. Je n'ai pas regretté d'avoir fait ça car cela permet de s'appuyer sur quelque chose qu'ils ont compris. Je me suis d'ailleurs demandé s'il fallait que j'en parle de cette notation.

AL : Elle est dans le programme ?

B : Je ne sais pas... Je me suis dit tant qu'à leur parler de fonctions, autant leur en parler proprement... Disons que dans le programme ils l'écrivent sous cette forme mais c'est pas écrit qu'il faut en parler aux élèves.

AL : Peut-être que ton introduction est brutale. Après la définition, tu aurais pu donner ton exemple et dire : on note ça sous cette forme.

B : Dans le bouquin ils l'utilisent. Bon ce n'est pas parce que c'est dans le bouquin qu'il faut le faire mais... Pour moi quand tu écris f(x) égale quelque chose, x on sait déjà à quoi il appartient ; f(x) égale quelque chose doit être précédé de x appartient à quelque chose. Alors que cette notation "à x associe quelque chose", cela ne le nécessite pas. Je ne sais pas si mathématiquement c'est juste, mais pour moi c'est comme ça. Mais finalement quand je leur ai balancé, cela les a choqués. Mais après cela ne leur a pas posé de problèmes particuliers. Ce qui me pose problème aussi c'est la lettre x qui un coup est un nombre fixé et le x qui varie dans l'ensemble de définition. Cela rejoint ce que je disais tout à l'heure avec les équations. Parce que moi je me souviens que j'ai compris assez tard la différence entre l'objet fonction et le nombre f(x). Donc j'en ai parlé déjà même s'ils ne l'ont pas compris tout de suite. Leur dire: attention il y a la fonction f et le nombre f(x). Moi je me demande ce que veut dire x pour un élève, cela doit être un fouillis. On le met à toutes les sauces x en maths. Bon, on a fait des ensembles de définition un petit peu. Mais cela n'a pas posé de problème parce qu'on avait bien insisté avec les ensembles de validité pour les équations. Bon après je leur ai donné cet exercice avec la TVA et là ils ont eu des difficultés parce qu'ils pensaient que la variable c'était la TVA. Pour certains j'ai été obligé de prendre un exemple numérique et là pas de problème. Bon alors je leur ai dit : maintenant l'objet coûte x hors taxe. Bon ça vient, mais le faire tout seul ça ne va pas. Après images et antécédents. Images il n'y pas de problème. Antécédents il y a déjà plus de difficultés. Tu vois là c'est pareil : x est une variable et cela va devenir une inconnue pour la recherche d'antécédents. Là je leur faisais noter une phrase : chercher les antécédents de 5/3, c'est chercher les nombres x tels que f(x)=5/3 et après on remplace. Une fois qu'on a dit ça, ça va parce qu'on arrive sur une équation qu'ils savent résoudre. Après on arrive à la représentation graphique. Là j'ai eu beaucoup de questions sur la différence entre images et antécédents. Cela est quand même facilité parce qu'ils ont fait des résolutions graphiques avec les fonctions affines l'année dernière. Finalement on en est arrivé à se poser la question : comment résoudre graphiquement f(x)=0 ? Je ne pensais pas le faire mais au fil de leurs questions on en est arrivé là. Elle n'a pas dû le noter parce que c'était oral.

AL : Dans ton activité tu leur avais fait rechercher des antécédents, est-ce que c'était de la lecture graphique ?

B : Non c'était dans le tableau. Ensuite on a fait l'exercice 8 pour voir si cela pouvait être des représentations de fonctions ou pas. Et là quand ils arrivent à celui-là ils disent que c'est pas une fonction parce qu'il y a deux branches. Là j'ai été assez enquiquiné. Je leur ai dit qu'il peut y avoir deux branches. Et heureusement il y a une élève qui a dit qu'il y avait un point qui a deux images. Ouf. Et puis pour le c, c'était l'occasion d'expliquer la différence entre le point et le crochet. C'était l'introduction de la convention. L'exercice 3 c'est de la résolution graphique d'équations et d'inéquations. L'exercice 11, savoir si des points appartiennent ou pas à la courbe. C'est pas évident à corriger, comme tu as déjà les coordonnées qui sont données... Déjà pour eux, g c'est pas affine du fait qu'on divise par 4. Sinon pour la résolution graphique ils voient ce qu'il faut faire, mais ils disent que la solution de l'équation f(x)=g(x) est le couple (-1;1). Ça la différence entre le nombre x et les coordonnées, c'était difficile à leur faire comprendre. Le 11, au début ils n'ont pas compris ce qu'il fallait faire. Après explication cela a été mieux. Pour le point A, ils me demandent pourquoi il faut calculer f(0) et pas f(1). Là on a repris le graphique : abscisse, ordonnée, image, antécédent. C'est pas évident. Là il y a eu un problème en -1, ils l'ont tous calculé, il n'y en a pas un qui a dit : on ne peut pas le calculer parce que -1 n'est pas dans l'ensemble de définition. Et puis on a fait le 24, une fonction affine par morceaux avec une petite résolution graphique. Là c'est pareil ils n'ont pas compris : une fonction qui est donnée par 3 expressions différentes. Une fois qu'on leur explique ça va bien. Pour f(x)=1, il y a tout un intervalle solution et les premières réponses qu'ils m'ont données c'est 0 et 1. Pourquoi je ne sais pas. Bon en les questionnant un peu, ils voient bien que c'est tout ce qui se passe entre 0 et 2, mais ils enlèvent 2 mais pas 0. Pourquoi ? Alors là j'ai pas compris. Ensuite on a fait des activités avec de la lecture graphique. J'ai pas fait celle-là. Tu as vu ce qu'ils leur demandent, ils leur demandent de faire du ln(x+1) fois 4 pour faire un tableau de valeurs avec la calculatrice. Moi je trouve cela complètement stupide. Cosinus ou sinus s'ils veulent une fonction qu'on ne peut pas expliciter avec une forme algébrique. Là c'est trouver une fonction affine en connaissant deux points. C'était pas mal mais ils avaient oublié encore la condition d'unicité. Là j'ai été étonné qu'aucun élève ne cherche le coefficient directeur de la droite. A mon avis ils font vraiment une différence entre une équation de droite et une fonction affine. Je suis sûr que si on leur avait demandé une équation de droite ils auraient... Quoique non je t'ai dit qu'ils passent par les systèmes. Mais il y avait quand même quelques élèves qui avaient été formés à la technique du coefficient directeur et là aucun ne l'a proposé. L'activité 1, cela c'était pas mal passé. Sinon on avait fait le 88, des histoires de parité. Et avant j'avais fait toutes les propriétés des fonctions et j'ai oublié de t'en parler.

AL : Avant de faire maximum et minimum, tu n'as pas fait d'activité. Tu as fait le cours directement.

B : Oui. Je me suis dit qu'intuitivement cela allait bien passer. C'est bien passé. Comme on l'avait déjà fait dans l'activité avant, cela a été et ils se le représentent bien sur un graphique. Je leur ai un peu parlé de maximum absolu et relatif, comme ça pour leur en parler. Le sens de variations, j'ai fait une approche intuitive sur un graphique, en disant ça monte et ça descend. Et puis premier exemple d'étude de variation, la fonction qui à x associe 2x. Après quand on fait le tableau de variation, cela marche pas mal. Et après on a fait un exercice de passage d'un tableau de variation à la courbe. Cela m'a posé problème parce que tu as un beau tableau de variation et puis ça je n'y ai pas réfléchi, je me suis posé le problème devant la classe, la courbe est comment ? Est-ce que c'est une fonction affine par morceaux, est-ce que c'est une courbe régulière ? Je ne savais pas.

AL : Tu ne peux pas savoir.

B : Oui, mais... Je ne sais plus ce que m'a fait l'élève au tableau. Mais je pense qu'on a noté les deux solutions en fait. Là dans le 42, trouver le tableau de variations, mais jusqu'où va la courbe ? Est-ce qu'elle s'arrête là ? Ou bien on suppose qu'elle continue ? ... Là, celle-là on se dit qu'elle doit s'arrêter mais celle-là a l'air de continuer... Bon c'était vraiment pas clair. J'ai été un petit peu coincé avec ça. Je leur ai dit que, plus ou moins par convention, quand on voit un truc qui commence à monter comme ça, on dit que ça monte.

AL : Cela reprend ce qu'il y avait dans ton mémoire : l'implicite qu'il y a derrière un graphique.

B : Quand tu te trouves devant les élèves... Et puis c'est le genre d'exercice que tu ne corriges pas parce que les variations c'est pas dur à faire. Quand tu arrives devant les élèves, tu te rends compte que, eux, ils ont eu des problèmes. C'est vrai que je n'y avais pas réfléchi parce que c'était naturel pour moi. Finalement j'ai eu autant de problèmes qu'eux. Moi je trouve que dans un livre comme ça ils pourraient continuer un peu plus quand même. Après on arrive à la parité. Définition d'un intervalle symétrique par rapport à 0. Ça, contre toute attente, cela a été bien compris. Après symétrie des courbes, ça aussi cela s'est pas mal passé.

AL : Comment es-tu passé de la définition de la fonction paire à l'illustration graphique ?

B : J'ai dû leur donner le morceau positif, placer le point (x, f(x)) et leur demander si je place le point -x ici qu'est-ce qui va se passer ? Ils ont fini par me sortir ça et on a terminé. C'était à la limite de l'oral et de l'écrit. Ensuite on arrive à la périodicité. Là ce qui est pénible c'est qu'on n'a pas d'exemples sous la main, à part les fonctions trigo. Et heureusement, en physique, ils ont vu les sinusoïdes. Donc dans leur tête ils ont l'image d'une fonction périodique. J'ai donné une fonction de période 3, un morceau de la courbe sur une période et on complète. Pour aller vers la droite c'est facile, il suffit d'ajouter 3 et tu trouves. Par contre pour repartir vers la gauche c'est beaucoup moins évident. Avec la définition que je leur ai donnée f(x+T)=f(x), on ajoute T. Le fait que même quand on le retranche cela marche aussi, c'est difficile. Je ne voulais pas trop insister là-dessus parce que pour moi il y a des choses plus importantes que ça, mais je me suis rendu compte qu'il y avait un truc qui coinçait un peu. Après on arrive à l'étude d'une fonction et je leur ai fait l'étude d'une fonction affine pour voir un petit peu ce que c'était. Là on a un exercice avec une fonction paire et impaire, qu'est-ce qu'on peut en dire ? Premier truc c'est : une fonction paire et impaire c'est pas possible, c'est l'un ou l'autre. Je leur ai dit que cela se pouvait et qu'il fallait voir ce que cela donnait. Le premier réflexe, c'est de réfléchir en terme de symétrie. En voyant qu'il y avait deux symétries pour la même courbe, ils ont vu que la fonction allait vraiment avoir une tête assez particulière. Je leur ai dit : on va résumer les propriétés qu'on a. On a écrit f(x)=-f(x) et l'autre. Ils ne savaient pas quoi faire. Bon je m'y attendais. On additionne les deux on trouve 2f(x)=0 et puis voilà. J'ai l'impression qu'ils ont du mal à faire le point sur les propriétés plus algébriques, pour les propriétés géométriques, cela va mieux. Après on arrive à la séance filmée. Je leur avais donné la fonction racine à faire à la maison, cela avait été pas mal. Et ils ont eu le réflexe de calculer plusieurs points entre 0 et 1 pour voir ce qui se passe. Il y a un élève qui a reconnu la demi-parabole. Ah oui pour la fonction carré, il y en a une qui m'a demandé pourquoi la courbe ne ferait pas comme un vase après. Là je me suis appuyé sur le tableau de variations. La fonction inverse, une élève a voulu exclure 1. Et puis après j'ai voulu leur parler un peu de la notion d'asymptote : quand x devient très grand, que va devenir 1/x. Il y a une élève qui m'a dit que cela allait toucher l'axe. Et il y a une élève qui lui a répondu que si ça touche l'axe, c'est que ça veut dire que ça fait 0 et 0 ça ne se peut pas. Ça c'était pas mal, c'étaient des élèves qui parlaient... Et puis je leur ai demandé de prendre de grandes valeurs de x et de regarder ce que cela donne à la calculatrice. Ils se rendent compte que cela se rapproche de 0, sans toucher. J'ai été surpris qu'ils comprennent bien, c'est déjà un petit peu une notion de limite ça. J'ai fait un exercice sur l'utilisation de fonctions. C'est une histoire de coût de production. Ils ont eu du mal à trouver la fonction. Et quand on leur demande : que faire de cette fonction ? Pof, on l'étudie. Et bon je leur ai dit : regardez la tête de la fonction, ce n'est peut-être pas la peine de... Et puis après en réfléchissant : ah oui, elle est affine. Mais il faut qu'ils réfléchissent un peu avant de trouver que c'est une fonction affine. Ils ont pas mal pataugé dans le reste, il a fallu bien expliquer ce qu'on gagne, ce qu'on perd. Je m'attendais à moins de difficultés, parce que c'est des choses assez pratiques finalement. Et puis on arrive aux stats. On va passer aux TD. Là pour leur parler de la résolution graphique des systèmes d'inéquations, je leur demande de placer une droite, des points un peu partout. Et puis on reprenait : le point A a pour abscisse x qui vaut 1, pour ordonnée y qui vaut 1, calculer 2x-1 et trouver si c'est différent ou pas. Et alors au début ils trouvaient ça bizarre parce que y égale 2x-1. Est-ce que j'aurais mieux fait d'appeler l'abscisse a et l'ordonnée b et de calculer 2a-1 ? Mais je me demande s'ils auraient fait le lien avec l'équation y=2x-1. Bon finalement cela ne s'est pas trop mal passé quand même. Ils ont fini par trouver. Après pour déterminer les deux domaines, cela allait parce que je pense qu'ils avaient bien vu avec cette activité. Ça c'est le devoir sur les fonctions. Il n'y a rien de nouveau. En DM, je leur ai fait faire des histoires de pourcentages avec les fonctions. Le but du truc était de leur faire comprendre qu'une baisse de x% n'est pas compensée par une hausse de x%. Le but a été atteint : dans la dernière question en utilisant le graphique et le tableau de valeurs, ils ont su faire le lien, à une hausse de 30% correspondait une baisse de... Ils ont bien compris. Là il y avait une fonction affine à tracer, 2x-1, et là ils me font un tableau de valeurs. Alors qu'avant ils n'auraient jamais fait ça, ils auraient dit que c'était une droite. Est-ce que c'est le fait d'avoir fait plein de fonctions qui leur fait perdre de vue qu'une fonction affine est représentée par une droite ? Néanmoins il y a un élève qui m'a fait le contraire. Pour étudier la fonction qui à x associe x^2-1, il me dit que le coefficient directeur est x qui est positif, donc f est une fonction croissante et la courbe représentative est une droite... Tu vois il y en a encore qui m'écrivent f(0)=1/0=0. Des bons élèves... Après on a fait de la résolution graphique d'équations, la méthode on l'a écrite clairement et puis je leur ai fait recopier la courbe. Il y en a qui m'ont demandé : pourquoi il y a des pointillés ? Je les ai laissé parler et ils ont senti eux-mêmes qu'elle n'était pas définie en 1 et en -1, et même dans un groupe il y a des élèves qui ont fait le parallèle avec l'hyperbole. Je leur ai dit : voilà, les droites qui sont en pointillés s'appellent des asymptotes, vous verrez ça l'année prochaine. On a rencontré des difficultés pour résoudre l'équation f(x)=-2,5, parce que c'est pile le sommet. J'ai eu plusieurs réponses : il y en a qui disent qu'il n'y a pas de point d'intersection, il y en a qui disent qu'il y en a beaucoup et il y en a qui disent qu'il y en a un seul. Là je me suis appuyé sur l'exemple du cercle en essayant de leur faire sentir la tangente. Et je leur ai dit : on parle de tangente à une courbe, elle touche la courbe juste en seul point. Bon cela a été pas trop mal.

AL : Finalement sur ces exercices il y a pas mal de choses qui sont sorties.

B : Oui je me disais que j'allais leur parler d'asymptote, mais leurs questions sont venues naturellement. C'est mieux si on n'a pas à leur forcer la main... Le 53, c'est une valeur absolue. Et spontanément ils m'ont dit qu'il fallait faire l'étude. J'étais un peu coincé parce que je ne voulais pas faire l'étude. Je leur ai dit que quand on nous demande de but en blanc de tracer la courbe, c'est que l'étude on la connaît déjà. On a énuméré les fonctions qu'on connaissait et ils ont dit que vu la tête de la fonction ce serait une fonction affine. On a différencié les cas ensemble, c'était assez laborieux quand même. De toute façon dès que tu sors le mot "valeur absolue" ils ont les poils qui se hérissent sur les bras. On a exprimé la fonction et je leur ai dit : souvenez-vous, c'est une fonction affine par morceaux. Et il y a des élèves qui ont dessiné les droites en entier, et ils ne comprennent pas pourquoi on prend les demi-droites. Je ne suis pas sûr que je les ai convaincus. J'ai mis l'accent sur le fait qu'on peut voir le signe de f sur le graphique : on reste au-dessus de l'axe des abscisses, c'était prévisible parce qu'une valeur absolue est toujours positive. Et puis le 106 p 107, on te demande de manipuler la fonction et après on utilise la forme adéquate pour résoudre des équations. Ils n'ont pas compris la première question, ils partaient un peu dans le vague. Leur premier réflexe est de factoriser et ils ont vu assez vite qu'il n'y avait pas moyen, donc solution de repli on développe. Ceux qui s'arrêtent là, ils ont une différence de deux termes, on ne peut pas dire le contraire. Une fois qu'on arrive à x^4-1, après il faut factoriser. Là j'étais quasi certain qu'ils n'allaient pas trouver la factorisation. Eh bien raté, dans les deux groupes, il y en a qui ont trouvé que c'était $(x^2+1)(x^2-1)$. Mais ils savent pas expliquer : ils disent que c'est une identité remarquable, que cela se voit bien. J'aurais aimé qu'ils disent que c'est $(x^2)^2-1$. Mais, par contre, parmi ceux qui ont trouvé, il y en a qui sont restés bloqués devant x^2-1. Ils y arrivent mais il faut leur forcer la main. Et là j'ai eu la question : pourquoi on peut pas factoriser x^2+1 ? Là ils sont bien obligés de me croire. Là, on a à résoudre des équations, là ils ne choisissent pas toujours la forme adéquate. Pour f(x)=0, il utilisent le produit de trois facteurs et arrivent à $x^2+1=0$, donc $x^2=-1$, ils arrivent à x égale $\sqrt{-1}$ et là ils se rendent seulement compte que c'est pas possible. La justification est : ce n'est pas possible parce qu'une racine carrée n'est jamais négative. Ce qu'on a vu avec Claire l'autre jour... En aide individualisée, je leur ai refait des inéquations où il faut se creuser la tête pour factoriser. Là pendant un mois, j'ai fait tourner toute la classe, je leur ai imposé de venir. Là il y a des factorisations assez folkloriques : $5x^2-4 = (5x+2)(5x-2)$. Le $\sqrt{5}$, il y en a qui ne l'avalent pas du tout. Pour eux c'est pas factorisable. Pour trouver le signe de x^2-1, il y en a pas mal qui raisonnent : $x^2-1>0$ si et seulement si ... Là avec un contre-exemple ils sont convaincus assez facilement.

AL : Tu as repris ça au mois de mars alors que tu l'avais fait au début de l'année ?

B : Au début de l'année, j'avais fait des inéquations où il n'y avait pas de factorisations très difficiles à faire. Là on en a fait où il fallait un peu s'y mettre. C'est pour cela que je les avais pris par petits groupes. Comme on n'avait pas fini, je leur ai demandé de finir à la maison et j'avais ramassé... Là quand ils te recherchent le domaine de validité, c'est pareil ils foncent bille en tête, $7x^2+1 = 0$, x égale $\sqrt{-1/7}$. Et là il y en a une qui sort une calculatrice graphique qui marche avec les complexes. Elle avait écrit le résultat, je lui dis : cela m'étonnerait que tu aies trouvé ça. Ben si Monsieur. Je voudrais bien que tu me montres. Pas de chance, elle me montre ça marche. Et elle avait pas vu le i qu'il y a après. Je dis : regarde, cela veut dire quoi ? Evidemment elle est coincée. Moi j'ai été obligé de lui dire que c'étaient des choses qu'on voit en terminale. Et là on a réfléchi avec tout le groupe et cela a eu du mal à venir que $\sqrt{-1/7}$ c'est pas possible. J'ai des élèves pour résoudre $\sqrt{5}x - 2 > 0$, la division par $\sqrt{5}$ cela les bloque. Cela je ne m'explique pas bien pourquoi. Sinon j'ai une fiche sur les fonctions : lecture de tableaux de variations. C'étaient des élèves assez faibles qui avaient demandé ça. Il y avait pas mal de confusion entre x et f(x) sur le graphique. Là on a refait des systèmes d'inéquation à deux inconnues. Il y en a qui ont du mal quand il faut donner le domaine qui correspond à x-2 négatif ou nul, ils sont gênés parce qu'il n'y a pas de y. Ça je crois que je t'en avais parlé : ensembles de définition. Ils commencent par enlever 0, parce que c'est comme ça dans le cours. Celle en dessous : là c'est $\mathbb{R}$ privé de -2, pourquoi -2 ? Là c'est 1/-1, c'est 2/-2. Le pire c'est qu'ils ont l'air de comprendre quand tu leur expliques et puis non.

AL : Sur les fonctions, qu'est-ce qui te semble avoir bien marché ? Moins bien marché ?

B : Moi je pense qu'ils ont quand même bien compris l'histoire de l'étude. Qu'une étude est nécessaire, les différentes étapes, je pense, sont acquises. Quand ils vont arriver l'année prochaine, ils ne vont pas être surpris quand on va leur dire : étude de fonctions. Il n'y aura plus qu'à leur donner la dérivée. Je pense que c'est pas mal. Les histoires de variations c'est bien vu : ça monte, ça descend. Ils ne le disent plus, ils ont bien vu : fonction croissante, fonction décroissante. Sinon il y a toujours des problèmes : les histoires de recherche de parité, ça je l'ai revu encore très tard, prendre une valeur pour montrer qu'elle est paire ou impaire. C'était récurrent dans tous les chapitres : il y a quand même un tas d'irréductibles dans cette classe. Vraiment non cela ne rentre pas. Peut-être que l'année prochaine cela aura mûri, comme l'histoire de la colinéarité. J'ose l'espérer. Surtout que j'ai quand même passé pas mal de temps là-dessus.

AL : On va porter un regard plus global sur ton année. Au début de l'année, je t'avais demandé tes objectifs en algèbre. Tu m'avais dit avoir seulement réfléchi aux équations du second degré et tu voulais qu'ils aient le réflexe de factoriser et tu avais dit : mon principal c'est que cela devienne un mécanisme. Est-ce que tu penses avoir atteint cet objectif ?

B : Oui je pense. Parce que dans ce qu'on vient de voir, les inéquations, ils voient assez vite que ce n'est pas de la forme ax+b, donc c'est la seule chose qu'ils savent manipuler facilement, ils disent qu'il faut factoriser. Dans l'exercice-là, pour la différence de deux termes, le premier réflexe est de factoriser. Après on voit qu'on ne peut pas, donc on essaie autre chose. Bon sur un exercice comme ça, cela leur vient de l'année dernière, je crois.

AL : C'est pas sûr ?

B : Tu crois ?

AL : Au début de l'année, est-ce qu'ils avaient ce réflexe ?

B : Les exemples où il y avait de la factorisation, c'était de la mise en équation et on arrivait à des équations qu'ils ne savaient pas résoudre sans factoriser. Donc je leur ai dit : il faut factoriser. On n'a pas fait vraiment d'exercices comme ça où il y avait de la manipulation pour de la manipulation, si tu veux. En général ils s'en sortent pour la factorisation pour les équations, à part si on leur donne un truc vicieux. De toute façon je l'avais écrit dans le cours : quand on a une équation, on met tous les x d'un côté et on factorise. Et puis après on en avait refait surtout à l'occasion des systèmes, bon ils te le recrachent sans problèmes.

AL : Et sur ton année, qu'est-ce qui a bien marché ? Moins bien marché ?

B : Je ne vois rien qui se détache franchement ni dans un sens, ni dans l'autre. Si, il y a un problème, c'est la valeur absolue. Là j'arrive pas lorsqu'on passe à la lettre. Ils ont vraiment été bornés là-dessus. Sinon il y a eu l'introduction du signe de ax+b qui a été une séance vraiment difficile. Cela n'a pas trop porté à conséquence parce que j'ai remis les choses au point après. Et puis les tableaux de signes ça va maintenant. C'était un des objectifs aussi, les tableaux de signes, il n'y a pas de problème majeur. Sinon je pense que mes objectifs sur les fonctions sont atteints. Mais c'est vrai que j'aimerais bien les revoir avec du recul l'année prochaine, voir ce qui va en sortir quand on va leur parler de fonctions. Ça je ne le saurai pas, c'est un peu dommage. Sinon moi je pense que je manque vraiment de recul pour voir ce qui cloche ou pas. Si, il y a un truc qui n'a pas trop marché, mais ce n'est pas trop de mon ressort, ils avaient tous au début de l'année un handicap pour le calcul littéral, ça je pense qu'on l'a traîné toute l'année. Mais bon on ne va pas passer un mois au début de l'année pour tout reprendre mais tu le traînes toute l'année parce qu'il y a des lettres partout. Beaucoup des difficultés viennent de là. Déjà le statut des lettres, on en a déjà parlé. Et les manipulations c'est pas évident. Ce qu'on disait l'autre jour, $5x^2+4x$, il y a encore des élèves, j'en suis sûr, qui écrivent que c'est 9x. Il y en a même pour qui x^2 c'est 2x. Ça s'est estompé dans l'année, c'est vrai, mais je suis sûr qu'il y en a encore qui vont le faire.

AL : Pendant ta soutenance, tu as dit que tu avais fait un peu un enseignement basé sur des méthodes et que finalement tu avais mesuré les limites d'un tel enseignement.

B : Ah oui, je t'avais dit : sur la séance vidéo, je leur avais donné le plan d'étude et puis en parlant avec une élève, je lui demande : qu'est-ce qu'on fait maintenant ? On fait la parité. Pourquoi ? J'attendais à ce qu'elle me dise : parce que si on a une fonction paire, la courbe est symétrique donc on étudie que la moitié. Elle me dit : cela vient en deuxième position sur la feuille. Et là tout s'écroule. En revoyant la vidéo je me suis aperçu que je suis passé à 500 à l'heure là-dessus. Je pense que ça c'est une erreur. Moi j'ai ressenti que, pour beaucoup d'élèves, c'est comme ça, parce que c'est comme ça. Tout comme les mises en équations. C'est on pose l'inconnue, contraintes, mise en équation, résolution. Et même la résolution est automatisée, en disant : on passe tout du même côté, on factorise et puis on résout. Pour les mises en équation, ça marche bien. Bon pour les fonctions, on s'en sort pas mal, mais cela n'a pas de sens pour les élèves. Par contre, ils ne savent pas te dire pourquoi on étudie la parité, mais ils savent ce qu'implique le fait que la fonction soit paire pour la courbe. Pareil pour les systèmes d'inéquations, c'est automatisé. Quand ils ont une inéquation, je leur ai dit de tester avec le point O. Mais voilà on a eu une fonction affine et ils sont restés coincés parce qu'ils ne pouvaient pas prendre ce point. Bon je ne sais pas si c'est une erreur ou pas mais pour moi avec cette classe je ne voyais pas de moyen pour aborder autrement les choses. Ils sont brouillons et pas très sérieux non plus. Tu ne peux pas attendre un travail approfondi à la maison qui va leur permettre de comprendre parce que c'est pas le cas. Donc j'avais pris le parti de leur donner des recettes.

AL : C'est au niveau des fonctions que tu as mesuré un effet néfaste ?

B : Oui, c'est quand elle m'a dit ça. Je ne dis pas que j'ai été surpris... Ça se sent. Quand on fait de la mise en équation et que tu demandes : qu'est-ce qu'on fait, ils te répondent en cœur la même phrase. On ne va les en blâmer parce que ça veut dire qu'ils ont appris leur cours. Moi, j'ai peur qu'ils ne sachent pas se détacher... Par exemple quand ils te récitent le théorème de Pythagore, c'est ABC rectangle en A, s'il est rectangle en C c'est déjà plus compliqué. Je ne sais pas si c'est sur le même plan mais c'est comme ça.

AL : Est-ce que tu imaginais qu'enseigner l'algèbre c'est ce que tu viens de vivre cette année ?

B : J'ai découvert le statut de la lettre x... Pour moi c'était implicite : un coup c'est une variable, un coup c'est une inconnue, j'y réfléchis même plus. Là en ayant contact avec des gens pour qui c'est nouveau, même pour moi cela remet les choses en place. A la limite je dirais presque que j'ai appris des choses auxquelles je n'avais jamais réfléchi. Même cela ne m'avait pas gêné en tant qu'élève, mais maintenant quand j'y réfléchis, je me dis : ben oui. Comme ce que je te disais tout à l'heure, l'histoire de la courbe, moi cela ne m'a jamais choqué. Maintenant quand j'y réfléchis, je me dis : pourquoi ? C'est vrai que pour moi l'algèbre se limitait à la factorisation, manipulation d'égalités, des équations... Je crois que ce à quoi je ne m'attendais pas et ce sur quoi je me suis vraiment posé des questions, c'est l'histoire de la lettre. Je pense que le premier moment où c'est intervenu c'est avec la valeur absolue. C'est là que je me suis rendu compte qu'il y avait un problème. Avant qu'il y ait des problèmes en calcul littéral, je me disais : c'est normal, c'est un peu difficile, un peu bizarre. Mais là j'ai vraiment compris que sous la lettre il y avait un tas de choses et que c'était pas évident à faire passer. Et je me demande vraiment comment cela peut se passer dans la tête d'un élève. Même moi comment j'ai fait ? J'ai réussi mais sans m'en rendre compte. C'est pareil l'histoire du x où je ne me suis jamais posé la question. C'est venu naturellement, je ne sais pas.

AL : Il y a un apprentissage à faire. Il y a des réflexions sur ça : comment introduire la lettre au collège, par exemple l'activité de N. l'autre jour.

B : Je voulais t'en parler. Moi je trouve que c'est un peu brutal. Je pense que je ne passerais pas à n tout de suite, je continuerais à l'appeler nombre. L'écrire en toutes lettres. C'est peut-être aussi avec ce que je ressens... Pour moi n c'est un entier... Leur dire quand vous voyez le mot nombre ou le mot nombre que j'ai choisi... Enfin quelque chose de beaucoup plus explicite que n.

AL : Ce qu'il y a dans cette activité c'est qu'il y avait trop de choses et ce n'est pas forcément justifié d'utiliser la lettre. Mais sur l'activité dont parlait C., c'est plus justifié d'utiliser une lettre. Sur cette activité, ils demandaient aux élèves d'écrire avec des mots comment on pouvait calculer le nombre de carreaux. Et puis après on leur disait en mathématiques, on utilise une lettre, donc on va essayer d'écrire avec des nombres, des lettres, des signes. Cela rejoint ce que tu disais. Il y a aussi des réflexions sur l'introduction de la lettre comme variable, par exemple dans un article de Petit x... Qu'est-ce que tu as appris d'utile cette année relativement à l'enseignement de l'algèbre ?

B : ...

AL : Quels enseignements as-tu tirés pour l'année prochaine ?

B : ... Peut-être sur mon histoire du signe de ax+b... J'ai été trop général d'un coup. J'ai essayé de généraliser directement, je me suis dit que cela allait être facile, mais pas du tout. J'aurais dû commencer par un exemple numérique. Ça je ne le referai plus. Et puis l'erreur dont j'ai parlé tout à l'heure, prendre a et b comme coordonnées du vecteur alors que cela désigne les coefficients de la droite... Donc faire plus attention aux notations et être plus ferme avec les élèves. Sinon, cela est venu assez naturellement, quand un élève ne comprend pas quelque chose j'ai recours assez systématique à un contre-exemple en fait et ça, ça marche bien. Cela m'est venu naturellement dès que cela s'est présenté. Mais c'est ce que je te disais l'autre jour, c'est sans parler vraiment de la notion de contre-exemple. C'est pareil dans la tête des élèves : un coup on a le droit de prendre un exemple, un coup on n'a pas le droit, qu'est-ce que c'est que cette histoire ? Peut-être travailler plus là-dessus. Je ne sais pas si cela existe de trouver des exercices qui permettent de mettre l'accent là-dessus à leur niveau.

AL : L'autre jour un stagiaire. m'a montré un exercice comme ça. Tu leur donnes des affirmations du type : un nombre est toujours plus grand que son inverse, et les élèves doivent dire si c'est vrai ou faux et justifier. Là tu peux voir comment on peut justifier des choses. Il ne faut pas leur dire : il faut faire comme ça. Il faut partir de ce que eux ils font. Et on voit que le contre-exemple vient tout seul. Après la question est : comment peut-on justifier quelque chose qui est vrai ? Mais lui ne se souciait pas de la justification. C'est comme N. avec ses égalités...

B : Ça, ça m'a choqué. Moi quand j'ai lu le papier, c'est vrai que je vois ça avec le regard d'un prof de seconde, je m'étais dit : en sixième cela va être une horreur. C'est pas exigible à ce niveau. Je me demandais comment il allait faire et pourquoi il avait donné ça. Dans la mesure où tu ne peux pas trop justifier, cela ne vaut peut-être pas le coup de le donner. Cela me gêne de ne pas justifier. On le fait ou on ne le fait pas.

AL : Il a donné ça parce que c'était la suite de l'exercice qu'il avait choisi. Cela aurait pu être intéressant à exploiter lors d'erreurs d'élèves. Si un élève avait dit que n+n c'est n+2, cela aurait été l'occasion de dire : réfléchissons sur cette écriture. On a voulu les faire réfléchir sur des erreurs qu'on n'avait pas forcément commises.

B : Voilà, exactement. Moi je n'aurais pas mis ça sous forme de vrai / faux, j'aurais écrit n+n+n+n et j'aurais dit : c'est fatigant décrire ça, qu'est-ce qu'on pourrait écrire ? Et puis en venir à ça et puis comme tu dis, les erreurs quand elles viennent, on y regarde. Moi je trouve brutal de leur donner le travail sur la lettre et puis en même temps les erreurs auxquelles il faut qu'ils fassent attention. Moi je ne trouve pas que cela ressorte énormément que 4 fois n soit une simplification d'écriture. Moi je trouve que c'est très important ça.

AL : Ce qu'il faut retenir c'est qu'on peut travailler la notion de contre-exemple à plein d'endroits. Quels conseils donnerais-tu à un enseignant débutant ?

B : ... Je pense que je lui dirais qu'il faut s'appuyer sur des exemples constamment. Cela dépend des classes aussi, mais ne pas trop essayer d'être ambitieux dès le départ quitte après à le devenir un peu plus... Bien se rendre compte que ce qui est évident pour nous ne l'est pas pour eux. Regarde l'histoire de la courbe de tout à l'heure, les histoires d'implicites, c'est vrai que pour nous cela coule de source mais pas pour eux. Se mettre constamment à la place de l'élève en fait. C'est vrai qu'on ne se rend plus compte. Nous cela fait 5 ans qu'on ne fait plus que des maths alors évidemment... Se dire : qu'est-ce qu'on lit vraiment ou pas ? Qu'est-ce que j'imagine en lisant ça ? Et puis faire attention, bien réfléchir à toutes ces histoires de lettres. Je pense que je n'y ai pas assez réfléchi avant, ce qui fait que j'ai été surpris plusieurs fois. Essayer d'éliminer toute ambiguïté.

AL : Est-ce qu'en début d'année on t'a donné des conseils en algèbre ?

B : A part les séances de didactique qu'on a eues avec toi... Pas plus qu'en géométrie...

AL : Et au fur et à mesure dans l'année ?

B : Je pense que j'ai eu des tuyaux de mon conseiller pédagogique sur des erreurs classiques, des trucs comme ça. Mais sans plus... Dans le cadre de l'IUFM à part les séances de didactique c'est tout ce qu'on a et après le conseiller pédagogique, je ne saurais plus précisément, mais les discussions tournaient autour de ça. Tiens j'ai vu ça, oh ben oui tu vas voir, etc.

AL : Qu'est-ce que tu attendais de la formation IUFM en algèbre ?

B : ... J'attendais rien de vraiment précis. J'ai quand même découvert des choses pendant l'année et c'est une fois qu'on les a découvertes qu'on se dit : tiens on aurait peut-être pu en parler à l'IUFM. Avant, j'avais une opinion sur ce que je pensais qu'on allait nous dire. Pour moi on allait me dire : voilà vous allez rencontrer ce genre de choses assez régulièrement, faites-y attention. Et plus ou moins des recettes pour voir ce dont on vient de parler. L'histoire du contre-exemple, y réfléchir ensemble, donner des pistes de réflexions. Bon je ne pensais pas précisément à ces choses là parce que c'est des choses qu'on a vues cette année. C'est vrai quand on en discute avec le formateur, on dit : mes secondes ont fait ça. Oh oui, je connais. On en parle avec Claire : ben oui. Même s'il y a des cas particuliers, en général les élèves sont tous les mêmes. Je m'attendais à ça : les erreurs classiques et les petits trucs pour s'en sortir. L'histoire des courbes : il y a un élève qui te dit "moi je n'en démords pas c'est des droites qu'on met bout à bout". Moi j'y ai réfléchi parce que je travaille avec toi. Parce quand on regarde ce qu'on nous fait faire : tu as des exercices à résoudre, des trucs comme ça. Je pense à la géométrie : on a des exos par groupe, on les fait, on les corrige et puis voilà. Et on n'a rien appris. Je ne sais pas exactement quel est le rôle de l'IUFM mais je n'ai pas l'impression que ce soit très profitable.

AL : Par rapport à l'algèbre, la formation n'a donc pas répondu à tes attentes ?

B : Je ne sais plus exactement ce qu'on a fait. Je me rappelle qu'on avait commencé par un historique, ça c'est parfait car finalement on n'a aucune culture mathématique quand on arrive là. C'est quand même bon de faire le point là-dessus. Après qu'est-ce qu'on a fait exactement ? Je sais que l'autre formateur nous avait demandé de préparer une séance, mais on n'a pas eu de retour de ça. Je pense que cela aurait été pas mal d'en discuter ensemble comme on a fait pour la vidéo. Moi je trouve que ce qu'on a fait jeudi était hyper enrichissant. Là en plus on était mélangés, collège et lycée, donc tu vois des choses auxquelles tu n'as pas été confronté. Sur les séances où on travaillait sur l'algèbre, la géométrie je n'ai pas l'impression d'avoir appris un tas de choses. Là où j'ai appris des choses c'est dans les séances didactiques du formateur de Troyes. En travaillant avec toi, j'ai vraiment appris un tas de choses, j'ai réfléchi. Même quand on nous met en petits groupes, il n'y a pas de vraie réflexion. Pourtant je pense que cela devrait être une vraie année de réflexion. Pareil l'histoire du cahier de bord, moi je ne comprends pas pourquoi on n'oblige pas tout le monde à le faire. Si j'avais pas fait ça, jamais je n'aurais réfléchi comme ça. Pour le mémoire pareil, cela m'a aidé. Cela devrait faire partie de l'évaluation. Pour l'évaluation il faut bien se baser sur quelque chose. Les trois visites du tuteur je veux bien mais... Moi ce qui m'a frappé c'est que tu sais tout sur mon année alors que mon tuteur connaît les trois séances qu'il est venu voir. Aussi le cahier de textes on nous a jamais dit ce qu'il fallait mettre dedans, ce que l'inspecteur aime bien voir. Moi c'est mon conseiller pédagogique qui m'a montré.

AL : Est-ce que tu as l'impression que la formation a fait changer ta vision de l'algèbre ?

B : Non.

AL : Est-ce que tu te poses encore des questions sur l'enseignement de l'algèbre ?

B : Ouais... Pour moi l'histoire des exemples, contre-exemples, il faut que j'y réfléchisse, tu m'as donné des pistes. Il y a l'histoire de la valeur absolue. Il faudrait que je voie, introduire ça autrement, faire autre chose. Ou peut-être qu'après je vais travailler au collège, peut-être plus travailler sur la lettre, ce qu'elle signifie exactement. Est-ce que c'est mon introduction de la valeur absolue qui ne marche pas ou bien c'est leur passé qui ne leur permet pas bien de comprendre ce qui se passe ? J'en sais rien. A mon avis quelle que soit la classe dans laquelle tu travailles, tu travailles pour objectif la classe d'après. Quand j'ai étudié les fonctions, j'ai pensé à ce qu'on allait leur demander en première et terminale. Donc le travail qui est fait au collège sur le calcul littéral doit être fait dans le but d'introduire les fonctions, les inéquations, etc.

AL : As-tu travaillé sur d'autres documents que les manuels ?

B : Non. J'ai beaucoup travaillé avec le Fractale pour les activités et exercices pour les devoirs. Il y avait un petit peu de Pyramide, mais les exercices sont un peu difficiles là-dedans. Et puis pour ce qui est du cours, je m'étais appuyé sur le cours de seconde de mon frère et puis sur le livre.

AL : Au début de l'année je t'avais demandé de me citer cinq mots relatifs à l'algèbre, est-ce que tu peux m'en citer cinq maintenant ?

B : ... Lettre, fonction... Espace vectoriel... Norme... Calcul.

AL : Pourquoi norme ?

B : Parce que espace vectoriel normé, norme de vecteur.

AL : Au début de l'année tu avais dit : espace vectoriel, matrice, application linéaire, calculs, structures...

B : Ça c'est des mots de matheux. Je sortais des études de toute façon. Il y a des choses que j'ai presque perdues de vue. J'imagine que dans 10 ans cela sera bien loin.

AL : Au début de l'année je t'avais demandé : à quoi sert l'algèbre en maths ? Qu'est-ce tu réponds maintenant à cette question ?

B : Je me demande si au collège et au lycée, les maths c'est pas l'algèbre et la géométrie. Après en terminale, on commence à faire de l'analyse qui commence à porter ce nom. Sinon l'algèbre c'est quand même la base de tout. J'ai pratiquement fait que ça, cette année. Tu enlèves les stats, la trigo. Le reste c'est de l'algèbre, même les vecteurs c'est de l'algèbre.

AL : A quoi est-ce que cela sert ?

B : ... Le chapitre qui fait le plus le point sur l'algèbre en seconde, c'est celui sur les fonctions... Est-ce que les fonctions sont une fin en soi ? Est-ce qu'on peut considérer que l'algèbre sert pour les études de fonctions ? Pour les élèves, je ne suis pas sûr que ce soit une fin en soi... Je n'arrive pas à me détacher de cette histoire de fonction... L'année prochaine quand ils étudieront le signe de la dérivée ils utiliseront ce qu'on a fait avant sur les inégalités, les tableaux de signes. Qu'est-ce qu'on fait d'autre ? Quand on va leur introduire les complexes en terminale il y a des manipulations algébriques, mais est-ce que...

AL : Dans ce que tu m'as montré, il y a l'algèbre pour faire de la géométrie.

B : Oui. C'est vrai.

AL : Pour toi quelle dimension as-tu privilégié en algèbre ? La dimension outil ou la dimension objet ?

P :Je dirais la dimension outil en donnant deux sens à ce mot outil. D'une part je leur donne des outils pour faire de l'algèbre, des méthodes, et puis l'algèbre pour eux restera un outil de toute façon. L'algèbre en tant qu'objet c'est trop. C'est pas des matheux de toute façon, il y en aura très peu qui feront de l'algèbre pour faire de l'algèbre plus tard.

ANNEXE N° 17 : LE PLANNING DETAILLE DES SEANCES DE BENJAMIN

Date		Contenu
7/09/99	Cours	Feuille d'exercices sur des calculs numériques *Pour le 10/09 : ex 7, 12 p 15, lire fiches 1, 2, 3, 4, 6 p 277*
10/09	Cours	Correction ex 7 p 15, 12 p 15 Cours : Calcul numérique : les nombres et les lettres Ex 1, 2 p 15 Cours : Le calcul dans IR : développements, factorisations, identités remarquables, fractions Ex 14, 15 p 15 *à finir pour le 11/09*
11/09	Cours	Correction ex 14, 15 p 15 Cours : Puissances Activité 3 p 7 *Pour le 14/09 : ex 30 p 16*
13/09	Cours	Première partie de l'évaluation
13/09 et 17/09	Module	Feuille d'exercices sur les fractions et les puissances
14/09	Cours	Correction ex 30 p 16 Cours : Calcul numérique : notation scientifique, racines carrées Ex 18 p 16 *Pour le 18/09 : 20 p 16, 69 p 19*
17/09	Cours	Deuxième partie de l'évaluation
18/09	Cours	Correction 20 p 16, 69 p 19 Interrogation surprise de cours *Pour le 21/09 : 35, 45 p 17, 73 p 19, lire fiche 8 p 280*
20/09 et 24/09	Modules	Suite du travail sur les puissances
21/09	Cours	Correction 73 p 19 Cours : valeur absolue, activité sur la notion de distance entre deux nombres *Pour le 24/09 : 74, 76 p 19, 139, 140 p 25.*
24/09	Cours	Correction 73 p 19, 35, 45, 74, 76, 139, 140. Ex 64 p 18 *Pour le 25/09 : 77, 78 p 19, 20, 41 p 17.*
25/09	Cours	Correction 41, 77, 78. Activité sur les distances Ex 57 p 18. Pour le 28/09 : lire fiches 9, 10 p 281.
20/09 et 27/09	Module	Fiche d'exercices sur développements et factorisations
27/09 et 1/10	Modules	Fiche d'exercices sur la notation scientifique et les racines carrées
28/09	Cours	Correction 57 p 18 Cours : Equations Ex 48 p 17 Distribution de la fiche : mise en équation d'un problème *Pour le 1/10 : 49, 50 p 17.*
1/10	Cours	Fin des fiches de modules sur factorisations et racines Correction ex 49, 51. Correction ex1.1 de l'évaluation
2/10	Cours	Cours : équations du second degré EX 8 p 37, 14 p 38 *Pour le 9/10 : 7, 10 p 37, 125 p 24*
4/10 et 8/10	Modules	Fiche d'exercices sur les équations dont l'inconnue est au dénominateur
5/10	Cours	DS
9/10	Cours	Correction 7, 10 p 37, Ex 1 et 2 du DS *Pour le 12/10 : Activité 2 p 29, 12 p 37.*
4/10 et 11/10	Modules	Mise en équations Ex 1, 3, 4 p 37, 33 p 39.
12/10	Cours	Correction 2 p 29, 12 p 37, ex 3, 4 et 6 du DS. *Pour le 16/10 : 15 p 38, 38 p 40.*
16/10	Cours	Correction 38 p 40, 15 p 38

		Cours : équations avec valeurs absolues Ex 25 p 38 *Pour 19/10 : ex 24 p 38*
19/10	Cours	Correction 24 p 38 Cours : Calcul vectoriel
22/10 et 29/10	Modules	Mise en équations Ex 5, 27, 39, 40 p 37-40.
23/10	Cours	Calcul vectoriel
25/10	Cours	Calcul vectoriel
26/10	Cours	Calcul vectoriel
30/10	Cours	DS 2
8/11	Cours	Calcul vectoriel
9/11	Cours	Calcul vectoriel
16/11	Cours	Calcul vectoriel
20/11	Cours	Calcul vectoriel
23/11	Cours	Cours : Inégalités, inéquations, opérations sur les inégalités Activité 4 p 44 *Pour le 27/11 : 60 p 59.*
27/11	Cours	Correction 60 p 59 Cours : I-3, I-4 : rangements des carrés, racines, inverses, comparaison de a et a² si a ≥ 0. II : Intervalles, 1 et 2. *Pour le 30/11 : 1 p 55 et 3 p 55 (seulement pour la réunion)*
29/11	Modules	Résolution d'inéquation Ex 7 à 16 p 55
30/11	Cours	Correction 1, 3 p 55 Cours : II-2, III Signe d'une expression, 1 signe de ax+b *Pour le 4/12 : 61, 62 p 59.*
4/12	Cours	Correction 61, 62. Cours : III-2 Signe d'un produit Ex 25 p 56 *Pour le 6/12 : 27 p 56*
6/12	Modules	Tableaux de signes Correction 27 p 59 Ex 23, 29 p 56 *Pour le 7/12 : 30, 40 p 57.*
7/12	Cours	Correction 30, 40 p 57 Cours : Signe d'un quotient Interrogation surprise sur les droites remarquables dans un triangle *Pour le 13/12 : 68 p 59, 53 p 162.*
10/12 et 17/12	Modules	Résolution de systèmes d'inéquation à une inconnue Cours : Systèmes de deux inéquations à une inconnue Ex 18, 20, 21 p 56
13/12	Modules	Calcul vectoriel
14/12	Cours	DS 3
18/12	Cours	Correction 72 p 60 Cours : V Encadrement, approximation d'un nombre Correction interrogation Correction ex 3 du DS 3. Pour le 4/01 : ex 3C du DS, 44 p 57, DM
4/01	Cours	Correction 44 p 57 Cours : Inéquations et valeurs absolues Ex 51 p 57 Pour le 8/01 : 49 p 57
8/01	Cours	Correction 49 p 57 Cours : Repères
10/01	Modules	Repères
11/01	Cours	Repères
7/01 et 14/01	Modules	Différentes notations d'un intervalle

		Activité 8 p 47 Exercice : résoudre les inéquations $(-2x+1)(x+3)(3x-9) \geq 0$ et $\frac{-2x+1}{(x+3)(3x-9)} \leq 0$.
15/01	Cours	Repères
21/01, 28/01, 4/02 et 11/02	Modules	Activité permettant d'introduire l'unicité de la solution d'un système
22/01	Cours	Repères
24/01	Modules	Repères
25/01	Cours	Repères, contrôle n°2
29/01	Cours	Repères
31/01	Modules	Repères
5/02	Cours	Repères
7/02	Modules	Repères
8/02	Cours	Repères
12/02	Cours	DS 4 Pour le 28/02 DM n°2
29/02	Cours	Correction activité 3 p 83, B Cours : Fonctions, définitions Correction DS 4 *Pour le 4/03 : 6 p 98, 16 p 99*
3/03 et 10/03	Modules	Systèmes 2×2 et 3×3. Ex 12, 17 p 74. Activité 3 p 66
4/03	Cours	Correction 6, 16 Cours : Représentation graphique Ex 8 p 98 *Pour le 6/03 : 3 p 98, 11 p 98.*
6/03	Modules	Représentations graphiques Correction 3, 11 p 98. Ex 24 p 99
7/03	Cours	Cours : Propriétés, maximum, minimum, sens de variation Ex 46 p 101 *Pour le 11/03 : finir 46 p 101, 22 p 99, 42 p 101.*
11/03	Cours	Correction 22, 42, 46 Cours : Propriétés, parité *Pour le 13/03 : 57, 59 p 102.*
13/03	Modules	Fonctions paires et impaires Correction 57 et 59 Ex 61, 67, 70 p 102-103. *Pour le 14/03 : 62 p 102.*
14/03	Cours	Correction 62. Cours : Fonctions, Propriétés, Périodicité. Etudes de fonctions usuelles, fonction affines *Pour le 18/03 : 2 p 98, activité 1 p 82.*
17/03 et 20/03	Modules	Etude de la fonction $x \longmapsto x^2$
18/03	Cours	Correction 2 p 98, act 1 p 82 Ex 88 p 105 *Pour le 20/03 exercice sur poly pour le mémoire*
20/03 et 24/03	Modules	Révisions mises en équation d'un problème, résolution de systèmes d'équations Ex 23, 32 p 75
21/03	Cours	Tracé de la parabole Etude de la fonction racine, de la fonction inverse *Pour le 25/03 : 95 p 106.*
25/03	Cours	Correction 95 p 106 Ex 108 p 107
27/03	Modules	Activité d'introduction aux statistiques
28/03	Cours	Cours : statistiques

31/03 et 7/04	Modules	Introduction des systèmes d'inéquations à deux inconnues
1/04	Cours	Cours : statistiques
3/04	Modules	Statistiques
4/04	Cours	Cours : correction 104 p 107
8/04	Cours	DS 5 *Pour le 25/04 : DM 3*
25/04	Cours	Cours : statistiques
28/04 et 5/05	Modules	Systèmes d'inéquations Correction du systèmes de trois inéquations du polycopié Ex 88 p 81
29/04	Cours	Cours : Statistiques Correction DM 3 et DS 5.
2/05	Cours	Cours : statistiques
6/05	Cours	Cours : statistiques Ex 36 p 76
9/05	Cours	DS 6
12/05 et 19/05	Modules	Retour sur les fonctions Ex 81 p 105, 53 p 102
13/05	Cours	Correction exercices de statistiques
15/05	Modules	Activité préparatoire au chapitre de trigonométrie Activités 2 et 3 p 109
16/05	Cours	Cours : Fonctions trigonométriques : I et II-1, II-2. *Pour le 20/05 : ex1, 2 p 121*
20/05	Cours	Cours : II-3, II-4. *Pour le 22/05 : 11, 33 p 123*
22/05	Modules	Correction 11 et 33 Ex 36, 22 p 123
23/05	Cours	Cours : II-5 Ex 14 p 122 Pour le 27/05 : 15 p 122
27/05	Cours	Correction 15 Ex 16 p 122 Contrôle n°3
29/05	Modules	Tracé des courbes des fonctions cosinus, sinus
30/05	Cours	Cours : III Construction des représentations graphiques de sinus et cosinus *Pour le 3/06 : 41, 87 p 127, ex 2b du contrôle à refaire.*

Annexe n° 18 : Quelques extraits du cahier de bord de Benjamin

Séance de cours du 10/09/1999 :

1re heure

- correction 7 p 15 (10 min)
- cours : Calcul numérique (25 min)
  Les nbres et les lettres
- ex en clã : 1, 2 p 15 (15 min)
  ↳ correction avec participation de la clã

- n'ont pas compris le but de l'exo : suppression de parenthèses en appliquant la règle des sgns
  → prop acquise.
- les ensbles de nombres semblent compris, leur notation fait peur.
- certains connaissent "∈".

2e heure

- correction 12 p 15 (15 min)
- cours : Calcul numérique (20 min)
  Le calcul ds IR
  dvlppmts, factons, idtés remqbles.
  fractions.
  ↳ participation des ē
- commencés en clã, à finir pour samedi 11/9 : 14, 15 p 15

- de grosses difficultés pr réduire au même dénominateur des fracts comportant des lettres
  → reprise systématique d'un exple numérique
- le cours ne comporte que des révisions : la participation est bonne.
- ex de calcul littéral, utilisant des idtés remarquables

Séance de module du 13/09/99 :

* travail sur la partie fraction
- rappel des règles de calculs vues en cours
  → bcp de cfusions entre $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$
- rappel sur la règle de simplifications car bcp de simplif abusives.
- l'ex n'a pas posé trop de pb : le calcul littéral commence à ê maîtrisé

<u>Séance de cours du 16/10/1999 :</u>

- corr° ex 38 p 40, ex 15 p 38 corrigé sur la feuille
- cours : Equations
  . éq° et valeurs abs
    - act : résoudre $|x-1| = 2$ ...
    - prop : sol° de $|x-a| = d$: 3 cas.
  . lien avec les distces : résoudre $|x-a| = d$ ég à chercher les nb x situés à la distce d de a.

ex 25 p 38

- prévu : début du cs sur les vecteurs
  ms question d'1 élève :
  "comment résoudre $|x-1| = |x+5|$?"
  → devait ê traité plus tard ds le ex
  questions à la clã : $|2x-3| = |7x+15|$ ...
- pour mardi 19/10
  ex 24 p 38

- l'ê au tbl n'a pas su remplacer x par $-0,2$
ms +s ê ont fait cette prop°
vu sur les copies rendues :
- pb sur des calculs numériques, dvlppmts ... avec les lettres → erreurs de calculs.
- +s ê comprennent : $f(x) = -0,2$
  ms calculent $f(-0,2)$
  1 ê calcule $f(4)$, trouve 21
  et écrit : $f(4) \neq 21$ de par sol°.
- pr certains : a) oui car >0 b) non car <0 (ou le contraire) !
- ds c), 1 ê a calculé $f(0)$.
- pr 1 ê : $2x(x+5) = \frac{(x+5)5}{2}$
  $2x(x+5) - (x+5) = \frac{5}{2}$
. le lien avec les distces a visiblement posé pb (ils ne se souviennent plus de $d(a,b) = |a-b|$)

- ex 25 : pas de pb
- recherche avec la classe de sol° de
  $|x-1| = |x+5|$
  bcp d'idées du type : "on met du m côté et on factorise" !
  ou : "on met tt ds la m va"
  question à la clã :
  "a et b tq $|a| = |b|$?"
  → répses : $a=b$, $a=-b$, $-a=-b$, $-a=b$
  ps l'on réduit à 2 cas
  → l'application au pb posé s'est faite ss pb
- ex 24 : encore le m type d'éq° :
  les erreurs car ce genre d'ex a été bien traité par l'ensble de la clã

Séance de module du 22/10/1999 :

thème : mise en équation (avec des expls d'équaO du 2^e^ degré où on ne peut pas factoriser)

- n° 5 p 37 : - au bout de qq minutes de recherche : "c'est dur"
  → "rappel des 4 étapes ?" ss pb
  - choix inconnue : $x = SE$
  - mise en équation : $d(ROSE) = d(TIGE)$

  ne pose pas de pb qd ils st guidés !
  - éq : $(15-x)^2 = x^2 + 75$ - réflexe acquis par la plupart : on factorise
  après ts propositions (fin !), ccl° : il faut dvlpper.

- n° 27 p 39 : - é : "consécutifs ?", répse d'é : "qui se suivent"
  - "choix de l'inconnue ?" : le 1^er^ : x, le 2^e^ : $x+1$, le 3^e^ : $x+2$.
  Après quelques minutes, ds é remarquent qu'on aurait pu choisir le 2^e^ ou le 3^e^ pr inconnue.
  - ici encore, il faut dvlpper.

- n° 39 p 40 : - ts é ont calculé $f(0)$
  - factorisaO ss pb, sf pr une é en fin de diff^té^.
  - une é lit $f(1,6)$ de la façon : "f égale 1,6" ms bonne lecture de $f(x)$
  - la majorité a compris qu'il s'agissait de remplacer x par 1,6.
  - la plupart des élèves a fait le lien entre 1,6 sol° de $f(x)=0$ et $f(1,6)=0$
  - question : (2 était l'autre sol°) "que vaut $f(2)$?" → "0" ss pb

- n° 40 p 40 : - résol° de $f(x) = g(x)$ ss pb
  - pr la plupart ds é, $f(-1) = -10 \Rightarrow g(-1) = +10$
  "pq ?" → "on multiplie par -1"
  ↳ "on remplace x par -1..."

  pr bcp, ce genre d'expression s'apparente à une multiplication.

ANNEXE N° 19 : QUELQUES EXTRAITS DU CAHIER DE COURS D'UNE ELEVE DE BENJAMIN

Extrait du chapitre 1 :

II- Le calcul dans $\mathbb{R}$

1) Propriétés de calcul

a) Développement - Factorisation :

Soient a, b, c 3 nombres réels.

factorise

$* \; a \times (b+c) = ab + ac$

développe

$* \; (a+b) \times c = ac + bc$

$* \; (a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$

b) Identités remarquables

$* \; (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$* \; (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$* \; (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Extrait du chapitre 2 :

EQUATIONS

I. Rappels sur les équations

1) Définitions

Résoudre une équation, c'est chercher tous les nombres qui sont solutions de cette équation (s'il en existe).

Une équation comporte une inconnue, généralement notée x.

2) Propriétés

On ne change pas les solutions d'une équation :

- en ajoutant à chacun des deux membres la même quantité.
- en multipliant chacun des deux membres par un nombre réel non nul.

Lorsque l'on effectue l'une de ces deux opérations, on dit qu'on obtient une équation équivalente.

3) Équations de référence : les équations du 1er degré

Définition : Une équation du 1er degré est une équation de la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des nombres réels.

Étude d'un exemple : Résoudre l'équation $3x + 2 = 0$

$$3x + 2 = 0$$
$$3x + 2 - 2 = 0 - 2$$
$$3x = -2$$
$$\frac{1}{3} \times 3x = -2 \times \frac{1}{3}$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

Propriété : Soient a et b, 2 nombres réels, $a \neq 0$
L'ensemble solution de l'équation $ax + b = 0$
est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$

Extrait du chapitre 3 :

3) Rangement des carrés, des racines carrées et des inverses

Propriété : _ Deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

càd : Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors, $a^2 \leqslant b^2$

⚠ Attention : si les nombres sont négatifs, alors l'ordre est inve

$-3 \leqslant -2$ mais $(-3)^2 \geqslant (-2)^2$

_ Deux nombres réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

càd : Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

_ Deux nombres réels strictement positifs a et b sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses.

càd : Si $0 < a \leqslant b$, alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$

4) Comparaison de a et de a^2, pour a nombre réel positif

Soit $a \geqslant 0$

Pour comparer a et a^2, on va évaluer le signe de $a^2 - a$

$a^2 - a = \underbrace{a}_{\geqslant 0}(a-1)$: puisque $a \geqslant 0$, le signe de $a^2 - a$ est le même que celui de $a - 1$

1er cas : si $0 \leqslant a < 1$: alors $a - 1 < 0$
alors $a^2 - a < 0$
alors $a^2 < a$

2e cas : si $a = 1$: alors $a - 1 = 0$
alors $a^2 - a = 0$
alors $a^2 = a$

3e cas : si $a > 1$: alors $a - 1 > 0$
alors $a^2 - a > 0$
alors $a^2 > a$

ANNEXE N°20: LE DOCUMENT PRODUIT PAR BENJAMIN POUR LA PREPARATION DE LA SEANCE FILMEE

Séance de module : étude des fonctions usuelles.

Lors d'une séance de cours précédente : étude des fonctions affines.
Les élèves auront donc déjà vu ce qu'était l'étude d'une fonction.

Au début de l'heure, je leur distribuerai la fiche "Plan d'étude d'une fonction" qui sera complétée au fur et à mesure.
(si possible, utilisation d'un rétroprojecteur)

On commencera par étudier $x \mapsto x^2$ avec l'ensemble de la classe.
→ à remplir sur la fiche : - méthode d'étude de la parité
- méthode d'étude des variations

On étudiera les variations sur $\mathbb{R}$
→ en remarque sur la fiche : - ⚠ une fonction peut être alternativement croissante et décroissante
- lorsqu'une fonction est paire ou impaire, il suffit d'étudier ses variations et tracer la courbe sur une "moitié" de $\mathcal{D}_f$, on obtient le reste par symétrie.

faire en sorte de le faire remarquer par les élèves.

Elaboration d'un tableau de valeurs
En même temps, placer les points dans le repère, pour montrer la nécessité d'avoir le plus de points possible, surtout entre 0 et 1.
Nom de la courbe.

ANNEXE N°21 : ENTRETIEN DE PREPARATION DE LA SEANCE VIDEO AVEC BENJAMIN, LE 13/03/2000

B : En distribuant cette feuille-là. On donne le plan d'étude détaillé. Et on écrit à chaque fois des petites remarques. Comme la méthode pour étudier la parité. Pour les variations, qu'il fallait faire attention à... Non, ça c'est la méthode et ici on marque qu'il faut faire attention aux règles sur les inégalités, ce qui fait que cela peut être croissant puis décroissant. Et puis le fait que si une fonction est paire ou impaire il suffit de l'étudier seulement sur la moitié de l'intervalle.

AL : D'accord. Comment est-ce que tu vas présenter ça ? Là c'est une fiche méthode que tu me présentes. Concrètement comment cela va se présenter ? Qu'est-ce que tu vas leur donner à faire ?

B : Hum... Alors, comme je l'ai marqué là, la séance de cours avant, on aura déjà étudié les fonctions affines. On aura fait plus ou moins le plan d'étude. Donc demain avec eux je fais l'étude des fonctions affines. En faisant plus ou moins ce cheminement même si ce n'est pas nécessaire pour les fonctions affines puisqu'ils savent déjà que c'est une droite. Mais au moins pour étudier les variations : a inférieur à b, multiplier par le coefficient directeur, ajouter l'ordonnée à l'origine. Bon ils auront déjà une idée de ce qu'est le plan. Et en début d'heure, vendredi je leur distribue la feuille. Je leur dis : bon c'est ce qu'on avait fait déjà mardi, voilà le plan. Et la fonction x^2 on l'étudie ensemble. Parce que c'est la première vraie fonction qu'ils vont étudier. Donc on va faire ça ensemble en laissant réfléchir à chaque fois. Par exemple pour les variations, je vais les laisser prendre eux-mêmes a inférieur à b et je m'attends à ce qu'ils me mettent a^2 toujours inférieur à b^2 et de leur faire remarquer, etc. Travailler là-dessus ensemble. Normalement je devrais avoir un rétroprojecteur dans cette salle, donc moi-même remplir la fiche sur rétroprojecteur. Et puis j'ai préparé ça pour tracer la courbe proprement. Donc voilà ce que je compte faire. Et j'espère en avoir le temps après : après avoir étudié x^2, les faire réfléchir sur $\sqrt{x}$. Et à terminer pour la fois d'après.

AL : Là il n'y a pas d'énoncé particulier.

B : Non.

AL : Tu vas leur dire : on va étudier la fonction x^2.

B : Et ça sera dans le cours. C'est la fin du cours. Donc on aura étudié les fonctions affines et dans le petit 2, fonction carré, on fait ça.

AL : D'accord. Quand tu dis : je vais le faire avec eux, qu'est-ce que ça veut dire ?

B : On va le faire ensemble. Je dis "on va chercher l'ensemble de définition". Je laisse tout le monde chercher. Dès que j'ai vu comment cela allait, soit dans un sens, soit dans l'autre, je reprends la main en corrigeant moi-même ou en leur donnant un truc pour les débloquer. En général c'est comme ça que je travaille en module.

AL : Donc, en fait, tu vas les guider question par question.

B : Voilà.

AL : Qu'est-ce que tu as déjà fait sur les fonctions avant ?

B : J'ai quasiment tout fait, là. Il ne me reste plus qu'à définir ce qu'est une fonction périodique. La parité, j'ai fait ça samedi matin. Ils savent ce qu'est le sens de variation. Je leur ai dit ce que c'était.

AL : Tu l'as fait sur des fonctions particulières ou à partir de graphiques ?

B : Tout d'abord j'ai donné les variations des fonctions linéaires : 2x et –2x, pour leur montrer la différence et après j'ai traité avec eux quelques exercices du livre. Soit on avait le graphique et il fallait en déduire les variations, soit on avait les variations et il fallait en déduire le graphique. Ce qui m'a posé un peu de problèmes quand même, parce qu'au départ je m'étais dit que les courbes étaient forcément des courbes qui n'étaient pas des droites en fait et rien ne le prouve, cela peut être des fonctions affines par morceaux. Cela m'a vraiment posé problème ça. Alors voilà ce qu'on a fait avec eux jusque là et aujourd'hui je vais faire un module sur la parité. On va regarder un petit peu comment on étudie une parité, etc.

AL : Avec des expressions ou à partir de graphiques ?

B : A partir d'expressions et aussi utiliser la symétrie par rapport à l'axe ou par rapport au point O. Il y a un exercice où il y a un morceau de courbe et on dit que la fonction est impaire et il faut tracer l'autre morceau.

AL : D'accord. Quelles sont les questions que tu t'es posées quand tu as préparé ton activité ?

B : Mon but là c'était qu'ils sachent ce que ça veut dire d'étudier une fonction. Donc les différentes étapes. Et, deuxième chose, qu'ils aient les techniques pour étudier les fonctions. C'est-à-dire technique pour trouver la parité, technique pour trouver le sens de variation.

AL : Le sens de variation tu le fais avec la technique : si a plus petit que b, on va exprimer f(a) et comparer avec f(b) ?

B : Oui.

AL : Donc c'est ça, tu as essayé de reprendre un plan type ?

B : Oui c'est ça. Parce que bon dans cette classe-là il leur faut vraiment des méthodes, il leur faut un travail mâché, donc je leur fais une fiche méthode, comme je l'ai déjà fait pour les mises en équation. Disons une fiche... Bon pour la mise en équation, cela a bien marché parce que les quatre étapes maintenant ils le connaissent sur le bout des doigts. Donc j'espère qu'avec ça... Ils ont quelque chose de propre... Disons un squelette assez propre.

AL : Ça c'est le plan classique d'étude d'une fonction. C'est comme ça que tu as déterminé ce plan ?

B : Oui. Bon j'ai essayé d'insister aussi sur le tableau de valeurs. Tout d'abord, prendre des valeurs entières : 0, 1, 2, 3. Et puis se rendre compte qu'entre 0 et 1, on ne sait pas trop comment les rejoindre donc prendre plus de valeurs et puis on va se rendre compte… En fait, bon il y a la tangente. Parce que bon pour eux ça pose un gros problème. Ils ne savent pas par où passer pour tracer la courbe. Comme je te disais tout à l'heure : un tableau de variation, j'ai tracé la courbe, "ben, Monsieur, pourquoi vous la faites comme ça ?". Donc là leur montrer qu'il faut un maximum de valeurs pour que la courbe soit la plus précise possible.

AL : Tu t'es inspiré de quelque chose pour ça ou est-ce que tu as fabriqué ta propre activité ?

B : Non pour ça je l'ai trouvée tout seul. Ce que j'avais comme source, je t'en ai déjà parlé, un cours de seconde d'il y a deux ans. C'est donné comme ça dans le cours : la fonction x^2 son ensemble de définition c'est $\mathbb{R}$, elle est paire, bon il n'y avait rien de... Comme moi je voulais construire quelque chose pour le faire avec eux. Et même dans le bouquin il n'y a pas d'activité là-dessus je crois. Donc non.

AL : Là je vais reprendre les questions pour l'opération séquence. Mais ce n'est pas la grille de cette année. Cette grille d'opération séquence que vous avez construite, est-ce que tu l'as regardée ?

B : Non, je ne l'ai pas regardée pour construire la séquence.

AL : On va essayer de répondre à des questions qui sont sûrement pratiquement les mêmes que celles que vous avez posées cette année. Les objectifs, tu me l'as dit, c'est les amener à élaborer le plan d'une...

B : Voilà connaître le plan d'étude d'une fonction et avoir les techniques pour établir la parité ou le sens de variation d'une fonction. Et puis pratiquer des tracés de courbes aussi parce que ça c'est loin d'être facile pour eux de tracer la courbe.

AL : En fait l'idée c'est de les faire répondre aux questions et après de dégager des méthodes ?

B : Oui, le faire faire par eux-mêmes... C'est pour cela que j'ai dit qu'on allait le faire ensemble pour qu'eux fassent quelque chose et pour qu'après ça rentre quoi. Et puis leur faire refaire à la maison $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$ par eux-mêmes, pour refaire le travail après.

AL : Où cette séquence se situe-t-elle par rapport à la progression adoptée ? Ça on l'a dit. Tu as déjà présenté tous les concepts avant...

B : C'est la fin de chapitre. Je leur ai donné toutes les définitions. Cela commence même à faire lourd parce que sens de variation, c'est nouveau. Parité, c'est nouveau. On fait un petit exemple, un exercice et on passe à la suite... Bon il y a des élèves qui ont vraiment du mal là. Donc là on va remettre les choses au point avec ça.

AL : Et qu'est-ce qui sera nouveau par rapport à ce que tu as déjà fait ?

B : Il n'y aura rien de franchement nouveau parce que comme je te l'ai dit à chaque fois qu'on voit une notion, on l'applique. Donc recherche de l'ensemble de définition, on l'a déjà fait. Parité, on en aura déjà pratiqué, on va en faire aujourd'hui. Les variations, on l'a fait en exemple en cours. Par contre on ne l'a pas fait en exercice vraiment, donc ça sera peut-être la première fois vraiment qu'ils étudieront les variations d'une fonction. Parce que ce qu'on a fait pour l'instant, c'est surtout sur des graphiques. Et puis tracé de courbes, ils n'en ont pas fait beaucoup encore.

AL : On regardera ensuite plus en détail le scénario qui est prévu pour chacune des questions. Une question plus générale : quel est pour toi la part du travail mathématique qui va être à la charge des élèves ?

B : A leur charge... Finalement... Une fois qu'ils se seront souvenus de la méthode que je leur ai donnée, je pense en particulier aux variations, l'outil mathématique dont ils ont besoin c'est le travail sur les inégalités. Une fois qu'ils se souviendront qu'il faut partir de a inférieur à b et puis qu'il faut arriver à f(a) par rapport à f(b), après il faut jouer avec les règles qu'ils connaissent sur les inégalités. Et pour la parité, on calcule f(-x), c'est du calcul algébrique assez simple en général. Se rappeler que $(-x)^2$ ça fait x^2.

AL : Mais si on regarde chacune des questions. Comment comptes-tu, par exemple pour la recherche de l'ensemble de définition, comment est-ce que tu comptes présenter... ? En fait ils n'auront aucune feuille, eux ? Tu ne vas rien leur donner ?

B : Ça seulement. Ça je leur donne dès le début de l'heure. Et puis on va écrire au tableau : 2 - Etude de la fonction x^2, on donne f qui à x associe x^2, et puis on va rechercher l'ensemble de définition : "qu'est-ce que vous faites ?" Et je les laisse chercher.

AL : Là il faut qu'ils se rappellent ce qu'est l'ensemble de définition.

B : Ouais, à chaque fois il faut qu'ils se rappellent de ce qu'on a fait avant, qu'est-ce qu'on faisait pour faire ça et puis mettre en œuvre.

AL : L'ensemble de définition, là cela ne posera peut-être pas de problème. Etude de la parité, comment comptes-tu présenter ? 2 - Etude de la parité et tu les laisses se débrouiller ?

B : Il faut qu'on remplisse "méthodes" donc : "est-ce que vous vous rappelez de la méthode pour la parité ?".

AL : D'accord, tu veux déjà leur faire dire la méthode et l'appliquer après ?

B : Oui. Tu pensais que j'allais leur demander d'étudier la parité et, après quand tout le monde aura un peu cherché, on dégage la méthode ?

AL : Peut-être...

B : C'est vrai que je ne l'avais pas vu comme ça, ouais.

AL : En fait, moi je pense qu'il faut les laisser un peu chercher dans chacune des questions.

B : Oui, si on commence déjà par leur donner la méthode, le travail est mâché.

AL : Est-ce que tu leur as fait faire des choses sur la parité ou est-ce que ce n'est qu'un point du cours ?

B : C'est un point du cours. Et je vais le faire seulement aujourd'hui. Dans le cours j'ai dit ce qu'était une fonction paire, j'ai fait le dessin au tableau pour montrer que la courbe était symétrique par rapport à l'axe ou par rapport à 0. Et c'est tout ce qu'on a fait. Ce n'est qu'aujourd'hui que l'on va regarder ce que c'est vraiment qu'une fonction paire. Donc oui, c'est peut-être... Pour les faire réinvestir ce qu'on aura vu aujourd'hui, les laisser partir d'eux-mêmes et dégager la méthode après. Essayer de la leur faire dire, la méthode.

AL : Le mieux c'est peut-être ça. Toi, comme ça, tu pourras voir comment ils démarrent. Puis après ils essaient de dire la méthode, plutôt que ce soit... De toute façon cela va se faire simultanément, il faudra qu'ils recherchent la méthode pour traiter la question. Mais toi cela te permettra de voir comment ils ont compris les choses.

B : C'est vrai.

AL : Qu'est-ce que tu attends comme réponse pour cette étude de la parité ?

B : Je ne sais pas du tout comment ils vont... Je ne sais pas du tout ce qu'ils vont dire. Je m'attends à ce que cela bloque vraiment parce que c'est vraiment quelque chose de nouveau. Mais je ne sais du tout ce que cela va donner.

AL : Et les variations, c'est pareil, tu n'en as pas fait ?

B : Là, la méthode ils l'ont vue déjà. Pour les variation de "x donne 2x", on est parti de $a < b$, on a multiplié par 2, donc on a $2a < 2b$ donc $f(a) < f(b)$. Ça la méthode, ils l'ont déjà vue alors que pour la parité ils ne l'ont pas encore. Mais là, c'est pareil, je les laisserai partir pour voir ce qu'ils font. Bon là je m'attends à ce qu'ils fassent : on a toujours $a^2 < b^2$. Surtout que cela sera vraiment la première fonction qu'on verra où il y a d'abord décroissance puis croissance. Pour l'instant on n'a vu que des droites qui sont monotones.

AL : Tous tes exemples, tu les as pris sur des fonctions affines ? Tu n'as jamais vu d'autres types de fonctions.

B : Non parce que les autres je me les gardais pour là justement. Parce que je veux vraiment que tout soit nouveau. Qu'on n'ait pas déjà étudié la parité de x^2 d'un côté et étudié les variations d'un autre. Qu'on ait tout ce jour-là.

AL : Donc l'ensemble de définition, tu l'as vu aussi sur les fonctions affines ?

B : Oui... Enfin ça, par contre, j'ai peut-être fait des exercices quand même avec des racines au dénominateur, des choses comme ça. Ça ils savaient déjà faire avec les domaines de validité. D'ailleurs cela ne s'est pas mal passé. Et puis je leur ai fait remarquer aussi sur un exercice où on donnait une fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ et un moment on demandait de calculer l'image de quelque chose qui était avant 1 et j'ai réussi à leur faire dire que c'était pas dans le domaine de définition. J'ai réussi à leur faire dire pourquoi le domaine de définition était celui qui leur était proposé dans l'exercice. Donc ça on en a déjà fait quand même.

AL : D'accord. Pour la parité, tu penses que c'est plus au niveau du concept qu'ils auront du mal à savoir ce qu'est la parité ? Qu'est-ce que tu vois comme difficultés ?

B : A mon avis, ils vont... C'est un peu ce que j'ai vu samedi : ils sont soulagés quand j'ai fait le graphique et qu'ils ont compris que c'était symétrique. Je leur ai dit que c'était $f(x) = f(-x)$, on fait le dessin, et ils comprennent bien. Moi j'ai peur qu'ils bloquent là-dessus, symétrie. En plus c'est un peu ce qu'on va refaire aujourd'hui... Qu'ils oublient un petit peu le $f(x) = f(-x)$... Alors que là c'est vraiment ça dont on a besoin.

AL : Tu as peur qu'ils restent sur l'aspect graphique et qu'ils oublient l'aspect algébrique ?

B : Ouais, j'ai l'impression qu'ils ont besoin de quelque chose de concret, de physique, qu'on voit bien.

AL : Et admettons qu'ils soient bloqués à cet endroit-là... Bon l'ensemble de définition, je pense qu'il n'y aura pas de problème.

B : Non, je pense que cela ira.

AL : Sur la parité, si c'est quelque chose que tu fais aujourd'hui, ce n'est pas sûr que...

B : Parce qu'aujourd'hui, je compte leur donner deux exercices où on leur donne deux fonctions et puis on demande si elles sont paires ou impaires. Et justement voir des cas où la fonction est paire, des cas où elle n'est ni paire, ni impaire.

AL : Sur des expressions algébriques ?

B : Oui. En fin d'heure parce qu'on va d'abord travailler sur des graphiques.

AL : Tu n'as pas encore donné la définition ?

B : Si, si. J'ai donné la définition et la propriété que c'est symétrique. Ça ils le savent. On s'est arrêté là, c'est tout. Et donc aujourd'hui on va commencer par travailler sur des graphiques et en fin d'heure on prendra une fonction et regarder un petit peu ce qui se passe. Mais surtout, ce que je veux faire c'est avoir une fonction qui n'est ni paire, ni impaire.

AL : Le tracé de la courbe, tu l'as mis à la fin parce que c'est le plan d'étude d'une fonction comme on ferait en terminale ?

B : Oui.

AL : Admettons que, sur l'étude de la parité, il y ait des blocages. Enfin d'une manière générale, comment comptes-tu relancer s'il y a un blocage ?

B : Pour la parité, je leur demanderais la définition. Et remarquer que les fonctions paires ou impaires, on a f(-x) en fonction de f(x). Donc il faut qu'on travaille sur f(-x). Leur faire dire : il faut qu'on parte de f(-x) et qu'on regarde ce qu'on obtient. Bon après j'espère quand même qu'avec ça cela devrait aller.

AL : Et pour les variations, tu ferais pareil ?

B : Pour les variations, je leur demanderais ce qu'on a fait dans le cours quand j'ai traité les exemples. Parce que, là, la méthode ils l'ont déjà vue.

AL : Je pense quand même que c'est mieux qu'au début tu les laisses chercher.

B : Oui, c'est vrai.

AL : En fait le plan d'étude c'est faire un résumé de ce que tu as mis dans le cours un peu partout.

B : Oui finalement c'est vrai : faire la synthèse de qui était fait dans le cours.

AL : Et les remarques pour l'étude des variations, comment comptes-tu... ?

B : Ça, j'espère qu'ils vont me les dire. Quoique la première : une fonction peut être alternativement croissante puis décroissante, ça je compte sur eux pour me faire l'erreur dont je t'ai déjà parlée. Leur faire remarquer qu'à chaque fois il faut se souvenir du cadre dans lequel on peut appliquer la propriété qu'ils appliquent.

AL : Et si tu en as qui te font ça justement, tu fais quoi ?

B : Là je vais prendre un contre-exemple. Ce que j'ai déjà fait dans des inéquations qu'ils devaient factoriser eux-mêmes et il y a des élèves pour calculer le signe de x^2-1 qui disent que x^2 doit être inférieur à 1 donc... Donc là je prenais un contre-exemple et puis là ça marche à tous les coups. Donc là je compte prendre deux nombres négatifs et regarder ce que cela donne. Et puis pour la deuxième, j'aimerais bien qu'ils me la trouvent eux-mêmes. Mais alors je pense qu'il faudra peut-être aller jusqu'au tableau de valeurs pour... Voire même jusqu'au graphique pour qu'ils se rendent compte que la moitié du travail suffisait. Parce qu'avec le tableau de variation cela ne sera pas évident surtout que je leur avais fait remarquer que bien que les flèches aient l'air symétrique, cela ne veut rien dire parce que ce n'est qu'un squelette. Donc là je pense que ça on y reviendra une fois qu'on aura tracé la courbe, on se sera rendu compte qu'on a fait deux fois trop de travail.

AL : Donc si on résume les difficultés que tu prévois : des difficultés liées au concept, se rappeler les définitions et des difficultés avec les inégalités.

Comment est-ce que tu prévois l'organisation de cette séance ? En combien de temps prévois-tu ça ? Tu n'as pas prévu de correction d'exercices ?

B : Non il n'y aura que ça. Je pense que cela va prendre une bonne quarantaine de minutes. Déjà le temps qu'ils se souviennent de ce qu'il faut faire en 2 et en 3, là. Remettre les choses au point. Que ce soit vraiment bien fait. Le tableau de valeurs ça va être long. Tant qu'ils dessinent un tableau, qu'ils prennent leur calculatrice. Cela va être long. Et puis le tracé de la courbe, comme cela va être une des premières fois que l'on en fait, cela va être dur. C'est pour cela que je vais le faire en même temps au rétroprojecteur avec eux.

AL : C'est une séance de combien de temps ?

B : C'est 55 minutes, mais on ne fait jamais 50 minutes. Ils arrivent pour 11 heures et je les lâche à moins 10, je ne les lâche jamais en retard.

AL : Une fois qu'ils auront fini ça, tu les lances éventuellement sur la racine ?

B : Oui. Bon je les laisse commencer et ce sera à finir pour la fois d'après. Peut-être que je leur donnerai aussi à faire l'étude de $\frac{1}{x}$. Et, plus tard en devoir, je compte leur demander de faire l'étude de x^3. En contrôle. En détaillant : en leur demandant de montrer que la fonction est impaire, étudier les variations... Cela sera assez détaillé.

AL : Comment est-ce que tu penses prolonger le travail sur la fonction carré ? Ce chapitre sur les fonctions usuelles clôt ton travail sur les fonctions ?

B : Ça clôt le cours mais il y aura encore des exercices. J'aimerais bien faire avec eux, c'est étudier, par exemple, la fonction x^2+1. Les variations, la courbe, le translaté. Moi j'aimerais bien qu'on fasse un petit peu de ça. Parce que cela ne sert à rien de connaître ces fonctions, si c'est pour pas s'en servir après. Il y a des exercices là-dessus dans le livre.

AL : D'accord. Là tu fais un travail technique. Rien ne motive en particulier le travail sur cette fonction. Est-ce que tu prévois des activités du genre activité géométrique qui conduiraient à une fonction ?

B : J'ai commencé le chapitre sur les fonctions par ça. Une activité du bouquin. Je vais te la montrer.
Cela m'a servi de base après pour construire le cours, quand j'ai parlé de maximum, de fonction croissante, je leur disais : "souvenez-vous, la fonction qu'on avait était croissante, puis décroissante". C'est tout ce que j'ai fait comme activité.
Tu vois aujourd'hui je compte faire ça : on leur donne ça, on leur dit que la fonction est impaire...

AL : Et on leur demande de compléter un graphique.

B : Et là il y a une fonction qui n'est ni paire ni impaire. Pour voir ce que cela donne. Et puis des domaines symétriques par rapport à 0 aussi. Pour pas qu'ils oublient de vérifier ça avant de commencer.

AL : Et la parité sur des expressions, ils l'auront vue dans le 70.

B : Oui. Ils l'auront déjà vue ça c'est vrai.

AL : Donc le prolongement se fera avec des fonctions associées ?

B : Et puis savoir que la courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une parabole. Le vocabulaire.

AL : Dans ce livre, c'est le seul chapitre sur les fonctions ?

B : Oui.
Là ce qui ne me plaît pas dans leurs activités, c'est que l'on commence par construire la courbe.

AL : Pourquoi cela ne te plaît pas ?

B : Parce que moi ce que je veux qu'ils acquièrent que, pour tracer une courbe, il faut l'avoir étudiée avant, qu'on sache quelles propriétés elle a, en particulier qu'on connaisse son tableau de variation sinon on part complètement dans l'inconnue. Si on a deux points, aussi proches soient-ils, on ne sait pas ce que la fonction peut faire entre les deux. Donc pour moi il faut commencer par faire l'étude de la fonction. Et il y a beaucoup d'exercices comme ça où on commence à tracer point par point. Dans des activités de type géométrique, souvent on prend des valeurs et seulement après on calcule la fonction. Moi je trouve que c'est peut-être pas mal en troisième, je ne sais pas, mais je pense qu'en seconde, on doit leur faire comprendre que c'est pas assez.

AL : Si tu prends des exemples au début, cela les aide à comprendre...

B : Bien sûr. Surtout que là au début, ils ont eu du mal aussi. Déjà ils ne comprennent pas ce qui se passe sur le dessin de toute façon. Cela ne vient pas. Il faut faire une petite animation pour leur faire comprendre par exemple que le rectangle bouge.

AL : Tu as utilisé l'ordinateur ?

B : Non, non au tableau. On a des moyens limités.
Ils ne comprennent pas ce qui se passe. C'est normal, je me mets à leur place.

AL : Donc le bilan va être fait au fur et à mesure dans le cours ?

B : Oui dans le cours on aura : l'ensemble de définition c'est $\mathbb{R}$ parce que la fonction est définie partout. La parité, on cherche la parité... Là ils ont le squelette.

AL : Donc vous allez traiter la première question, mettre au point ce que vous allez retenir...

B : Et dans le cours on écrit... On fait le bilan au fur et à mesure.

AL : D'accord. Je pense que ce qu'il faut essayer de vraiment les laisser chercher au départ. Cela permet de déjà voir ce qu'ils ont retenu. Pour toi cela va te donner des tas de renseignements. Tu vas aussi avoir des renseignements sur leurs démarches, tu vas peut-être le voir aujourd'hui. Et puis à la fin remplir cette fiche mais que cela ne devienne pas le but premier de ton cours.

B : Oui bien sûr.

AL : Je ne sais pas comment tu penses faire apparaître les points méthode.

B : Essayer de leur faire dire.

AL : En interroger pour leur faire dire comment ils ont fait ?

B : Oui. A la limite envoyer un élève au tableau pour nous proposer ce qu'il a fait et puis essayer de dégager après la méthode. Cela va dépendre de ce qu'ils vont dire.

AL : Je pense qu'il y a une chose qui serait pas mal aussi : avant de lancer sur le plan d'étude d'une fonction comme ça, comme tu dis que tu n'as jamais fait l'étude d'une fonction en entier...

B : On va en faire une demain... Bon c'est les fonctions affines, je vais respecter ce plan mais je ne leur donnerai pas ce plan demain.

AL : Ce qui pourrait être pas mal, ce serait de leur dire : on veut faire l'étude d'une fonction, qu'est-ce qu'on fait ?

B : Qu'est-ce qu'on aimerait bien savoir sur la fonction ?

AL : Oui, cela pourrait être pas mal. Si eux commencent par te dire qu'ils veulent tracer la courbe, tu pourrais expliquer pourquoi...

B : Leur dire ce que je disais tout à l'heure : "on ne sait pas exactement...".

AL : Tu vois essayer de leur faire comprendre...

B : L'intérêt de faire ça.

AL : Cela serait pas mal. Au lieu d'arriver avec un plan tout fait et leur dire : c'est comme ça. Voir ce que eux feraient. Puisque tu penses que cela va tenir 40 minutes, tu peux prendre un peu de temps pour ça.

B : Oui. C'est vrai que c'est moins directif de toute façon. Ouais c'est pas mal.

AL : Et pour toi, cela te permettrait de voir leur démarche. Elle va peut-être être de calculer des valeurs. Tu pourrais alors leur demander si on peut calculer toutes les valeurs, si entre deux points on sait comment la courbe se comporte. Cela te permettrait de justifier ton plan.

B : Oui je n'avais pas pensé à ça.

AL : Surtout que vous aurez déjà fait des choses sur ça.

B : Oui sans que cela soit formalisé, ils auront déjà vu un ensemble de fonctions.

AL : Parce que là sur les fonctions affines, s'ils ont de bons souvenirs de troisième, ils savent que la représentation graphique est une droite.

B : Oui ça ils le savent.

AL : Ils ont peut-être déjà vu que si le coefficient directeur est positif la droite "monte", s'il est négatif...

B : C'est surtout sur ça que j'ai insisté.

AL : Là la fonction carrée ils ne la connaissent pas trop. Sinon au niveau des fonctions associées, tu parles de x^2+1 mais je pense que tu pourrais même travailler sur des fonctions un peu plus compliquées qui se ramèneraient à $(x-a)^2+b$. Des choses comme ça, où tu les aiderais à factoriser.
Mais par rapport à ce que tu as prévu, je les laisserais parler sur ce qu'ils pensent qu'il faut étudier sur une fonction.

B : Oui c'est pas mal. C'est vrai que c'est directif ça.

AL : Toi, tu sais pourquoi tu utilises ce plan. Eux ils ne le savent pas. Et, comme tu dis, on leur fait souvent tracer la courbe et on regarde ensuite ce qui se passe sur la courbe. Cela serait bien de justifier ce que tu leur fais faire. Et dans l'étude de la parité, tu vas voir des choses qui te donneront d'autres idées quant aux difficultés des élèves. Pour l'instant je te laisse...

B : Les découvrir.

AL : Oui.
Donc les questions que tu t'es posées pour préparer cette séance se sont situées au niveau du contenu. Quand tu prépares une séance de ce type-là, quelles sont les questions que tu te poses ?

B : Qu'est-ce qu'ils doivent savoir en sortant de la séance ? Donc là, en l'occurrence, c'est savoir ce que c'est que faire l'étude d'une fonction.

AL : Est-ce que tu te poses des questions relatives à la gestion de classe ?

B : Je me demande toujours comment je vais faire. Surtout là une activité comme ça. L'activité, c'est là où on travaille le plus en fonction des autres. Moi je vais réagir en fonction de ce que disent les élèves, contrairement à ce qu'on fait en cours. Même si je réagis, mais c'est beaucoup plus directif. Ou une séance d'exercices d'application, où là je les laisse complètement chercher et puis c'est tout.

AL : Est-ce que c'est un bon groupe vendredi ?

B : Les groupes sont sensiblement équivalents. Il y a des élèves actifs dans ce groupe. Normalement c'est une heure où ils sont très actifs aussi. Le pire c'est le lundi de 13 à 14 où là il y a rien. Quel que soit le groupe ils dorment. Normalement il y a une bonne participation, ça je ne me plains pas.

ANNEXE N°22 : RETRANSCRIPTION DE LA SEANCE VIDEO AVEC BENJAMIN, LE 17/03/2000

B : Je vous avais dit mardi qu'on allait travailler un petit peu sur le cours qui serait nécessaire au module. Lundi on a entamé le paragraphe 4 ou 5, je crois, c'était l'étude de fonctions usuelles. On a tout d'abord parlé de la fonction affine, aujourd'hui nous allons parler de la fonction carré.

Benjamin écrit au tableau : 2-Etude de la fonction carré.

B : Deuxièmement : étude de la fonction carré. Alors à votre avis, quand on parle de la fonction carré, de quelle fonction on parle ? ... A ton avis, la fonction carré, c'est quoi ?

E : x^2.

B : C'est la fonction qui à x... Qui à un nombre x associe la valeur x^2. C'est pour cela qu'on l'appelle la fonction carré.

Benjamin écrit au tableau.

B : On étudie la fonction f, on va l'appeler f, qui à x associe x^2.

Alors à votre avis, quand on étudie une fonction, qu'est-ce qu'on veut faire ? Quel est le but de l'étude d'une fonction à votre avis ?

E : Pouvoir représenter la fonction.

B : Alors, selon Aziz, le but de l'étude d'une fonction c'est la représentation graphique. Alors on peut écrire ça. Vous ne le recopiez pas. On met toutes les idées en vrac.

Benjamin écrit "représentation graphique" au tableau.

B : Alors à votre avis, qu'est-ce qu'il nous faut pour faire la représentation graphique d'une fonction ?

E : Des points.

B : Des points. Pour avoir des points, qu'est-ce qu'on fait ?

E : On dessine.

E : Des coordonnées.

B : Des coordonnées, voilà. On les obtient comment, les coordonnées ?

E : On calcule.

B : Oui, on calcule. On a dit qu'on faisait quoi ? On a déjà fait ça... Oui ?

E : On choisit...

B : On fait un tableau...

E : x est égal à...

E : Un tableau de variation.

B : Non, pour avoir les points on a dit...

E : Un tableau de valeurs.

B : Un tableau de valeurs. D'accord, il nous faut un tableau de valeurs.

Benjamin écrit au tableau : tableau de valeurs.

B : Bon, avec un tableau de valeurs on va avoir différents points qui vont nous permettre de tracer la courbe. Alors par exemple, si on a une représentation graphique, on sait qu'on a un point ici, on sait qu'on a un point ici.

Benjamin s'appuie sur un schéma au tableau.

E : On peut tracer la droite.

B : Oui, on peut tracer la droite. Enfin nous, ce qu'on veut, c'est la courbe. On peut tracer la droite qui passe par ces deux points. Est-ce qu'on est sûr que ça c'est la courbe représentative ?

E : Ben non, elle doit passer par les points.

B : Elle doit passer par les deux points. Mais est-ce qu'elle fait ça ? Ou bien est-ce qu'elle fait ça ? Ou ça ?

Il s'appuie de nouveau sur le schéma où il représente différentes courbes passant par les deux points.

E : On sait pas...

E : Cela dépend de la fonction…

B : Cela dépend de la fonction, bien sûr. Comment est-ce qu'on peut trancher entre ces cas ? Parce qu'on ne peut pas s'amuser à calculer un tas de points. On ne peut pas. On ne peut pas avoir tous les points.

E : On peut faire une étude pour voir si elle est paire ou impaire... Comme ça on aura déjà une idée de...

B : La parité... Oui Caroline, la parité qu'est-ce qu'elle nous dit ?

C : *Inaudible.*

B : Ça va être une symétrie, la parité. Là, c'est pas des histoires de symétries.

E : On peut voir si c'est affine.

B : Alors si, c'est une fonction affine, on est certain que c'est une droite. Ça d'accord. Ici on voit bien que c'est pas une fonction affine. Donc on ne sait pas trop ce que c'est. Quelle est la différence entre la première que j'ai tracée, là la droite, et puis la deuxième ?

E : Une, c'est une droite, une, c'est une courbe.

B : Oui, une, c'est une droite, une, c'est une courbe... Oui si vous voulez… Qu'est-ce qu'on a vu d'autre sur les fonctions ? On a parlé de plein de choses. Il y en a une dont on a pas parlé encore.

E : Le sens de variation.

B : La droite verte, là, la fonction, elle est comment ?

E : Croissante.

B : Elle est croissante. Et celle-ci...

E : Croissante puis décroissante…

Brouhaha.

B : Oui, elle est croissante puis décroissante. Et ça, on le sait comment ?

E : Le tableau de variation.

B : Là il nous faut le tableau de variation. Si on nous dit que la fonction est croissante entre les deux points... Et bien ce ne sera pas forcément une droite, hein ! Ce sera quelque chose de croissant. Si elle est croissante et décroissante, on est sûr qu'elle va avoir une forme qui va avoir cette allure. Donc il est aussi nécessaire d'avoir un tableau de variation. Le tableau de valeurs ne suffit pas. Parce qu'on ne sait pas ce qui se passe entre deux points. Donc il nous faut aussi un tableau de variation.

Benjamin écrit : tableau de variations.

5 minutes

B : A votre avis, qu'est-ce qu'il nous faut d'autre ?

E : Les points.

B : On les a déjà.

Benjamin pointe au tableau l'indication : tableau de valeurs.

B : Tu as parlé de quoi tout à l'heure, Aziz ?

A : Il faut avoir des nombres réels.

B : Tous les nombres réels ?

E : Cela dépend si c'est une fonction paire ou...

B : Alors la parité. La parité, c'est intéressant, cela va nous donner les propriétés de symétrie.

Il écrit : parité.

B : Quand on va calculer les valeurs ici, qu'est-ce qu'on va prendre pour valeurs de x ?

E : L'ensemble des réels.

Brouhaha.

B : C'est sûr que c'est l'ensemble des réels ?

E : Les réels positifs.

B : Pourquoi positifs ?

Brouhaha

E : On peut pas savoir, on connaît pas les points.

B : Où est-ce qu'on peut calculer les valeurs d'une fonction ?

E : *Inaudible.*

B : Toutes les fonctions ? Si je vous donne $\frac{1}{x}$ par exemple, on peut la calculer pour toutes les valeurs de x ?

E : Non, pas pour 0.

B : Pour 0 on peut pas la calculer. Alors pour déterminer ça, qu'est-ce qu'on fait ?

E : *Inaudible.*

B : Il faut aussi déterminer l'ensemble de définition. Et bien, faire l'étude d'une fonction, c'est chercher toutes ces choses là mais exactement dans le sens inverse où c'est marqué. On commence par chercher l'ensemble de définition pour savoir où on travaille, ensuite on va chercher la parité, le tableau de variations, le tableau de valeurs et on termine par la courbe. C'est ce qu'on va faire aujourd'hui pour étudier la fonction x^2. OK ? Alors pour ça je vais vous distribuer un plan qui récapitule tout ce qu'on vient de marquer ici. Le plan d'étude d'une fonction. Il y a des vides pour mettre des méthodes : méthodes d'étude des variations, méthode d'étude de la parité. Et puis on établira des remarques aussi au cours de la séance. Ça, c'est une fiche un petit peu comme la fiche que je vous avais distribuée sur les mises en équation. C'est une fiche "méthode". Une sorte de référence qu'on utilise à chaque fois qu'on veut étudier une fonction.

Fin du premier épisode : 8 minutes.

B : Alors on y va. Vous commencez par chercher le domaine de définition de la fonction x^2.

Les élèves cherchent (une minute).

B : Bon, alors l'ensemble de définition de la fonction qui à x associe x^2, à votre avis c'est quoi ? Pour quelles valeurs de x peut-on calculer x^2 ?

E : Tous les réels sauf 0.

B : Alors Aziz nous propose tous les réels sauf 0. C'est-à-dire que pour Aziz on ne peut pas calculer 0^2.

E : Si.

B : 0^2 ça fait 0.

Brouhaha.

E : Ça sert à rien.

B : C'est pas que ça sert à rien. C'est que f(0) égale 0.

Brouhaha.

E : Pour les nombres négatifs, ça sert à rien.

B : Pourquoi ça servirait à rien pour les nombres négatifs ?

E : C'est pareil que pour les positifs.

B : Ça, on va en parler après. Conclusion : où est-ce qu'on peut étudier cette fonction ? L'ensemble de définition...

Brouhaha

E : 0, plus l'infini.

B : Non, non. Pour quels nombres peut-on calculer x^2 ?

E : Pour tous les nombres réels.

E : Moins l'infini, plus l'infini.

B : Et ça, c'est quoi ?

E : L'ensemble de tous les réels.

E : C'est $\mathbb{R}$.

B : C'est $\mathbb{R}$, c'est l'ensemble $\mathbb{R}$. Première étape : recherche de l'ensemble de définition. Bon, n'écrivez pas sur la feuille, parce que ça c'est une feuille méthode. Vous écrivez dans le cours : D_f égale l'ensemble des réels.

Benjamin note au tableau : $D_f = \mathbb{R}$.

B : Ça, c'est la méthode pour trouver l'ensemble de définition. Ici d'abord c'est pas dur. Ce sera la même chose que quand on cherche l'ensemble de validité pour les équations : on cherche les valeurs pour lesquelles on peut pas calculer la fonction. Alors maintenant qu'on sait où est définie cette fonction, on va étudier la parité...

E : Eventuelle.

B : Eventuelle parce qu'on a vu lundi l'exemple d'une fonction qui n'est ni paire ni impaire. Donc étudions la parité de f. Pour ça je vous laisse chercher un peu.

Fin du deuxième épisode : 11 minutes.

Les élèves cherchent et Benjamin circule dans les rangs.

B : Alors rechercher la parité, c'est quoi exactement ?

E : Chercher si elle est paire ou impaire.

B : Savoir si la fonction est paire ou impaire. Alors une fonction paire, définition ?

Brouhaha.

E : Une fonction est paire si et seulement si f(x) est symétrique...

E : f(x) = f(-x)...

B : Alors il faut qu'on regarde si f(-x) = f(x). C'est la seule condition ? Qu'est-ce qui faut d'autre ?

Brouhaha.

B : Il faut que l'ensemble de définition soit symétrique par rapport à 0. Ici est-ce que c'est le cas ? Ben oui, $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0. On l'a vu lundi. Et alors si la fonction est paire, ce sera f(-x) = f(x), et si elle est impaire, ce sera quoi ?

Brouhaha.

B : f(-x)=-f(x). Alors lundi qu'est-ce qu'on a vu ? Qu'est-ce qu'on a fait lundi ?

E : On a choisi –1.

B : Non, on n'a pas fait ça. Ça, c'est ce qui était dans le livre.

E : *Inaudible.*

B : Non, pas lundi. Lundi on a étudié la parité de certaines fonctions. Quelle méthode on a employée ?

E : On a choisi un nombre.

B : Alors on l'a appelé comment, le nombre ?

E : -1.

B : Non.

E : x.

B : On avait pris un nombre x. Où est-ce qu'on l'avait pris ? Il faut le prendre où ?

E : Dans les réels.

B : Dans l'ensemble de définition. Ici c'est l'ensemble des réels. Et puis qu'est-ce qu'on fait avec ce nombre x ?... On calcule...

E : f(-x).

B : f(-x). Et on regarde si on obtient soit f(x), soit -f(x), soit rien du tout. Donc allez-y. Donc on vérifie d'abord que l'ensemble est bien symétrique, ensuite on prend un réel x et on calcule f(-x). Ça, on va l'écrire ici en méthode.

Benjamin utilise un rétroprojecteur et remplit la fiche distribuée aux élèves.

B : La première chose à vérifier, c'est que l'ensemble de définition est bien symétrique par rapport à 0. Et ensuite on prend un réel x qui appartient à l'ensemble de définition, on calcule f(-x). Et suivant ce qu'on obtient, on conclut soit que la fonction est paire, soit qu'elle est impaire, soit qu'elle n'est ni l'une, ni l'autre. Ça, c'est ce qu'on a fait exactement en module lundi. Alors on applique cette méthode à $f(x) = x^2$. Et je vous écoute.

15 minutes.

Au bout de trente secondes de recherche, Benjamin s'approche d'un élève.

B : Là, est-ce que tu as étudié la parité ? Non, tu ne l'as pas fait.

Le voisin : f(-4) = f(4)... On calcule f(-4).

B : Pourquoi tu parles de -4 ?

E : On prend un réel...

B : Si tu prends f(-4), tu vas démontrer quelque chose sur f(-4). Cela ne sera pas une généralité. Nous, on veut quelque chose de général, on veut quelque chose qui soit vrai pour tous les nombres réels x. C'est pour cela que, dans la méthode, on a dit qu'on prenait un nombre x réel dans l'ensemble de définition et on calcule f(-x). C'est exactement ce qu'on a fait lundi.

A toute la classe : Alors ici f(-x), qu'est-ce qu'on obtient ? Comment on fait pour calculer f(-x) ? On l'a dit lundi.

E : On remplace x par -x.

B : On remplace x par -x. A chaque fois qu'on voit apparaître x dans l'expression, on le remplace par -x. Allez-y.

Il circule de nouveau dans les rangs, s'adresse aux élèves mais c'est inaudible.

B *à une élève* : Quand on voit apparaître x, on le remplace par -x. Ici x est élevé au carré, on va élever -x au carré.

Au bout de deux minutes de recherche, Benjamin s'adresse à la classe.

B : Alors la parité. On a dit que, tout d'abord, on vérifie que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. Ici ça a été vérifié que $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. C'est vite fait. Il n'y a pas de problème.

On note : $D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Voilà, première étape. Je vous l'ai dit : si vous tombez sur un ensemble de définition qui n'est pas symétrique, vous pouvez répondre tout de suite à la question. La fonction ne sera pas paire, ni impaire. La deuxième étape : on suit ce qui a été écrit ici. On prend un nombre x dans l'ensemble de définition, on calcule f(-x). Soit x appartenant à D_f, f(-x), il est égal à quoi ? Il est égal à $(-x)^2$.

Il note au tableau : f(-x)= -x.

B : Qu'est-ce que je fais pour mettre au carré ?

E : On met des parenthèses...

B : Où ça ?

E : *Inaudible.*

B : Autour de -x. C'est -x qui est élevé au carré. Ça, on l'a vu lundi. Il y en a qui avaient fait l'erreur : ils écrivaient moins, puis x^2. Ils ne prenaient pas la précaution de mettre des parenthèses et puis évidemment après tout était faux. Alors $(-x)^2$, c'est égal à quoi, ça ?

E : x...

B : C'est pas égal à x...

E : x^2...

20 minutes

B : C'est égal à x^2. Ça aussi on l'a vu lundi : $(-x)^2$... Moins par moins, ça fait plus, donc c'est exactement la même chose que x^2. Pour vous souvenir de ça, vous calculez $(-2)^2$, ça fait 4 et c'est exactement la même chose que 2^2. On peut faire la même chose aussi avec quoi ?

E : *Inaudible.*

B : Non, les valeurs absolues. La valeur absolue de –x, c'est la même chose que la valeur absolue de x. D'accord ? Alors $(-x)^2$, on a dit que c'était la même chose que x^2. Et x^2, c'est quoi ?

E : C'est f(x).

B : C'est f(x). Donc pour n'importe quel nombre x de D_f, je dis bien : pour n'importe quel... Non pas comme certains d'entre vous voulez faire, en prendre un et regarder si ça marche. Non, si ça marche pour un, ça ne marche pas forcément pour les autres. Là on a prouvé que cela marchait pour tous les nombres réels. Pour tous les nombres réels x, f(-x) = f(x). Conclusion : la fonction f est paire. On n'oublie pas la conclusion, la fonction f est paire.

Benjamin note au tableau : la fonction f est paire.

Fin du troisième épisode : 22 minutes.

B : Etape suivante, c'est quoi... Etude des variations. Je vous laisse chercher un petit peu. On en a déjà fait, des études de variations. Donc la méthode, normalement vous devez la connaître, je vous laisse vous en souvenir.

Les élèves cherchent.

B : Ceux qui ne se souviennent plus prennent leur cours. Ils regardent la définition du sens de variation d'une fonction, la méthode est contenue dans la définition.

Les élèves cherchent, Benjamin circule dans les rangs.

B : Qui est-ce qui se souvient de ce qu'on fait pour étudier les variations ?

E : Il faut dire si la fonction est croissante ou décroissante.

B : D'accord. Le but est de déterminer si la fonction est croissante ou décroissante. Pour ça qu'est-ce qu'on fait ?

E : On prend deux réels.

B : On prend deux réels. On les prend comment, ces deux réels ?

E : Ils appartiennent à l'ensemble de définition.

B : Alors évidemment, la première condition est qu'ils appartiennent à l'ensemble de définition. Ensuite comment ils doivent être ?

E : a inférieur ou égal à b.

B : On prend a inférieur ou égal à b. Ensuite qu'est-ce qu'on fait ?

E : Si f(a) inférieur ou égal à f(b) on sait que...

B : Alors pour obtenir f(a) et f(b), qu'est-ce qu'on fait ?

E : On prend...

B : Alors on va manipuler les inégalités en appliquant les règles qu'on connaît : quand on multiplie une inégalité par un nombre positif, cela ne change pas de sens, etc. Ça, c'est toutes les petites règles sur les inégalités que l'on connaît. Pour obtenir à la fin f(a) et f(b), avec un symbole entre les deux, et puis déterminer si elle est croissante ou décroissante. La méthode, on l'écrit.

Benjamin remplit la fiche projetée.

B : On prend deux éléments a et b dans l'ensemble de définition D_f, tels que a soit inférieur ou égal à b, on manipule les inégalités pour déterminer la position de f(a) par rapport à f(b).

25 minutes

Benjamin laisse les élèves copier.

B : Alors dans ce cas précis, qu'est-ce qu'on entend par manipuler l'inégalité ?

E : On met au carré.

B : Ici on met au carré.

B *à un élève* : Tiens, tu viens nous le faire au tableau. La méthode est écrite juste à côté. Tu n'as qu'à la suivre. Première chose. Qu'est-ce qu'on a dit ? Soient a et b deux nombres réels, etc.

E_t : Je l'écris.

B : Oui. Bon, d'abord tu mets un petit tiret et tu dis qu'on cherche le sens de variations. Soit a et b appartenant à D_f... On les prend de quelle manière on a dit ?

E_t : Tels que a soit inférieur ou égal à b.

B : Tels que a soit inférieur ou égal à b. On a dit ici que manipuler les inégalités cela voulait dire élever au carré.

E_t : Je l'écris ?

Il écrit : on élève au carré.

B : Ah ! Ça ce n'était pas la peine de l'écrire.

L'élève écrit $a^2 \leq b^2$.

B : Donc on obtient a^2 inférieur ou égal à b^2...

Un autre élève : Ensuite on sait que $f(a) = a^2$ et $f(b) = b^2$. Donc on obtient $f(a) \leq f(b)$.

B : Hum, hum.

E : Cela veut dire que la fonction est croissante.

B : D'accord. Alors, a et b on les a pris où ça ?

E : Dans l'ensemble de définition.

B : L'ensemble de définition, c'est quoi ?

E : C'est $\mathbb{R}$.

B : C'est $\mathbb{R}$. Donc a et b sont deux nombres réels tout à fait quelconques. Par exemple on va prendre a=-4 et b=-2. On a bien $a \leq b$ parce $-4 \leq -2$. On élève au carré, qu'est-ce qu'on obtient. $(-4)^2$, c'est combien ?

E : 16.

B : $(-2)^2$, c'est combien ?

E : 4.

B : Est-ce que $16 \leq 4$?

E : Non.

B : Pourtant c'est ce qu'on déduit de ce qui est écrit au-dessus.

E : Ouais, il y a pas les parenthèses.

B : Si a est entre parenthèse qu'est-ce que cela fait de plus ?

E : Cela revient au même.

30 minutes

B : Si a est égal à 2 et b=4, on a toujours a ≤ b, cela n'a pas changé. a^2 c'est quoi ? C'est 4. b^2, c'est 16. Ah, cette fois...

E : Cela dépend de l'intervalle.

E : Il faut prendre IR*.

B : IR*, c'est IR privé de 0, je ne pense pas que c'est ça que tu as voulu dire.

E : IR avec un plus.

B : C'est à dire l'ensemble des réels positifs. Ce qui a été fait au tableau marche parfaitement quand a et b sont deux nombres positifs. Par contre, quand ils sont négatifs, qu'est-ce qu'il faut faire ?

E : *Inaudible.*

B : Il faut changer le sens de l'inégalité. Et ça, on l'avait vu dans une activité qu'on avait faite sur les inégalités. Lorsque a et b sont deux réels tels que a ≤ b alors $a^2 \leq b^2$. Dans le cas où ils sont négatifs, on change le signe de l'inégalité. D'accord ? Alors ça, il faut faire attention : quand on cherche le sens de variation d'une fonction, il faut bien faire attention aux règles de calcul sur les inégalités. Parce qu'avec ce qu'on avait fait ici, on en déduisait que la fonction était toujours...

E : Croissante.

B : Croissante, alors qu'il n'en est rien du tout. Donc on va commencer par prendre des nombres qui sont positifs, pour voir ce que cela donne. Et après des nombres négatifs et regarder ce que cela donne. Alors les nombres positifs, Caroline, tu m'as dit qu'ils étaient dans IR^+. On va écrire exactement ce que c'est : l'intervalle [0 ; +∞[. Donc tout ce qui est marqué ici, c'est bon. Pour des nombres positifs, on a bien le droit de faire ça. Maintenant on écrit : soient a et b appartenant à] -∞ ; 0], là on prend des nombres négatifs tels que…

E : a ≥ b…

E : a ≤ b…

B : On va toujours prendre a ≤ b, c'est la conclusion qui va changer…

E : Moins a au carré...

B : Ah non, a, ce n'est pas parce qu'il n'a pas de signe devant qu'il est forcément positif.

E : On va changer le sens…

B : On prend toujours a ≤ b, a et b ce sont des lettres qui désignent un nombre. Cela peut très bien désigner des nombres négatifs. Ici c'est le cas. Et comme on sait que ce sont des nombres négatifs, on peut le dire ici. Bien rappeler que ce sont des nombres négatifs. Et là on prend la précaution : quand on les élève au carré, on change le sens des inégalités. On a : $a^2 \geq b^2$. Ici on avait : f(a) ≤ f(b) La conclusion, c'est quoi ?

E : f est croissante.

B : Où ça ?…Sur l'intervalle [0, +∞ [. Ne pas oublier la conclusion. Ici qu'est-ce qu'on obtient ?

E : f(a) ≥ f(b).

B : f(a) ≥ f(b), donc f décroissante sur] -∞ ; 0]. Bon, vous voyez la fonction comment elle est : décroissante sur

]-∞ ; 0] puis croissante sur [0 ; +∞ [. Si on n'avait pas fait attention aux règles de calcul sur les inégalités, on aurait conclu qu'elle était croissante sur IR en entier, ce qui était faux. Une première remarque donc. Bon, laissez de la place en dessous il y en aura une deuxième.

Benjamin remplit la fiche projetée.

B : Une fonction peut être alternativement croissante et décroissante. Puis de nouveau croissante et décroissante. Ici c'est une fois décroissante, une fois croissante. Cela peut être tout un tas de choses. Cela dépend de la fonction. On a déjà vu de toutes façons dans les tableaux de variations, il y a des flèches qui montent et qui descendent. Le tout c'est de faire attention quand on fait des calculs. Entre parenthèses : il faut faire attention aux règles de calcul sur les inégalités.

35 minutes

B : Alors le tableau de variation, maintenant qu'on a le sens de variation, on va pouvoir le remplir. Elise, s'il te plaît, tu viens faire le tableau de variation ?... Alors x varie entre quoi et quoi ?

E : *Inaudible.*

B : Entre moins l'infini et plus l'infini. Qu'est-ce qu'on va placer ?

E : 0.

B : 0. Parce qu'on a bien vu qu'il se passait quelque chose en 0. Avant 0 il se passe certaines choses et après 0 il s'en passe d'autres. Sur $]-\infty ; 0]$ comment est notre fonction f ?

E : Elle est décroissante.

B : Elle est décroissante, alors qu'est-ce qu'on fait ? Une flèche... Ouais, comme ça. La flèche que tu étais en train de dessiner, c'était la flèche d'une fonction croissante. Elle va atteindre quelle valeur en 0 ? Elle est facile à calculer celle-là.

E : 0.

B : 0. f(0), c'est 0. Et après sur $[0 ; +\infty[$ elle est croissante. La flèche monte. Voilà le tableau de variation. Merci. Bon, là je vois que vous perdez du temps à faire des beaux tableaux comme sur les livres, mais un trait comme ça et un trait comme ça, ça suffit. Donc voilà le tableau de variation. Maintenant qu'est-ce qu'on fait ?

Fin du quatrième épisode : 39 minutes.

E : Un tableau de valeurs.

B : Dans ce tableau de valeurs, qu'est-ce qu'on va bien pouvoir mettre comme valeur de x ?

E : Des valeurs négatives et des valeurs positives.

B : Ouais, pourquoi ça ?

E : Parce qu'on sait que la courbe varie entre moins l'infini et 0 et 0, plus l'infini...

B : D'accord. L'ensemble de définition, c'est $\mathbb{R}$ tout entier, donc il faut considérer l'ensemble de tous les réels. Donnez-moi les valeurs de x pour lesquelles vous voudriez qu'on calcule...

E : -4, -3, -2, -1,0...

B : Alors x, f(x)... Allez, je vous écoute...Première valeur que vous avez envie de calculer...

E : -4

B : -4. Alors f(x) c'est combien ?

E : x^2.

B : Oui x^2. Ça fait combien $(-4)^2$? 16. -3, 9. -2, 4. –1, ça fait 1. 0 ça fait 0. Après ?

E : On reprend.

40 minutes

B : On reprend : 1, 2, 3, 4. Pour 1, ça fait 1. 2... 3... 4... Alors maintenant qu'on a calculé certaines valeurs, on va pouvoir les placer dans un repère. Alors vous aussi tracez un repère. Vous allez prendre toute une page. Et regardez comment j'ai placé mes axes. Comment il est, mon axe des abscisses ?

E : Orthonormal.

B : Non, le repère est orthonormé. Première chose à dire, c'est bien. Mon axe des abscisses, il est où ?

E : Tout en bas.

B : Tout en bas. C'est à dire que si je veux... Ici je ne peux pas mettre de points, je n'ai pas de quadrillage. Est-ce que c'est un problème ?

E : Non.

Brouhaha

B : Voilà, les valeurs de f(x), on va les lire sur l'axe des ordonnées. f(x), il a quelle propriété ? f(x) sera toujours positif. On aura donc tous les points au-dessus de l'axe des abscisses. C'est pour cela qu'on peut se permettre de mettre l'axe tout en bas. Bon, prenez une page entière, mettez l'axe des abscisses tout en bas. Prenez une unité assez grande. Voyez, moi j'ai pris quatre carreaux pour une unité, pour qu'on puisse faire un dessin le plus précis possible. Alors un dessin comme ça on le fait au crayon, parce qu'on fait souvent des erreurs et c'est plus propre au crayon. Ça y est, tout le monde a tracé ses axes. Alors maintenant on va placer les points.

Benjamin place les différents points sur le repère rétro projeté.

B : Premier point, on va placer (0,0). Deuxième point : (-1,1). Le voilà. Ensuite (-2, 4). Ensuite (-3,9). (-4, 16), je ne pourrais pas le placer parce que je ne vais pas jusqu'à 16 sur l'axe des ordonnées. Vous, si vous pouvez, placez-le. Maintenant j'ai d'autres points à placer. Le point (1,1), le point (2,4) et le point (3,9). Quelle remarque on peut faire là-dessus ?

E : C'est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

B : Pourquoi ?

E : Parce que la fonction est paire.

B : La fonction est paire. Ça on l'avait déjà vu. Là on est en train de le vérifier sur le dessin. En fait le dessin est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

45 minutes

E : Ça servait à rien, ce qu'on a fait tout à l'heure. On aurait pu en faire qu'un.

B : Si on se contente de calculer ça, c'est bon ? Comment on fera pour avoir les autres points ? C'est ce qu'on a fait en module lundi : on a fait un morceau de courbe, on savait que la fonction était paire ou impaire et on traçait le symétrique. Alors ça, c'est pareil. Et cela nous fera deux fois moins de travail. Donc le tableau de valeurs, deux fois moins de travail. Le tableau de variation, c'est pareil. Il suffira de connaître les variations sur [0 ; +∞[. Elle est croissante. On calcule les valeurs sur [0 ; +∞[. Et le reste se trace par symétrie. Alors ça, c'est la deuxième remarque qu'on va marquer sur la fiche méthode. La deuxième remarque... Alors ça, on a dit que c'était symétrique par rapport à l'axe des ordonnées parce que la fonction était paire. Quand c'est impaire ?

E : C'est encore symétrique...

B : C'est encore symétrique, mais cette fois par rapport au point O. Donc il y a deux cas : le cas où la fonction est paire et celui où la fonction est impaire, là on a deux fois moins de travail que d'habitude.

Benjamin remplit la fiche-méthode projetée.

B : Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, il suffit d'étudier ses variations et de tracer la courbe sur moitié de l'ensemble de définition. Bon, évidemment ce n'est pas très mathématique mais vous comprenez tous ce que cela veut dire. Ici, la moitié de l'ensemble de définition, c'est quoi ?

E : [0 ; +∞[.

B : [0 ; +∞[. Le reste s'obtiendra par symétrie. On va terminer le tracé de la courbe avant de se quitter. C'est bon, vous y êtes ? Alors maintenant que l'on a certains points de la courbe, il va falloir qu'on les rejoigne entre eux. Comment est-ce qu'on va les joindre, ces points ? Par exemple (0,0) et (1,1)...

E : En faisant un...

B : Pourquoi ?

E : Parce que c'est une courbe, c'est pas une droite.

B : Pourquoi cela ne serait pas une droite ? Cela ne se pourrait pas que ce soit une droite comme ça, puis une droite comme ça ? On n'en a pas vu, des courbes comme ça ?

E : Si, mais c'est des droites affines.

B : C'est des fonctions affines par morceaux. Là elle n'est pas affine par morceaux.

E : *Inaudible.*

B : Bon d'accord ! Elle n'a pas la tête d'une fonction affine. Et qu'est-ce qui te dit que sa courbe représentative n'est pas une droite ?

E : Parce qu'elle est croissante, décroissante.

B : D'accord, c'est pas une fonction affine, on est d'accord.

E : On peut pas dire.

B : On peut pas dire : peut-être qu'elle est comme ça, peut-être qu'elle est comme ça. On ne sait pas. Pour savoir, qu'est-ce qu'on va essayer de faire ?

E : La tracer à la main.

E : On trace une droite et on vérifie si le point appartient...

B : Au moins, avec les variations, on sait qu'elle est croissante. La seule solution pour être le plus précis possible, il faut qu'on ait le plus de points possibles. On ne pourra pas les avoir tous, on en a une infinité. Donc ici on va calculer f(0,25), f(0,5), f(0,75). Pour avoir le plus de points et pour pouvoir constater ce qui se passe. Bon, on n'aura jamais tous les points mais il faut qu'on en ait le maximum.

50 minutes

B : On va reprendre des valeurs : 0,25, 0,5, 0,75. Alors là on prend la calculatrice, je pense que vous ne connaissez pas les carrés par cœur. 0,0625. $0,5^2$, 0,25. $0,75^2$, 0, 5625. Et on place les points. C'est pour cela que je vous ai dit de prendre un repère avec une unité la plus élevée possible. On place ces points. Pour l'autre côté on fait une symétrie. Ensuite, entre 1 et 2, on n'est pas sûr exactement. On va calculer la valeur pour 1,5. $1,5^2$, ça fait combien ? 2,25. On place ce point. Vous cherchez les valeurs pour 1,25 et 1,75, pour avoir le plus de valeurs possibles. Et après on les joint au mieux. C'est là qu'il faut être le plus soigneux possible. Alors vous me terminez le tracé de la courbe pour mardi et vous étudiez la fonction f qui à x associe $\sqrt{x}$.

ANNEXE N°23 : ENTRETIEN DE BILAN DE LA SEANCE VIDEO AVEC BENJAMIN, LE 17/03/2000

AL : Est-ce que cela s'est passé comme tu le pensais ?

B : Ouais, j'ai trouvé que cela allait. Un petit peu pris de cours à la fin. J'ai pas eu le temps de faire exactement ce que je voulais sur la courbe. J'aurais aimé insister un petit peu plus sur le tracé de la courbe. Mais une fois que cela a sonné, on ne peut plus rien en faire, donc... C'est ça qui est un peu dommage. D'un autre côté je ne vois pas où j'aurais pu gagner un peu de temps, je n'ai pas l'impression d'avoir trop traîné quand même. C'est ça qui est un petit peu dommage.

AL : Qu'est-ce que tu pensais faire en plus ?

B : Moi, je pensais vraiment beaucoup plus insister, faire calculer plus de points entre 1 et 2. Faire aussi 1,25 , 1,75 , pour que cela soit plus précis. Et puis vraiment la tracer en entier. Parce que moi, j'ai pas eu le temps de la tracer entièrement.

AL : Tu pensais plus insister aussi sur la forme de la courbe en elle-même ?

B : Je voulais donner le nom de la courbe aussi. J'ai pas pu le faire. Donc ça, je le ferai quand on en reparlera en classe entière, que je vérifierai qu'ils ont bien fait leur courbe. Je la retracerai au tableau et... Pour mettre les choses au point. Et puis ce que j'aime bien quand j'ai fait un truc comme ça, c'est plus ou moins rappeler tout ce qu'on a fait. Ensemble de définition, parité, tableau de variation, tableau de valeurs, la courbe. Montrer tout le cheminement. Voilà, on a fait ça, ça et ça. Toutes les propriétés de la courbe sur un seul tableau, quoi. Faire le point sur tout ce qu'on a fait.

AL : Ça, tu le feras mardi ?

B : Oui. Pour mettre les choses au point : voilà ce qu'on a démontré sur la fonction carré. Parce qu'à mon avis, c'est pas très clair pour eux. A mon avis, la majorité a dû bien comprendre ce qu'on a fait mais, pour après bien remettre les choses en ordre… Faire une sorte de synthèse. C'est ce que j'aurais aimé faire.

AL : Dans quel but referais-tu cette synthèse ?

B : Pour moi, quand on fait une synthèse comme ça, ça leur donne en même temps le plan d'étude de la fonction. Et puis retirer l'essentiel. Il y a eu pas mal de calculs, pas mal de choses. On a revu les règles d'inégalités qui n'ont finalement pas grand-chose à voir avec l'étude d'une fonction. Après, remettre vraiment ce qu'est l'étude d'une fonction. Vraiment ce qu'on a fait.

AL : Institutionnaliser les propriétés qu'ils vont avoir à retenir ?

B : En quelque sorte, oui. C'est plutôt dégager l'essentiel parce que, pour moi, c'est un peu fouillis pour eux. J'ai peur, dans ce genre de chose, que ce qui a été fait au début de l'heure soit plus ou moins oublié. C'est noyé.

AL : En fait, tu veux faire un rappel de ce qui a été fait ?

B : Voilà, c'est ça. Mettre de côté les difficultés qui se sont greffées là-dessus. Dire : voilà la fonction carré, on a démontré ça, ça, ça.

AL : Et ça, tu comptes, toi, le faire ou le faire dire à un élève ? D'habitude tu fais comment ?

B : Aujourd'hui je leur ai dit moi-même. Là, dans la mesure où cela va un peu se décanter d'ici mardi… J'espère qu'ils vont un peu regarder. Là je vais interroger un élève : dis-moi ce que tu peux me dire sur la fonction carré. Mais là, dans un cas comme ça, c'est moi qui fait la synthèse à la fin, à moins d'avoir vraiment cinq minutes et que je puisse dialoguer avec les élèves. Mais s'il reste deux minutes, je prends l'initiative.

AL : C'est-à-dire ?

B : Comme aujourd'hui par exemple. S'il m'était resté cinq minutes, si on avait tout fini...

AL : Ta synthèse, tu préfères la faire à la fin de l'heure ?

B : Voilà. En général, à la fin d'une séance de module, quand j'ai le temps, c'est ce que j'essaie de faire. Je leur dis ce qu'on a fait, pour qu'ils s'en rendent compte. A la limite, pour que, s'ils sortent et qu'on leur demande : qu'est-ce que tu as fait en maths aujourd'hui ? Ben, le prof vient de leur dire, c'est le prof qui leur dit évidemment parce que je pense qu'ils ne peuvent pas faire ça d'eux-mêmes, mais qu'ils sachent dire : aujourd'hui on a fait ça. Là ils vont pouvoir dire : on a étudié la fonction carré mais, à mon avis, le reste est complètement noyé dans la masse.

AL : Tu n'as donc pas eu le temps de finir la courbe et de faire ta synthèse. Est-ce qu'il y a d'autres choses qui se sont passées comme tu t'attendais ou... ?

B : Là, comme ça... A mon avis tout est venu comme il faut. Parce que l'histoire de la symétrie, c'est un élève qui l'a vue. C'est même lui qui a dit : il suffirait de prendre la moitié. J'étais vraiment content qu'il voie ça. Qu'est-ce qu'il y a eu d'autre aussi ? Je m'attendais à l'erreur sur les variations, cela n'a pas loupé. Ouais, non... Il y a un truc... C'est les recherches de parité. Tu vois, on en avait déjà fait lundi. La méthode, on l'avait pas écrite mais on l'a dite, on l'a appliquée, trois fois je crois. On l'avait faite, tout : on prenait un x, etc. Et là quand on dit : on prend x, premier réflexe : je prends x égale 4. Ça, cela m'a étonné, cela je ne m'y attendais pas. Et je ne l'ai pas eu lundi. Lundi j'ai fait un petit peu comme je t'avais dit : bon ils ne voyaient pas comment faire, donc je leur ai demandé de rappeler les définitions de fonction paire et impaire. Et là je les ai écrites au tableau. Et puis je leur ai demandé : qu'est-ce que vous remarquez de commun entre les deux ?

AL : Tu avais déjà donné ces définitions dans le cours ?

B : Oui. Et dans les deux on remarque que l'on a : f(-x) = f(x), et l'autre c'est aussi : f(-x) égale à quelque chose. Donc le point commun, c'est f(-x). Donc on part de f(-x). Ça, j'ai réussi à leur faire dire. Parce qu'on ne sait pas ce qu'on veut montrer finalement, donc leur faire comprendre qu'il faut partir du point commun f(-x). Il y en a qui n'ont pas su me le redire. Vraiment ils sont quasiment partis de zéro sur la parité. Ça, j'ai été un petit peu déçu quand même. Bon, même si je m'y attends un peu, parce que je sais bien qu'ils ne font pas grand-chose entre les séances. Mais là, d'habitude, quand on a vu une méthode, il y a quand même une majorité d'élèves qui arrivent à la ressortir. Mais là elle n'est pas ressortie du tout, pour aucun élève.

AL : Et lundi est-ce que tu les as laissés un peu chercher, comme aujourd'hui ?

B : Je leur ai dit : voilà, on étudie la parité, et je les ai laissés. Mais personne ne fait rien du tout. Donc j'ai attendu deux minutes.

AL : Et quand tu as donné la définition ?

B : Je leur ai demandé le point commun, ils me l'ont trouvé. Et c'est moi qui leur ai dit : on va partir de f(-x). Et puis là après, il y a ceux qui ne savent pas calculer f(-x). Et puis ceux qui y arrivent, qui arrivent à trouver l'expression et qui après sont bloqués dans les calculs. Par exemple ils ont $(-x)^2+1$, ils savent pas trop quoi en faire. Ils ont eu du mal à calculer quand même. Et puis finalement, l'exemple, je l'ai fait au tableau. En les laissant chercher, mais finalement aucun élève n'avait trouvé.

AL : C'est toi qui leur as dit : on va calculer f(-x) ?

B : Oui.

AL : Alors qu'aujourd'hui tu les as laissés faire.

B : Comme on l'avait déjà vu, moi je m'attendais à ce qu'il y en ait un qui me dise : lundi, on a commencé par calculer f(-x). Ce qui n'est pas venu.

AL : Et par rapport à lundi, quand on s'est vu, il y a plusieurs choses qui ressortent, dont tu n'as pas parlé : les difficultés pour calculer f(-x)...

B : Oui, comme j'en avais jamais fait, on n'en a pas parlé. J'y avais pas pensé mais finalement, avec le recul, j'aurais dû m'y attendre. Celle dont j'ai parlé, moins x au carré, c'est moins x, pas de parenthèse, $-x^2$. Donc le moins est sorti. Il y en a une autre aussi : on avait étudié $2x^2$, et quand on l'applique à –x, ça fait $-2x^2$. C'est essentiellement les deux erreurs que j'ai vues.

AL : Quand tu dis qu'ils n'arrivent pas à calculer f(-x), ça veut dire...

B : Non, il y a ceux qui font ça et il y en a qui sont bloqués devant moins x au carré. Ils savent pas.

AL : Ils ne sont pas bloqués devant f(-x) ?

B : Il y en a qui étaient bloqués devant f(-x). D'ailleurs j'ai rappelé aujourd'hui : pour calculer f(-x) on remplace x par -x. J'ai rien trouvé de mieux à leur dire. Et encore aujourd'hui, il y a une élève que j'étais venu voir, elle avait écrit f(-x), elle avait vu que c'était égal à f(x), mais elle disait qu'elle savait pas le faire. Et quand j'ai dit : remplace x par -x, ça bloquait.

AL : Sur les fonctions, est-ce que tu as fait des exercices du genre : calculer f(1), f(2)... quand on a une expression ?

B : Oui : calcul d'images et d'antécédents.

AL : Ça, tu l'avais fait. Tu avais déjà vu que x, on pouvait le remplacer par n'importe quel nombre ?

B : C'est pour cela que je leur ai demandé aujourd'hui : comment on ferait pour calculer f(1) ? Ils me répondent tous en cœur : on remplace x par 1. Comment on fait pour calculer f(-x) : on remplace x par -x. Ça, c'est le truc que je leur ai donné : pour calculer f d'une valeur, dès que l'on voit x on remplace x par cette valeur. Ça, ça a bien marché dans les exercices. Bon, il y a eu des problèmes d'images et d'antécédents pour certains, c'est normal c'est le vocabulaire. Mais sinon ça... C'est comme ça que je leur ai dit. Visiblement cela a bien marché.

AL : Une autre difficulté classique : étudier la parité pour –4 ; ça, c'est classique aussi.

B : Alors ça, dans le bouquin, il y a un exercice qui est corrigé, c'est une fonction qui n'est ni paire ni impaire, cela doit être $2x^2$-x. Cet exercice est corrigé dans le livre et eux, pour prouver qu'elle n'est ni paire ni impaire, ils calculent f(-1). Et ça, pour eux, c'est le piège, parce qu'ils ne font pas la différence entre le contre-exemple et la généralisation. Moi, quand j'ai corrigé, j'ai fait ma méthode à moi : j'ai calculé f(-x), et on constate que cela ne fait ni f(x) ni -f(x). Si on leur donne une valeur, il y en a qui vont l'utiliser pour montrer que c'est pair ou impair. Il y en a un qui me l'a dit, quand j'ai demandé : comment on a fait l'autre jour ? Il a répondu : on a calculé f(-1). C'est pas du tout ce qu'on a fait. C'est pas vrai, j'en ai même pas parlé du tout. Mais ils ont été regarder dans le bouquin et c'est plus facile de calculer f(-1) que f(-x) pour eux.

AL : Ça, c'est encore un autre problème, c'est comment ils prouvent quelque chose par l'algèbre. Tu as travaillé sur des choses comme ça ?

B : Pas beaucoup, non. J'ai été confronté à ce problème-là au début de l'année pour prouver une égalité par exemple, ils t'en prennent deux et ça y est, quoi. Bon, j'en ai fait un petit peu mais sans insister beaucoup là-dessus.

AL : La généralisation en passant par un exemple, c'est l'erreur classique. Même pour la croissance il y en a qui le font parfois. Ils prennent sur deux exemples et ils concluent.

B : Donc ils généralisent, quoi. Mais ça, je trouve que c'est vraiment difficile à leur faire comprendre que traiter sur des exemples comme ça, ça ne généralise pas. Je ne vois vraiment pas comment on peut leur démonter ça. A moins de donner un contre-exemple, c'est vrai. Mais euh... Ça, c'est tout ce qui me pose vraiment problème.

AL : Quand tu leur as fait étudier la croissance, tu as pris des nombres pour leur montrer que leurs règles sur les inégalités étaient fausses. Tu aurais pu aussi prendre des exemples pour leur montrer que prendre des exemples pour montrer la croissance ne suffit pas.

B : Là c'est vrai, d'accord.

AL : Et là, toi tu les as pris juste dans l'intervalle qu'il fallait. Moi, j'en aurais pris un négatif et un positif. Et même, tu aurais pu leur demander des exemples et leur demander ce qu'ils en pensent. Sur des situations de recherche, comme ça, tu peux faire ressortir des conceptions auxquelles tu ne t'attends pas forcément. Et c'est vrai que la généralisation en algèbre pose des problèmes, surtout au niveau des fonctions. Jusque maintenant ils n'ont pas tellement utilisé l'algèbre pour prouver des choses.
Sinon, effectivement il y a des difficultés liées à la manipulation. Et le problème de signe avec la lettre, qui est encore apparu avec le a...

B : Ça, je ne pensais pas qu'ils allaient me le dire là, tu vois. Parce que ça, j'en ai déjà eu, des trucs comme ça. J'y suis revenu encore il y a pas longtemps avec des valeurs absolues. Mais là, tu vois, tu leur donnes a, il est négatif, ah ben, c'est -a inférieur à -b. Je ne pensais pas qu'ils allaient me le sortir, là. Là je ne m'attendais pas du tout à ça.

AL : Sinon, dans ce que tu as fait, est-ce qu'il y a des choses qui te semblent avoir moins bien marché que ce que tu avais prévu ?

B : Alors... Moi, je me rappelle que ce qui m'a déçu, c'était la parité. Vu comme on l'avait fait, je pensais que cela irait mieux que ça. Au vu de ce qu'on a fait lundi, je pensais que cela irait. Sinon les variations c'est exactement ce à quoi je m'attendais. Ils ont bien réagi sur la symétrie, pas de problème. Et puis j'étais bien content quand je leur ai demandé ce qu'ils entendaient par étude de fonctions, ils ont dit exactement ce qu'on faisait et vraiment dans le sens... Bon, c'est pareil, ce que j'aurais bien aimé, c'est montrer le lien plus précisément entre les deux : d'abord l'ensemble de définition, pour savoir où est-ce qu'on calcule... Bon, je ne pouvais pas donner la justification de la parité à ce moment-là, parce que je n'avais pas encore dit que cela nous permettait de travailler sur une moitié d'intervalle, c'est dommage aussi. Donc ça, peut-être qu'il faudrait que j'en parle plus tard. Qu'on commence par la parité, pour pouvoir partager l'intervalle en deux.

AL : Mais là ils n'auraient peut-être pas compris au début, tandis que là ils ont vu.

B : Oui, bien sûr ils ne voient pas. Mais sur le dessin ils voient qu'il y a vraiment une symétrie.

AL : Donc, si après tu fais étudier une autre fonction paire, tu pourras dire : elle est paire, donc qu'est-ce qu'on peut en déduire ?

B : J'ai pensé que cela serait pas mal de consacrer une séance complète où ils font l'étude en vrac, ce que je t'ai dit tout à l'heure. Là on regarde ce qu'il faut faire, et seulement à la fin faire la synthèse.

AL : En fait ce que toi, tu as fait très rapidement au début, les faire chercher sur ça et après remettre tout dans l'ordre. C'est ça que tu veux dire ?

B : Oui. Suivre en fait l'idée des élèves. Tu vois, faire un peu ce qu'on avait dit au début, ouais, on va commencer par quoi, etc. Et puis à la fin construire la fiche ensemble. Mais bon, ça fait perdre deux heures. Parce qu'après il faut quand même qu'ils aient l'étude de x^2, entre guillemets, propre. Il faut la remettre en ordre après. Et puis on perd du temps encore après.

AL : A la limite tu peux faire un poly.

B : C'est vrai.

AL : Si tu veux qu'ils retiennent toutes les propriétés, cela te fait gagner du temps et ils n'ont pas besoin de réécrire en cours.

B : Après c'est du recoupage, on remet en ordre.

AL : Et où est-ce que tu peux réinvestir la parité ? Avec la racine tu vas voir que non...

B : Avec $\frac{1}{x}$. x^3, je leur ferai en DS. Les questions seront détaillées.

AL : Et qu'est-ce qui te semble avoir bien marché ?

B : Le début, je trouve qu'ils ont bien réagi. Et puis la parité, la symétrie, tout ça. Vraiment bien. Oui, t'as vu la différence entre une droite et une courbe ? Une droite, c'est pas une courbe. C'est pareil, c'est pas une fonction affine, donc c'est pas une droite. Même si je leur ai dit que la courbe représentative d'une fonction affine c'était une droite. Pour eux implicitement, il y a vraiment équivalence. Même si on ne l'a pas dit, on ne l'a pas montré, pour eux droite égale affine. Ce qui est vrai mais ça, il n'y a pas de problèmes : il y en a qui voient x^2, ils te disent que c'est pas une droite.

AL : Tu as déjà fait les équations de droites ?

B : Oui, c'est déjà fait.

AL : Le problème "courbe" et "droite", c'est aussi un problème de français.

B : Oui, c'est ça une courbe, ce n'est pas quelque chose de droit.

AL : D'accord, est-ce que tu as changé des choses par rapport au scénario prévu ?

B : Je ne crois pas, non... Non je ne crois pas.

AL : Je n'ai pas l'impression non plus. Est-ce que tu as rencontré des difficultés pendant cette séance ?

B : ... Ce qui m'a le plus gêné c'est : on prend a et b négatif, donc on prend -a inférieur à -b. Là, comme je ne m'y attendais pas du tout, j'ai préféré passer dessus pour dire : non, attention ! Leur dire que c'est valeur absolue, parce que ça fait tilt, on en déjà tellement parlé que... Puis bon, essayer de passer dessus en leur disant que a peut être négatif. Sinon le reste, je pense que cela a été.

AL : Même le -4, cela ne t'a pas... ?

B : Bon, je ne m'y attendais pas plus que ça, mais cela ne m'a pas... Cela ne m'a pas tellement désarçonné quoi. J'ai dit : ben non, tu ne peux pas généraliser avec un seul exemple, etc. Cela m'a moins gêné quand même, même si je ne m'y attendais pas non plus.

AL : Et si c'était à refaire, qu'est-ce que tu ferais ?

B : Comme je t'ai dit, peut-être que je prendrais l'étude en vrac, en suivant les idées des élèves. Qu'est-ce que vous voulez faire là ? Là, faire vraiment le lien entre les différentes étapes, pourquoi on fait ça ? Ce que tu m'avais dit lundi. Ce que j'ai fait très vite, quoi. Mais là, vraiment qu'eux le fassent, qu'ils construisent eux-mêmes l'étude de la fonction. Et puis à la fin essayer de trouver un lien logique entre tout ça, et puis établir l'étude. Et pour la parité, ne pas leur dire... Parce que, tu vois, j'ai été obligé de leur dire : il y a pas autre chose qu'on a vu. Ben si, la parité. Cela arrive plus ou moins comme un cheveu sur la soupe. Alors que si on fait l'étude sans la parité, là tu as vu comme il a réagi, il aurait dit : oh ! Ben, c'est symétrique. Ben, à ton avis, qu'est-ce qu'on aurait pu faire ? Je trouve que c'est mieux.

AL : Est-ce que ça, c'est quelque chose que tu fais d'habitude ?

B : Non en général... Bon, des séances comme ça, j'en fais pas souvent quand même parce que là, je crois que... Des situations comme ça, j'en ai fait pour les résolutions de problèmes. Il y a déjà pas mal de temps.

AL : Qu'est-ce que tu appelles des situations comme ça ?

B : Ben, une situation où le but de la séance est d'avoir une méthode, en fait. Construire quelque chose qu'on va réinvestir à un moment ou un autre. Parce que d'habitude, en module c'est de l'application. C'est vrai qu'on voit des méthodes mais c'est quand même moins... Bon, l'étude d'une fonction c'est quelque chose qui est quand même lourd. C'est comme la résolution de problèmes, cela revient souvent. Il y a beaucoup d'occasions qui se prêtent à ça. Parce qu'en module, en général, cela dépend des fois. Des fois je donne une feuille d'exercices et puis ils cherchent et puis on corrige un petit peu comme ça. Des fois, quand on est un peu pressé par le temps, les exercices, on les fait un peu plus ensemble avec la classe, avec un élève au tableau. Cela dépend des fois.

AL : Et par rapport à l'algèbre, est-ce que cette séance t'a appris des choses ? Ou est-ce qu'elle t'a confirmé des choses ?

B : Pas tellement celle-là, mais celle de lundi, mais que j'aurais pu rencontrer aujourd'hui, c'était pour la parité, les histoires de parenthèses. Cela a confirmé qu'il y a toujours un problème avec les parenthèses : moins x au carré. Ça, ils se trompent souvent là-dessus. C'est une confirmation parce que ça, je le vois depuis le début de l'année. Et pourtant à chaque fois j'insiste : mettez les parenthèses, etc. Ben la découverte de f(-4). Même si je ne découvre pas qu'ils généralisent à partir d'un exemple, mais la découverte de cette erreur-là dans ce cadre-là précisément... Aussi le travail sur les inégalités, même s'ils n'y ont pas pensé a priori, dès qu'on pointe le problème cela vient tout de suite. Ils sont quand même familiarisés avec ça finalement. Même si le problème, ils ne le voient pas eux-mêmes, ce qui se comprend.

AL : Avec la courbe de x^2, ils peuvent retenir les inégalités. Cela ne le démontre pas, mais...

B : Ils peuvent avoir la représentation dans la tête, c'est vrai.

AL : Cela peut aider. Tu parlais d'étudier des fonctions associées. Et là tu peux revenir sur une de leurs difficultés : retenir qu'une équation du second degré a deux racines. Là tu montres que la parabole coupe l'axe en deux points.

B : Oui. Là ils ont un moyen de... En se rappelant de la courbe c'est vrai que...

AL : Après cette étude, tu peux revenir sur des choses que vous avez déjà vues et les remettre en ordre.

B : Oui, c'est vrai.

AL : Bon, je pense qu'on a tout dit, on se reverra quand j'aurai analysé.

B : On pourra parler de ce que j'aurai vu dans l'autre groupe. En général je vois les mêmes choses.

ANNEXE N °24 : VISIONNEMENT DE LA BANDE VIDEO AVEC BENJAMIN, LE 19/06/2000

Premier épisode :

B : Je suis frappé par le coup de l'ensemble de définition qui est vraiment difficile à venir. Je me souvenais pas que cela avait été aussi dur que ça. J'ai l'impression de m'y être vraiment mal pris. Et puis il y a un truc qui est frappant : quand on leur demande où on prend les valeurs, la première réponse est IR et quand on leur dit "vous êtes sûrs ? ", après c'est réels positifs. C'est systématique. Et là sur la fonction carré, quand on leur demande pourquoi, et ben : x^2 c'est toujours positif. Je l'ai eu plusieurs fois ou avec racine, des choses comme ça. En fait c'est l'image qui est positive.
Sinon, moi, ça m'avait bien plu déjà dans la séance, cela vient assez vite, le tableau de valeurs. Les variations, je trouve qu'ils le sentent pas mal, même si mon exemple n'est pas génial : en fait j'aurais dû faire une courbe en cloche vers le haut et une vers le bas. Parce que mon exemple de fonction croissante, c'est une droite et je m'empresse de dire : elle peut être croissante sans que ce soit forcément une droite. Je suis un peu coincé avec ce que je dis. Là il suffisait de deux exemples bien choisis.
Sinon je trouve que je passe très vite sur l'ordre des différentes étapes. Pour abréger, à la fin je dis : bon.. Ben... On les fait dans l'autre sens, et puis ça y est. C'est dommage parce qu'en ayant les cinq étapes j'aurais pu leur demander : à votre avis, on commence par faire quoi ? On en avait parlé avant mais je ne l'avais pas prévu dans ma séance, je l'avais ajouté ça. Cela aurait été pas mal de leur faire dire eux-mêmes, par déduction. Là c'est frappant que cela va beaucoup trop vite.
AL : Comment expliques-tu que tu es allé si vite ?

B : Parce que j'avais peur d'être pris par le temps. Ça, je l'avais déjà rajouté. Je l'ai fait parce que j'avais trouvé ça intéressant. Et puis on passe pas mal de temps finalement. Il y a quand même sept minutes là-dessus alors que je n'avais pas prévu au départ. Donc je me suis sans doute dit qu'il allait falloir abréger, et c'est vraiment dommage.

AL : Et dans l'autre groupe, tu as fait pareil ?

B : J'ai fait exactement pareil, mais je crois que cela a été beaucoup plus laborieux pour leur faire trouver les différentes étapes. Cela ne s'est vraiment pas passé de la même manière. Il faudra regarder dans le cahier de bord pour voir ce que j'ai marqué.

Deuxième épisode :

B : Ce que j'avais dit, quand on leur demande : pour quelles valeurs de x peut-on calculer x^2 ? La réponse qui fuse tout de suite, c'est : tous les réels sauf 0. Et ça encore les derniers cours, c'est à chaque fois. Dès qu'il y a un ensemble de définition, on commence par IR et après c'est tous les réels sauf 0 ou alors les positifs. Quand ils voient x^2, cela fait tilt : carré positif. Et quand il y a autre chose : oh il doit bien y avoir 0 qui dégage quelque part. Là quand ils disent : l'ensemble de définition c'est $[0 ; +\infty[$, je dis non et je repose la question. Alors c'est peut-être dommage d'être trop directif. Non c'est pas ça, c'est autre chose. Cela les incite à dire n'importe quoi jusqu'à ce qu'ils donnent la bonne réponse. Mais d'un autre côté, si je leur dis : calculez $(-2)^2$, est-ce que vous pouvez le faire ? Et ben là ça fait tilt tout de suite, ça c'est des choses vraiment pas évidentes.

AL : Qu'est-ce que tu pourrais faire d'autre ?

B : ... Non je vois pas. C'est le genre de choses où la réponse est donnée dans la question. C'est dommage parce que c'est le genre d'erreurs qu'ils font tellement souvent que cela serait bien qu'il y ait un truc qui les frappe.

AL : Mais est-ce que tu ne peux pas avoir une autre technique ?

B : Leur demander de choisir un nombre au hasard et de l'élever au carré. Mais je suis sûr que les seize qui sont là vont choisir un nombre positif... Ou alors ne pas dire tout de suite non et demander : pourquoi $[0 ; +\infty[$? Demander la justification de ça. Et là, normalement ils se rendent compte.

AL : Oui là tu n'induis pas toi-même la réponse.

B : Quand je leur dis qu'on va étudier la parité, c'est un élève qui souffle : "éventuelle". Ça, cela arrive assez fréquemment parce que, quand j'introduis la notion, j'insiste vraiment sur le mot "parité éventuelle". J'ai l'impression que c'est le genre de chose qui frappe les élèves, cela les fait plus ou moins sourire. Et dans un cas comme ça, j'ai l'impression qu'ils me reprennent par jeu et finalement c'est bien parce que c'est plus correct de dire "parité éventuelle" que "parité". Et j'ai déjà constaté ça plusieurs fois dans l'année. C'est une sorte de tic qu'ils ont. J'ai l'impression que je leur ai donné le tic : quand on dit parité, on le fait suivre d'éventuelle.

Ouais "une fonction est paire si et seulement si f(x) est symétrique", alors ça une fonction est symétrique ou la courbe est paire. Ça je l'ai eu beaucoup.

Ce qui est frappant aussi c'est que je suis tout le temps en train de dire : rappelez-vous ce qu'on a fait lundi, rappelez-vous ce qu'on a fait tel jour. Et je suis toujours obligé de faire ça, parce que si je ne fais pas appel à leur mémoire comme ça, il n'y a rien qui vient. Ils attendent parce qu'ils n'apprennent pas très bien leur cours, ils ne regardent pas très bien les exercices. Donc en essayant de les faire se souvenir en général ça marche. Là c'est vraiment frappant.

AL : Déjà au début...

B : Oui et ça c'est ce que je t'avais dit quand je commence une séance j'essaie de raccrocher à ce qu'on a fait le cours d'avant.

Là quand je dis : on n'a pas fait ça, on en avait déjà parlé. Il y a quand même un élève qui dit qu'on prend -1. Moi cela m'avait frappé de trouver ça dans le livre. D'accord c'est un contre-exemple mais les élèves dans une classe comme ça, la notion de contre-exemple est loin d'être acquise. Et ça je l'ai traîné jusque très tard dans l'année. Tu me l'avais dit d'ailleurs. C'est une erreur à laquelle je ne m'attendais pas trop. C'est vrai que pour la recherche de parité il y en a qui prennent un exemple et qui regardent. Ça c'est pas évident de leur faire comprendre que c'est pas bon. Là j'essaie de m'en sortir en disant : tu montres un truc sur -4 mais tu ne généralises pas. C'est quelque chose qu'ils n'ont pas, la généralisation. Pour eux x c'est pas général, c'est un nombre, il faut toujours qu'ils se raccrochent à quelque chose. C'est pas évident à faire sentir.

AL : Tu t'en étais rendu compte avant qu'ils avaient du mal à généraliser ?

B : Non c'est là surtout. Avant les manipulations algébriques qu'on avait faites, c'était développements, factorisations. C'est surtout là... Pour l'étude des variations aussi : on prend deux nombres a et b dans l'ensemble de définition tels que a<b, alors on prend 2 et 4. Alors que ça c'était pas vraiment apparu dans les chapitres qu'on avait traités auparavant. Il faudrait que je les reprenne un par un mais je ne crois pas que c'était apparu comme ça. Si peut-être le coup de la valeur absolue : -x peut être un nombre positif. Ils n'arrivent pas à voir ce que x peut être.

Troisième épisode :

B : Pour le "on calcule f(-4)", il y a peut-être un truc qui serait pas mal, cela serait de leur donner un contre-exemple, que si on montre quelque chose sur un seul exemple cela ne marche pas toujours. Par exemple si tu leur dis que 1^2 ça fait 1, donc on en déduit que pour tout x, x^2 égale x. Cela pourrait être pas mal pour leur montrer qu'il n'y a aucune généralisation avec ce qu'ils font. Sinon une grosse difficulté que j'ai vue beaucoup : quand on met -x au carré avec le coup des parenthèses. Là j'ai essayé de leur faire deviner, mais là c'est gros comme une maison : si je leur demande "qu'est-ce qu'il faut que je mette ? ", ils me répondent tous "des parenthèses". Alors qu'il y en a la moitié qui ne le font pas. Ça c'est vraiment un gros problème. C'est pour cela que j'essaie de leur dire : dès que vous voyez apparaître x il faut le remplacer par -x. Mais remplacer c'est clair et c'est pas clair en même temps. C'est pas évident.

AL : Quand tu as commencé les fonctions et que tu as fait des substitutions, pour calculer f(1), f(2), est-ce que tu l'as fait aussi avec des lettres ?

B : Non je crois que je n'en ai fait qu'avec des nombres. Tu penses qu'en faisant avec des lettres cela aurait pu ?

AL : En fait remplacer x par -x, tu ne l'as fait qu'au niveau de la parité ?

B : Oui. Parce que quand je leur demandais de calculer f(-1), il y en a beaucoup qui t'écrivent -1^2 sans parenthèses, comme ils font avec -x.

AL : Et ils disent que c'est égal à quoi -1^2 ?

B : Il y en a beaucoup qui à la ligne d'après disent que ça fait 1. Pour eux dans leur tête c'est clair. Mais s'ils écrivent ça et qu'ils y reviennent au bout de cinq minutes, ils écrivent -1, je pense. Parce que dans leur tête ils savent ce qu'ils sont en train de faire, mais c'est mal formalisé. Et alors après je me contredis pas mal : quand je leur dis que pour se souvenir que x^2 égale $(-x)^2$, je leur dis de calculer $(-2)^2$. Je suis en train de prendre un exemple et de généraliser en quelque sorte. Et je leur redis en dessous : il ne faut surtout pas généraliser... Enfin ça je l'avais montré proprement à la séance de modules d'avant : on avait montré que $(-x)^2$ ça faisait x^2. Et ça ils n'ont pas réussi à le voir. Je pensais qu'il y aurait pas mal d'élèves qui auraient dit ça fait x^2, mais il a fallu qu'on décompose $(-x)^2$, c'est -x multiplié par -x, moins par moins ça fait plus, donc on obtient x^2. C'était assez laborieux.

AL : Les substitutions avec des lettres comme ça, ils n'en ont sûrement pas fait beaucoup au collège.

B : J'avais remarqué dès le début de l'année qu'ils avaient beaucoup de mal en calcul littéral. Je leur avais donné des fractions à mettre au même dénominateur. Avec des nombres, cela va impeccable, alors qu'avec des lettres c'est la pataugе même sur des choses très simples du type $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Je ne sais pas si c'est sur le même plan mais ils avaient beaucoup de mal sur le calcul littéral. D'ailleurs la plupart ont toujours du mal.

Quatrième épisode :

B : Quand je leur demande "qu'est-ce qu'on fait pour étudier les variations ? ", la réponse c'est pas la méthode, c'est en gros la définition de la variation. Bon ça je l'ai constaté aussi, quand on leur demande : qu'est-ce qu'on fait pour étudier la parité, on regarde si f est paire ou impaire. C'est plutôt la conclusion qu'ils donnent plutôt que la méthode. En plus là c'était le tout début donc la méthode n'était pas encore acquise, mais ils commencent par te donner la conclusion. Ils disent ce qu'ils veulent faire mais pas comment.

Là le problème du signe avec a^2 et b^2... Alors ça je m'y attendais mais là on voit qu'ils rament vraiment. J'ai réussi à leur faire comprendre que cela n'allait pas se passer pareil pour les négatifs. Quand on dit que l'on prend a et b deux réels négatifs tels que... Il y en a un qui veut mettre $-a<-b$. Il faut absolument qu'ils aient un signe moins. Et puis un truc qui est frappant aussi : on les prend négatifs donc on change le sens de l'inégalité. C'est la première chose qu'ils proposent : $a>b$. Là c'est vraiment le réflexe : négatifs donc l'inégalité change de sens. Ça je n'y aurais jamais pensé. Là c'est un détail : au tableau j'essaie de lui faire faire une rédaction type. J'essaie de faire ça pour chaque exercice, mais alors ils ont un mal fou à recracher quelque chose de correct. Là je ne vois pas comment faire à part leur faire faire des pages et des pages de rédaction, ce qui est complètement stupide. Mais ils ont du mal à se mettre en tête une rédaction correcte, pourtant je leur en fais mettre le minimum. Pour les tableaux de signes, par exemple, on veut connaître le signe de $3x+2$, je leur avais dit on écrit : on cherche les valeurs de x pour lesquelles $3x+2>0$ et on fait les calculs. Et bien non ils commencent tous par $3x+2>0$ et ils calculent. Alors que j'aimerais bien qu'ils m'expliquent ce qu'ils font. Moi j'ai l'impression que c'est pas clair dans leur tête. Pour les variations j'essaie de leur dire : on recherche les variations, on prend a et b tels que $a<b$, enfin ça ils le mettent parce que cela fait plus ou moins partie de ce qu'ils retiennent pour la démonstration, mais tout ce qui pour eux sont des fioritures, ça c'est...

AL : Quel genre de fioritures ?

B : Expliquer ce qu'on fait... Ce que je viens de te dire le signe de $3x+2$. Pour montrer qu'ils ont bien compris les différentes étapes.

AL : Par exemple, on prend a et b et on va comparer f(a) et f(b) ?

B : Non ça je n'exige pas... Je voulais t'en parler après : je n'aime pas ce que j'ai fait pour l'étude des variations. Cela me pose un vrai problème. Déjà je leur ai pas parlé de l'étude des variations par l'étude de la différence. Ils ont vraiment de grosses difficultés sur les inégalités. Quand on avait commencé le chapitre, on avait justement fait une activité pour montrer que si $0<a<b$, $a^2<b^2$. On était passé par la différence, cela avait été une véritable catastrophe. J'avais l'impression qu'ils ne comprenaient rien. Donc je m'étais dit que si j'ajoutais encore : $f(a)<f(b)$ est équivalent à $f(a)-f(b)<0$, je me suis dit qu'ils allaient être complètement paumés. Bon surtout que cela implique des manipulations algébriques encore différentes. Donc j'ai pris le parti de ne pas le faire. D'un autre côté quand je dis : on prend $a<b$, on manipule les inégalités pour comparer f(a) et f(b), j'ai conscience que c'est pas génial. C'est pas beau. Je n'ai pas voulu tellement insister là-dessus parce que l'année prochaine on leur dira : vous dérivez, paf vous avez le signe et vous avez les variations. Je trouve ça un petit peu... Pas inutile parce que cela les fait travailler un petit peu sur les inégalités. Mais bon on passe des heures pour pas grand-chose finalement. Je pense qu'il y a des choses plus intéressantes à leur faire faire. C'est un point qui m'a gêné.

AL : Qu'est-ce qui ne te plaît pas : la phrase que tu leur as fait écrire ou la méthode choisie ?

B : Bon la phrase, elle découle de la méthode. Je pense que ce serait plutôt la méthode qui serait en cause. Mais quand tu as une fonction affine, on en a fait pas mal, c'est bête de faire la différence. Les manipulations se font bien. Mais pour eux la phrase "faire des manipulations sur les inégalités ne veut pas dire grand-chose". D'ailleurs je leur dis : qu'est-ce que ça veut dire manipuler ? C'est pareil ça c'est une phrase qui a dû les frapper. Ils l'ont retenue, et je n'ai pas l'impression que c'est très clair pour eux, surtout que les manipulations sont différentes suivant les fonctions. Peut-être que je me serais moins compliqué la vie si j'avais étudié le signe de la différence.

Mais là je pense que le problème se serait situé au niveau du retour : signe de la différence donne l'inégalité. Je pense que là j'aurais eu de grosses difficultés avec eux.

AL : Il y a une autre difficulté avec cette méthode, c'est la factorisation.

B : Voilà. D'un autre côté est-ce que c'est pas mieux de les faire travailler sur la factorisation plutôt que des manipulations d'inégalités ?

AL : Est-ce qu'avec ta méthode il n'y a que des manipulations d'inégalités ?

B : Sur les exemples qu'on a traités, oui je crois.

AL : Il y a autre chose même sur des exemples simples...

B : Peut-être la décomposition des fonctions. Ça j'ai essayé de leur faire... Bon il y en a qui ont du mal à faire ça... Ce que j'essayais de leur dire c'est : imagine que tu prends un nombre quelconque, tu veux le faire à la calculatrice, comment tu fais ? Tu fais pareil pour l'inégalité. La première séance d'aide individualisée était là-dessus, je m'étais inspiré d'une feuille de Régis, j'avais trouvé ça pas mal. C'est vrai que ça leur fait décomposer la fonction. Comprendre ce qui se passe derrière la fonction. Ouais c'est vrai. Alors que quand on fait la différence, ils ne le voient pas ça. Disons que j'ai l'impression que la méthode avec la différence a l'air plus claire : ils ont quelque chose de plus précis, on calcule f(a)-f(b). C'est plus précis et plus clair que : on va manipuler l'inégalité a<b.

AL : J'ai l'impression que c'est ta phrase "on manipule..." qui ne te semble pas claire.

B : Cela veut tout dire et rien dire en fait. J'ai l'impression que pour eux la phrase n'a pas de sens.

AL : J'ai l'impression que ce qui te gêne c'est le fait que tu n'as pas réussi à faire écrire comment on fait.

B : Peut-être. Mais tu vois si j'avais à le refaire, je ne sais vraiment pas comment je le ferais. Disons qu'ils arrivaient plus ou moins à s'en sortir mas c'était plus ou moins de la sorcellerie quand même. Surtout que cette méthode implique, surtout dans une classe comme ça, que l'on donne l'ensemble sur lequel on va faire les manipulations. Si on leur demande de but en blanc, d'ailleurs c'est ce que j'ai fait, les variations de x^2 sur IR, ils se plantent tous. Alors qu'avec de la méthode de différence, le signe vient de la factorisation. Ils peuvent peut-être plus facilement déduire l'intervalle.

AL : Ce n'est pas sûr. Si tu prends $(x-5)^2$, si tu regardes f(a)-f(b), tu factorises, cela te fait (a+b-10)(a-b), comment est-ce qu'ils voient apparaître l'intervalle ?

B : Non, non ça ne se voit pas. Ouais.

AL : Avec la méthode de la différence, ce qui pose surtout problème c'est la factorisation.

B : Surtout qu'il y a deux lettres. La méthode que j'ai choisie est celle qui m'a semblé la plus naturelle au départ. Quand tu regardes la définition du sens de variations que je leur ai donnée : une fonction est croissante si quand on prend a<b, on a f(a)<f(b). D'ailleurs je leur dis à un moment : prenez la définition, la méthode est contenue dans la définition. C'est l'avantage aussi quand ils connaissent leurs définitions : tu pars de quelque chose et tu sais où tu dois arriver. C'est pour cela que j'ai préféré, j'ai trouvé cela plus clair pour eux.

AL : J'y vois aussi l'intérêt de la décomposition des fonctions.

B : Oui c'est vrai que j'ai pas mal insisté là-dessus surtout en aide individualisée. En module, tu n'as pas le temps. J'ai fait vraiment attention à ne pas donner des fonctions trop compliquées parce que c'est vrai que tu peux arriver sur des trucs infaisables. Mais l'année prochaine la méthode ils l'auront oublié.

AL : Oui mais il y a des choses qu'ils auront apprises...

B : Oui, oui. Parce que tu sais l'année dernière dans une leçon de CAPES avec toi on avait vu l'étude des variations d'une fonction en classe de seconde. Et mon premier réflexe avait été de penser que c'était pas possible en classe de seconde. Je ne me souvenais plus du tout qu'on pouvait étudier les variations par une différence. Alors qu'est-ce que j'avais noté d'autre ? Ouais l'exemple pour les négatifs, quand on élève au carré. Ce qui aurait peut-être été pas mal, mais cela aurait pris du temps, c'est vraiment continuer l'étude. Passer là-dessus, laisser dire que la fonction est croissante. Et puis se rendre compte que cela coince finalement quelque part, quand on trace la courbe. Plutôt que prendre un exemple. Mais en fait cela m'étonne qu'aucun élève ne m'ait fait la remarque : je leur dis ne prenez jamais un exemple pour montrer quelque chose et puis là c'est ce que je fais, même si moi je sais que c'est un contre-exemple. Moi je suis certain que sur les trente-trois il n'y en a pas un qui a compris la notion de contre-exemple. Et cela m'étonne qu'il y en ait pas un qui m'ait dit : vous prenez un exemple pour montrer quelque chose. Pour eux c'est sur le même plan. Et il y en a pas un qui fait la remarque. C'est dommage car cela pourrait être l'occasion de dire : non ça c'est un contre-exemple. Pour moi il

y a tout un tas de contradictions pour eux qui doivent... Ou alors ils n'osent pas le dire. Là celui que je t'ai dit tout à l'heure pouvait vraiment me mettre en difficulté : vous calculez $(-2)^2$, ça fait 4 donc... C'est nul de dire ça. Et pourtant cinq minutes avant j'ai dit à un élève : il ne faut pas prendre d'exemple.
AL : Pour les contre-exemples, j'ai l'impression que l'on sait qu'ils ne savent pas ce que c'est mais qu'on n'ose pas leur dire ce que c'est.

B : Oui parce qu'on a peur... Oui peut-être.

AL : Ce n'est pas facile à expliquer...

B : Oui c'est peut-être pour ça qu'on ne s'y risque pas. Sinon il y a une remarque qui m'a frappé quand on met a et b négatifs au carré, il y a un élève qui dit : il y a pas les parenthèses. Est-ce que cela veut dire que si on met -3 au carré, c'est -3 au carré sans parenthèses ? Ce qui expliquerait l'erreur quand on remplace x par -x. Donc il faudrait mettre a entre parenthèses... Ça c'est encore la lettre qui représente un nombre positif ou négatif...

Oui, page 9 ligne 6, on avait vu dans l'activité sur les inégalités qui avait vraiment été difficile.

<u>Cinquième épisode :</u>

B : Il y a une petite remarque : quand je leur ai expliqué comment on faisait un tableau de variation avec la flèche qui monte ou qui descend, il y a une élève qui m'a demandé pourquoi on ne faisait pas la flèche comme ça. Et heu... J'ai dû lui dire : on lit de gauche à droite donc... Ça je ne m'y attendais absolument pas, j'étais coincé devant la question. Je pense que j'en parle dans le cahier de bord. Je ne savais pas quoi lui dire.
Dans le tableau de valeurs, après avoir pris -4, -3, -2, -1, j'avais lu : oui après on reprend 1, 2, 3, 4. Mais là il y a rien de bien dans ça, ça ne veut rien dire.

AL : Tu n'avais pas dit ça ?

B : Si c'est exactement ce que je dis, mais c'est plus clair quand on le voit. Cela m'a choqué de le lire comme ça. Cela faisait vraiment : on a pris -3, -2, -1 donc on prend le symétrique. Cela apparaît moins sur la vidéo.

Ouais quand je leur demande comment est l'axe des abscisses, ils me répondent orthonormal. Ça...

AL : Ce sont des réflexes.

B : Oui j'ai l'impression.
Ça ils me l'ont dit tout le temps : le point 0. A chaque fois je les reprenais mais sans plus : on dit le point O. Par contre souvent quand on avait une fonction à tracer, on calculait les valeurs : on trace le point 1. Je disais : non un point c'est un point et 1 c'est un nombre. Et là ils se reprennent.

AL : Est-ce que tu leur as demandé de te donner les coordonnées de ce point ?

B : Oui et ils me les donnent bien.

AL : C'est peut-être une facilité de langage pour eux. Cela ne veut pas forcément dire qu'ils confondent nombre et point.

B : Oui. Et pour toi quand les élèves disent que f(x) est symétrique, est-ce que c'est une facilité ?

AL : Cela va peut-être plus loin. En fait on ne sait pas...

B : Il faudrait leur demander. C'est difficile de leur faire dire qu'il faut qu'on calcule plusieurs valeurs ente 0 et 1 pour avoir une idée précise de la courbe. Ça je pensais aussi que cela allait venir plus facilement. C'est bête parce que je leur dis qu'entre 0 et 1 on ne sait pas ce qui se passe, mais on ne sait pas plus ce qui se passe entre 0 et 0,25. Si on grossit, on tombe sur le même problème. A un moment tu es obligé de leur faire prendre les choses pour argent comptant. Et après on les joint au mieux. J'ai vu aussi dans les bouquins : tracer une courbe lisse ou de façon naturelle... Cela ne veut rien dire du tout. Enfin ça me pose vraiment problème parce qu'ils pourraient très bien dire : non je refuse de vous croire.

AL : Est-ce qu'il n'y a pas un moyen de montrer la nécessité de le faire ? Il y en a qui peuvent te dire : vous nous avez fait tracer entre 0 et 0,25...

B : Pourquoi c'est pas une droite entre ces deux-là...

AL : Oui enfin... Déjà pourquoi est-ce que ce n'est pas une droite ? C'est déjà un premier problème. Et le deuxième problème c'est : est-ce que d'un seul coup la courbe peut faire n'importe quoi ?

B : Elle est quand même tenue par le sens de variation. On sait qu'elle va partir vers le haut et qu'il n'y aura pas de bosse. Moi c'est l'histoire des droites qui m'embête vraiment. Rien nous dit que les points ne sont pas joints par des droites. Ou alors il faut encore prendre un point entre les deux et encore un et encore un... Et puis on ne termine pas.

AL : A un moment tu dis à un élève : là elle n'est pas affine par morceau. Cela a l'air d'être une affirmation...

B : Il faut qu'il me croie. Comme je leur dis : la courbe de x^2, c'est une parabole. C'est comme ça et puis pas autrement.

AL : Là c'est du vocabulaire, la parabole.

B : Bon plutôt : c'est pas une droite, c'est pas affine par morceaux. Je leur balance et ils se débrouillent avec ça. C'est pas la première chose qu'on leur balance comme ça. Mais moi je trouve presque cela choquant qu'il n'y ait pas un élève qui me dise : non, mais pourquoi est-ce que ce n'est pas des droites ?

AL : Et pourquoi est-ce que ce ne sont pas des droites ?

B : *Rires*. Alors là... A la limite entre deux points on peut faire une dichotomie à chaque fois... Encore c'est pas ça qui... Non tu m'as coincé... Je ne sais pas le dire... On m'a dit que c'était comme ça, c'est comme ça. Il y a des histoires de convexité aussi peut-être là-dessous.

AL : Si c'est une fonction affine par morceau, on sait comment elle s'écrit. La question est : est-ce qu'on peut mettre x^2 sous cette forme ? Cela va loin au niveau des écritures avec les élèves.

B : Mais ça il y en a qui ont essayé : pour x^3 en DS, c'est x fois x^2, donc le coefficient directeur c'est x...
J'ai rencontré le même problème, dans une des dernières séances, on factorise x^4-1. Cela donne $(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Alors au début ils me donnent : $(x^2+1)(x^2-1)$. J'ai dit oui mais on peut aller plus loin. Ils trouvent que x^2-1... Et ils me disent : mais x^2+1 on peut le factoriser. Je leur ai dit : non on peut pas. Et ben pourtant avec l'autre on a pu, il suffisait d'un moins et ça marche, pourquoi pas avec le plus. Bon je leur ai demandé des propositions, qui ne marchaient pas. Bon je leur ai dit : vous voyez que cela ne marche pas. Mais tu ne peux pas leur dire que x^2+1 tu peux pas aller plus loin. Et ça à certains moments on leur demande de voir qu'on peut factoriser, alors qu'ils pourraient me dire : oh ben non, on ne peut pas aller plus loin. Ça ça me gêne vraiment. Bon pour la parabole encore... Tu peux leur dire de prendre la calculatrice, cela les convaincra. Mais x^2+1 cela me gêne vraiment. On leur demande toujours de factoriser au maximum et pourquoi ça c'est le maximum et pas autre chose ? Il faut qu'ils soient bien gentils. Si on tombe sur un esprit rebelle, on est un peu coincé.
Je n'ai pas noté d'autre remarque.

AL : Qu'est-ce que tu penses de cette séance ?

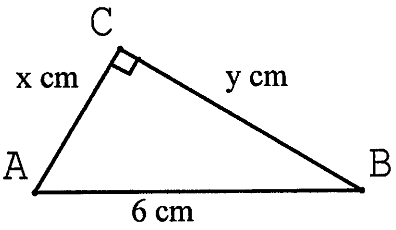
B : Bien que j'aie essayé de leur faire construire eux-mêmes le plan d'étude d'une fonction, quinze jours après quand je leur ai demandé : maintenant qu'est-ce qu'on fait ? On étudie les variations. Pourquoi ? Parce que c'est marqué sur la fiche méthode. Ça c'est décevant. Pour eux les cinq ou six minutes n'ont servi à rien. Soit il fallait pas les faire du tout, mais je ne pense pas, soit il fallait y passer plus de temps. Et ça on en avait discuté à la séance de préparation, mais cela doit être plus compliqué à mettre en place, laisser l'étude partir... Disons faire ce que j'ai fait au tout début en cinq minutes : leur demander ce qu'on fait pour étudier une fonction et puis le faire au fur et à mesure. Qu'est-ce qu'on fait là ? Les variations. Bon ben allez on fait les variations. Et puis après essayer de remettre de l'ordre là-dedans. En tout cas il ne fallait surtout pas passer très vite comme je l'ai fait à la fin. Donc bon ça c'était décevant qu'ils n'aient pas senti le lien entre les étapes. Après pour ce qui est pour des choses plus pratiques : à force ils ont fini par acquérir pas mal les méthodes de parité, sens de variations, même s'il y a des irréductibles, en gros je trouve que c'est pas mal entré. Sinon sur la séance elle-même je trouve que pour le tempo, la chronologie je trouve que c'est assez équilibré. Il n'y a pas trop de temps mort. L'avantage c'est qu'ils avaient à peu près les mêmes difficultés. Sinon si je la recommençais qu'est-ce que je ferais ? Est-ce que j'insisterais plus sur le lien entre les étapes ? Sans doute. Mais dans quelle mesure je ne sais pas. Je ne sais pas si je me sentirais d'attaque pour les laisser partir comme je te disais. J'ai peur c'est que pour eux une fois que c'est écrit : on l'a fait une fois en module donc on peut se permettre de le refaire plus tard. C'est une sorte de module brouillon et j'ai peur que pour eux ce ne soit pas clair.

AL : Après il y a un travail à ta charge : l'institutionnalisation. Ce qu'il y a c'est que dans ce cas tu ne pourrais pas faire en même temps la recherche et ta fiche méthode. Ou alors c'est une séance de deux heures, mais cela n'est pas possible avec les secondes. Tu peux faire une séance de recherche et la séance d'après tu institutionnalises.

B : Je crois que tu m'en avais parlé de ça.

ANNEXE N°25 : LES DOCUMENTS PRODUIT PAR CLAIRE POUR LA PREPARATION DE LA SEANCE FILMEE

ACTIVITE INTRODUISANT LES FONCTIONS



On appelle glénatri tout triangle rectangle, comme celui dessiné ci-dessus, dont l'hypoténuse [AB] est fixe et a pour longueur 6 cm.

I – PRELIMINAIRES :

1) Quelle est la figure géométrique où se trouve le sommet C de chaque glénatri ?

2) Déterminer la valeur de x correspondant à un glénatri isocèle. Quelles est alors l'aire d'un tel glénatri ? Faire une figure.

II – UNE PREMIERE FONCTION DE X :

1) Calculer y en fonction de x.

Donner l'ensemble I des valeurs que peut prendre le réel x.

Donner la fonction qui exprime comment y varie en fonction de x.

2) Compléter le tableau ci-dessous en donnant l'arrondi au dixième près;

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
f(x)													

3) Sur une feuille de papier millimétré, placer un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) avec 1 cm pour unité. Construire les points de la courbe représentative C_f de f obtenus avec le tableau précédent. Tracer la courbe C_f représentative de f.

Dresser le tableau de variation de f.

III – AIRE DU GLENATRI : SOIT Z CM² L'AIRE D'UN GLENATRI.

1) Calculer z en fonction de x. Donner la fonction g qui exprime comment z varie en fonction de x.

Voici la courbe représentative de C_g de la fonction g (voir feuille jointe)[3]

2) Quelle est l'aire maximale que peut avoir un glénatri et pour quelle valeur de x cette aire maximale est-elle atteinte ? Démontrer ce résultat géométriquement.

4) Dresser le tableau de variation de g.

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : g(x) = 7 et donner une valeur approchée de ces solutions.

Dessiner le plus soigneusement possible un glénatri d'aire 7 cm².

---

[3] Pour gagner du temps, Claire a fait le choix de fournir à la classe une photocopie d'un tracé de la courbe représentative de la fonction g qu'elle a obtenue en utilisant un logiciel de géométrie.

Activité préparatoire. ②

objectif : Ce module se présente comme une activité introduisant différentes notions sur les fonctions. Avant d'entamer le cours, ce problème devrait permettre de donner une idée de ce qu'est une fonction, de son utilité.
A partir d'un problème géométrique, le but de cette séance est d'aborder quelques notions attachées aux fonctions :
- ensemble de définition
- tableau de valeur et courbe représentative de f.
- monotonie et tableau de variation.
- maximum
- solution d'une équation par lecture graphique.

situation : . Cette séance se situe en introduction du cours sur les fonctions. Le cours précédent aura permis de définir uniquement la notion de fonctions (définition)
. La séance suivante a pour objectif d'utiliser cette activité afin d'introduire les différentes notions attachées aux fonctions et d'illustrer le cours.

organisation :
- module : 2 groupes de niveau
- alternance lors de la séance de temps de recherche individuelle et de mise en commun des résultats.

difficulté générale : introduction d'une notion totalement inconnue des élèves : la représentation graphique d'une fonction.

temps	contenus et objectifs de l'exercice	difficultés prévues pour les élèves
Tracer un triangle AB=6 AC=4 sans calcul ⓪	(I) Préliminaire : question qui permet de se familiariser avec le problème. Son résultat sera réutilisé par la suite. ① Problème de lieu géométrique	1er pb : comprendre l'énoncé : x et y sont liés, AB est fixe. Difficultés : La propriété utilisée est souvent oubliée par les élèves. → construc° d'un génératrice (comment les mettres sur la piste de la solu° sans leur donner intégralement!)
	② algèbre : • Traduire le fait que le triangle est isocèle par une équation • Résolution d'une équation objectif : faire un travail algébrique dans un problème géométrique. * calcul de l'Aire	* Résolution de l'équation $2x^2 = 36$ ⊕ simplification du résultat $\sqrt{18}$ sous la forme $3\sqrt{2}$. * pb : • prendre la base du triangle la + judicieuse pour calculer l'aire de ABC. • effectuer un calcul en présence de racines carrées
+ lecture d'image en rapport avec la figure	(II) ① Introduire une fonction de x, avec son domaine de définition (sans en donner explicitement le nom au départ) ? cet (orale) on dit alors que l'ensemble de définition de f est l'intervalle [0, 6]	difficulté : déterminer les valeurs interdites de x → géométriquement : C appartient au cercle de diamètre [AB] donc $0 \leq AC \leq 6$ à priori méthode non utilisée → algébriquement : Résoudre $36 - x^2 \geq 0$ et $\boxed{x \geq 0}$ difficulté : • arriver à formuler ces $\boxed{2}$ équations à partir des hypothèses et de la fonction $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ • Résolution de l'inéquation avec la pté : "2 nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur carré." * ... tableau de signe ⓦ

4

2 <u>objectifs</u> • Faire un tableau de valeur de $f(x)$ afin de pouvoir construire la courbe représentative de f. • Découvrir le procédé pour construire la courbe	→ revoir au niveau de la figure gd x petit . y gd x gd x petit
3 Tracer la courbe C_f : Découvrir la notion : La courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ lorsque x décrit $[0, 6]$ • on représente toute courbe par une courbe représentée graphiquement. L'avantage d'une courbe, "c'est que les propriété de la fonction sont visuelles". "C'est nettement plus concret".	
* Voir rapidement la notion de monotonie grâce au graphique. <u>Oralet</u> : on constate que la courbe C_f "monte" En mathématiques ceci se dit que f est croissante * Introduction du Tableau de variation	à priori pas de problème car ce sont des notions intuitive et qui se lise sur le graphique

	III introduction d'une nouvelle fonction assez complexe objectif : effectuer un travail graphique 1 exprimer la fonction par un calcul simple	difficulté : . réutiliser le II, c'est à dire la fonction $f(x)$ • Faire le lien entre II et III
	2 . lecture graphique d'un maximum • Démonstration géométrique. objectif : vérifier un résultat approximatif (lu sur le graphique) grâce au calcul qui apporte un résultat exact. 3 Tableau de variation : application du II 3 4 Lecture graphique	pb : Traduire le fait que l'aire est maximale lorsque la courbe atteint son maximum. → difficultés : cette exercice est compliqué : car : . c'est un exercice de recherche (aucune question intermédiaire) • il faut réutiliser les résultats du I • puis exprimer l'aire du triangle d'une façon différente que précédement. pb : . Traduire l'ennoncé au niveau de la représentation graphique • comprendre ce que signifie $g(x) = 7$ • Interpréter l'ennoncé pour trouver une démarche de résolution

(4)

ANNEXE N°26 : ENTRETIEN PREPARATION SEANCE VIDEO AVEC CLAIRE, LE 17/03/2000

C : J'ai fait un peu comme tu m'avais demandé : objectifs, situation, organisation et puis après... C'est pas tapé ni rien, hein.

AL : Tu vas déjà me donner tes objectifs.

C : Le but de la séance est de faire une activité où on va voir différentes notions qui seront après abordées dans le cours. En fait c'est la première fois...

AL : Oui. Tu n'as encore rien fait sur ça ?

C : Voilà. Donc la partie de cours que je pensais faire après... Moi je pensais leur faire ça en introduction et leur faire marquer ça dans le cours. Parce qu'après, cela va introduire le cours, c'est-à-dire découvrir certaines notions, et après dans mon cours cela me permettra aussi d'illustrer par des exemples. On se reportera régulièrement à cet exemple-là. Donc ce que je pensais faire : samedi, juste avant, juste voir la définition d'une fonction. Juste revoir ce qu'est une fonction. En fait : à un seul réel on associe un autre nombre réel f(x). On définit en fait sur une réunion d'intervalles. Je vais voir ça et voir un petit exemple qui sera une fonction affine. Comme on a déjà revu les équations de droites et on avait reparlé un peu des fonctions affines, samedi juste parler de ça. Pour réintroduire un peu le chapitre, voir d'où on va partir.

AL : Donc pas d'exercices ?

C : Non. Juste revoir un peu le rapport avec ce qu'on a fait avec les fonctions affines. Se remettre dans le contexte en fait.

AL : Les fonctions affines, tu les as déjà faites ?

C : En fait on n'a pas fait les fonctions affines. Je leur ai préparé une feuille qu'on n'a pas finie de remplir où à la fin c'était... C'était sur les équations de droites... Je ne sais pas si je l'ai là... On en avait juste parler oralement. Voilà, et ça, on ne l'a pas rempli. Je l'avais mise dedans, parce qu'ils le connaissent, qu'ils l'ont déjà vu en troisième. C'était une feuille qui récapitulait tout ce qu'ils savaient sur les équations de droites. Mais ça je l'ai laissé en plan.

AL : Donc tu n'as pas fait d'exercices sur ça ?

C : Non. C'est juste ce qui permet d'introduire le chapitre en fait.
Et donc là c'est la première fois que je fais un travail comme ça : juste une activité qui introduit une seule notion voire deux et après on fait le cours. Et là en fait quand j'ai regardé les activités dans les différents livres, j'ai trouvé soit des activités qui étaient vraiment... Dire qu'on va introduire une notion comme la notion de croissance et tout... Je trouvais que les activités n'avaient aucun intérêt. Donc comme C.[4] m'avait dit que sa conseillère l'a fait et a priori les élèves... Après cela permet de mieux comprendre le cours. Donc en plus ça fait un travail en même temps algébrique, en même temps... Donc cela permet d'introduire la notion de fonction, de revoir... Dedans on va pouvoir voir un peu l'ensemble de définition, on va voir un tableau de valeurs, comment on construit une courbe représentative. Après à partir de la courbe, en déduire le tableau de variation, en fait ce sera des notions assez intuitives, assez graphiques. La courbe je la fais faire avant et après, d'après la courbe, on va voir comment on peut récapituler ça dans un tableau. On dira, mais à chaque fois rapidement, qu'on voit qu'a priori la fonction est croissante... Mais ça on l'écrira pas : fonction croissante. On le reverra après dans le cours. On reprendra cet exemple-là pour donner la notion de croissance. Et là je ne leur fais pas retracer la fonction z, que j'appelle g(x), parce que je trouvais que cela allait être trop long en une heure et demie. Donc en fait là je leur donnerai. Pour faire après un petit travail sur la courbe. Là on va pouvoir introduire la notion de maximum. Revoir le tableau de variation. Cela nous permettra de le voir deux fois. Et après quelque chose d'un petit peu plus dur : essayer de voir comment on peut résoudre une équation à partir du graphique. Donc c'est faire tout un travail. Ce sera une activité où il faudra que je les guide aussi par moment.

---

[4] C. est une autre stagiaire PLC2.

AL : On va revenir phase par phase. Ça, c'est ton objectif général. Là, ce sont les difficultés que tu as prévues ?

C : Oui j'ai essayé de voir question par question.

AL : D'accord. Bon on va regarder. On va regarder en même temps ce qui est à la charge des élèves dans chacune des phases et ce qui est à ta charge, quelles difficultés tu prévois et éventuellement quelles remédiations tu prévois.

C : Justement il y a des moments où je ne sais pas du tout comment je vais faire.

AL : D'accord. Bon sur le préliminaire...

C : En fait c'est un problème de lieu géométrique et ça, déjà, c'est une question qui va être difficile. On commence tout de suite sur une question difficile. C'est ce que j'ai dit : déjà la propriété qu'on va utiliser, souvent on l'oublie. Et s'ils ont oublié... Là c'est une question où je ne sais pas comment les mettre sur la piste sans leur donner la réponse. Ça c'était une question que je me posais. En fait, je pense qu'ils risquent de ne pas y arriver. Surtout le groupe le plus faible. Bon dans les forts je pense qu'il y en a qui vont trouver. Mais le groupe le plus faible risque d'avoir des difficultés.

AL : Qu'est-ce que tu peux faire, sans leur dire que c'est sur un cercle ?

C : Moi je pensais bien insister en reprenant les hypothèses, en fait. Que c'était bien un triangle rectangle. Et qu'en plus [AB] était fixe. Donc essayer d'insister sur ces deux points pour essayer de leur faire voir que le point C varie comme x et y. Comme on aura toujours un triangle rectangle, essayer de regarder où le point C va se situer. Sur quelle figure géométrique ? Mais je me suis posé la question et je n'ai pas réussi à y répondre.

AL : De toute façon qu'est-ce qu'on peut faire ? Soit ils savent que c'est sur le cercle, soit on les amène à découvrir que c'est sur le cercle, ou soit on leur dit.

C : Ouais, mais j'aurais mieux aimé éviter de leur dire. C'est ce que je me demandais : comment les mettre sur la piste en évitant de leur donner la solution ?

AL : Comment peut-on faire ? Comment peut-on les amener à découvrir que c'est sur un cercle ?

C : ... Il faut arriver à leur dire que... Essayer de leur faire dire les propriétés qu'ils connaissent sur un...

AL : Tu peux leur dire d'en tracer un.

C : D'en tracer un, ouais.

AL : Tu pourrais leur demander d'en tracer un avec un côté donné et sans faire de calcul. Ils passeront par le cercle circonscrit au triangle.

C : Et tu penses que ... ? C'est vrai que cela peut être une solution. Mais sur le moment comme ça j'ai l'impression que la difficulté est la même en fait.

AL : Oui, c'est la même difficulté. Sauf que là ils ne sont pas uniquement confrontés à une question a priori. Ou sinon tu en fais construire plusieurs, mais cela risque de prendre du temps, pour se rendre compte qu'ils sont... Mais de toute façon si tu en fais construire plusieurs il faut qu'ils sachent en construire au moins un. Peut-être que tous ne le sauront pas, mais tu peux espérer qu'il y en aura qui le sauront. S'il n'y en a pas qui y arrivent alors tu peux effectivement relancer sur les propriétés du triangle rectangle.

C : D'accord. Alors après la deuxième question : en fait là, c'était déterminer la valeur de x qui correspond à un glénatri isocèle. Donc là je pense qu'au départ ils vont tout de suite comprendre que cela veut dire que AC égale BC. Penser à utiliser Pythagore, ça je pense que cela va pas être un problème. Ce sera plus la résolution de l'équation qui risque d'être un problème pour certains élèves. Il y en a qui ont toujours des difficultés sur cette résolution d'équation, bon les plus faibles. Les bons élèves n'auront aucune difficulté à résoudre ça. En fait cela va permettre aussi de faire un petit travail algébrique : résolution d'équations. Et cela permet de se familiariser vraiment avec le problème. Faire un petit travail sur la figure sans introduire quoique ce soit sur les fonctions au départ.

AL : Comment est-ce que tu vois la gestion de cette phase ?

C : Là au départ c'est vraiment une recherche individuelle, sur la première question. En général quand ils sont en module je passe voir ce qu'ils font. Donc là je pense que rapidement ils vont être bloqués, même avec cette question-là je pense qu'il va falloir donner une aide en essayant d'interroger les élèves, en essayant de voir comment ils voient la situation, comment on peut évoluer. Donc essayer de donner une aide oralement. Et puis après essayer de leur faire faire eux-mêmes et si après, ça coince encore, faire une correction détaillée au tableau.

AL : Et comment est-ce que tu vas formuler ton aide ?

C : En fait, je pensais sur cette question-là leur faire citer oralement toutes les propriétés du triangle. Faire en fait un travail interactif oralement. Et après qu'ils essaient de retranscrire ça eux-mêmes sur leur feuille. La deuxième question, je pense qu'il n'y a pas trop de problèmes. Des fois ce que je fais quand il y a une question qui passe bien, je ne la corrige même pas quand c'est quelque chose qu'on a déjà vu plusieurs fois. Bon si je vois qu'il y a des erreurs : soit il y a deux élèves qui ont fait l'erreur dans la salle donc je passe sur leur cahier pour corriger. S'il y a vraiment beaucoup d'erreurs, je fais une correction au tableau.

AL : D'accord. Ensuite, deuxième phase.

C : Là c'est l'introduction d'une fonction. En fait c'est le calcul de la valeur CB en fonction de x. Donc là au départ cela commence par un petit calcul algébrique : calcul de y en fonction de x, toujours par Pythagore. Ça je pense que cela ne devrait pas trop poser de problèmes au départ. Après par contre "donner l'ensemble I des valeurs que peut prendre le réel x", ça je pense que ça va poser problème. Parce que, en fait, on va voir qu'il y a deux méthodes pour le voir. On peut regarder soit géométriquement, soit regarder en fait que y égale $\sqrt{36-x^2}$. On peut le résoudre algébriquement pour voir qu'une racine doit toujours être positive. Il y a deux façons. Je pense qu'eux vont partir algébriquement, mais ils vont avoir des difficultés à résoudre, parce que cela fait appel à plusieurs notions qu'on a vues depuis le début de l'année. Le fait que les carrés soit rangés dans le même ordre quand c'est un nombre positif... A mon avis ça va poser problème. Alors que s'ils le voyaient géométriquement, je pense que c'est beaucoup plus facile. Donc je pense que s'ils ont des difficultés là, je vais d'abord les inciter à regarder géométriquement pour trouver déjà le résultat. Mais après aussi le faire algébriquement, le vérifier par le calcul. Faire les deux. Au début je vais les laisser faire eux-mêmes pour voir comment ils se débrouillent. En fait là le but c'est en même temps faire une activité où il y a des exercices de recherche. Les laisser un peu libres, voir comment ils se débrouillent sur ce genre d'activité.

AL : Et ensuite cela reprend de l'algèbre que tu as déjà faite.

C : Le problème c'est que ce genre de truc on ne l'a pas revu récemment.

AL : Est-ce qu'il y d'autres méthodes pour résoudre cette inéquation éventuellement ?

C : Ils pourraient faire une factorisation et faire le tableau de signes.

AL : Ils peuvent faire ça aussi.

C : C'est vrai que j'ai pensé à celle-ci, il y a aussi le tableau de signes. En fait, le tableau de signes c'était vraiment au début de l'année. Bon on l'a revu une fois au mois de janvier, mais je pense que c'est encore plus loin. C'est pour ça que je suis partie sur la règle des carrés.

AL : D'accord. Les difficultés sont donc : comprendre la situation et résoudre le problème. Il faut aussi qu'ils voient le problème qui se pose : la racine n'est pas définie...

C : Pour un nombre négatif. Déjà ça... Bon je pense que dans le premier groupe... Le premier groupe c'est le groupe fort. Je pense que dans le premier groupe, ça, ça doit passer mais, dans le deuxième groupe, il y en a vraiment qui sont faibles et... Il va falloir dans le deuxième groupe que je dirige beaucoup plus l'activité si je veux qu'on puisse avancer quand même.
Donc après c'est compléter le tableau.

AL : Là quand tu dis "donner la fonction qui exprime comment y varie en fonction de x", c'est pour leur faire écrire f ?

C : Voilà c'est ça, c'est juste pour leur faire reprendre la notation qu'on aura vue samedi. Vraiment voir que là au début c'était du calcul algébrique mais là on passe vraiment à la notion de fonction.
Donc après c'était compléter le tableau. En fait c'est pour pouvoir tracer la courbe. Faire un tableau de valeurs. Là je leur ai donné les valeurs pour qu'ils soient guidés. J'ai dit au dixième près, parce que je vais leur demander d'apporter du papier millimétré. Puis après je leur impose l'unité, puisqu'ils devront tous avoir le même graphique.

AL : Tu n'auras pas du tout parlé de la courbe représentative ?

C : Voilà. Là je leur donne le nom mais on va expliquer oralement vraiment à quoi cela correspond. Je la tirerai sur rétroprojecteur une fois qu'eux l'auront tracée. Je voulais placer un point pour que l'on voie que son abscisse c'est bien x et que son ordonnée c'est f(x). Remettre les choses... Donc là c'est pareil il va falloir que je les guide pour qu'ils comprennent que le premier point, ce sera 0 son abscisse et son ordonnée, ce sera la valeur qu'on aura trouvée ici. Et après les laisser terminer.

AL : Et à ton avis qu'est-ce que tu peux supposer comme acquis chez eux par rapport à ça ?

C : Moi a priori je pensais que cela n'allait pas leur poser trop de problèmes, que c'était assez intuitif chez eux. x, f(x)... Comme ils ont déjà vu un peu les fonctions affines en troisième, bon ce sera l'abscisse, ce sera y. Même s'ils n'arrivent pas à formaliser par écrit, dire qu'un point appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées c'est x et f(x). Mais je pense qu'ils arriveront à placer les points sur la courbe et à tracer la courbe. Mais je me trompe peut-être.

AL : Non en principe ils sauront faire si tu leur expliques ce que tu veux.

C : Je pensais leur dire oralement. Et après on va dire : ça s'appelle C_f, la courbe de machin. Je vais introduire ensuite la notion de courbe.

AL : Et c'est là que tu veux placer un point ?

C : Voilà, après on va placer un point, on va regarder son image. Et après dresser le tableau de variation. Alors voir que la fonction on dit qu'elle descend, entre guillemets. Voir aussi que son ensemble de définition c'est [0 ; 6]. On peut schématiser ça dans un tableau, pour mieux se représenter la fonction. Là je serai obligée de leur donner comment on présente le tableau.

AL : Comment est-ce que tu vas introduire l'utilité d'un tel tableau ? Là, à ce moment-là, tu vas introduire ce que veut dire croissant, décroissant ?

C : Oui. Voilà un petit peu.

AL : Et comment est-ce que tu comptes l'introduire ça ?

C : En fait là c'était juste au niveau graphique. Donc juste voir que quand on augmente la valeur des abscisses, on voit que la valeur des ordonnées descend. Et donc on présente ça sur une ligne où on a les abscisses, là c'est les ordonnées. Donc plus j'augmente l'abscisse, plus l'ordonnée diminue.

AL : Comment est-ce qu'ils font dans ton manuel ?

C : Dans le Pythagore, ils le faisaient un petit peu comme ça. Dans le mien, je me demande s'il y a quelque chose. Eux ils attaquent avec une fonction et après ce ne sont que des exemples, on ne voit aucun graphique. Je n'aime pas trop la façon dont ils le présentaient Dans le Pythagore, ils le présentent à partir d'une courbe. C'est pour ça que j'ai un peu calqué leur présentation.

AL : Ce qui est pas mal, c'est qu'on peut rester sur la situation : quand x augmente, y diminue. Tu peux leur montrer sur la figure. Et après donner un sens par rapport à la fonction.

C : Oui c'est vrai.

AL : Puisque tu as choisi de travailler à partir d'une situation, autant donner du sens à tout à partir de cette situation. La lecture graphique tu la feras après ?

C : Oui.

AL : Mais là, tu as dit que tu allais parler d'abscisse et d'ordonnée ?

C : Oui, placer un point pour bien comprendre la notion de courbe représentative.

AL : Tu peux toujours faire le lien avec ça.

C : Oui toujours revenir à la situation d'origine.

AL : Et au niveau de la gestion, tu as toujours des phases de recherche et de mise en commun après ?

C : Je pensais faire toute cette activité sur ce principe.

AL : Les mises en commun seront faites au fur et à mesure ?

C : Oui, pas à la fin vu que l'on découvre différentes notions. Je pensais que cela allait...

AL : D'accord. On regarde la troisième phase.

C : Donc là cela va être une fonction un petit peu plus compliquée et il va falloir utiliser le travail qu'on a fait précédemment pour exprimer z. Penser à utiliser la formule adaptée pour calculer l'aire, c'est-à-dire la bonne base et la bonne hauteur.

AL : Dans un triangle rectangle, ils ont en général du mal à penser que c'est une hauteur ici.

C : Ils font AB fois... C'est ce que je me suis dit.

AL : Non ils font...

C : Ils font bien ?

AL : Je pense, oui.

C : Vu comment il est placé le triangle j'avais peur qu'ils prennent AB comme base.

AL : S'il y en a qui font ça, c'est tout. Ils arriveront à quelque chose qui n'aboutira pas.

C : Essayer de chercher une autre base, voir si...

AL : Oui. Après il y a une manipulation de formule...

C : C'est pas très dur.

AL : Non. C'est juste appliquer la formule en fait.

C : Et puis ensuite écrire sous la forme d'une fonction g(x) égale...

AL : Alors, dans la question suivante tu leur donnes la courbe de g.

C : Alors je leur donne parce que déjà j'ai peur que l'activité soit longue. Je leur donne la courbe en leur disant qu'on peut faire le même travail, exactement comme avec f, et que moi je l'ai fait avec l'ordinateur. En plus elle sera précise, ce qui permettra un travail un peu plus précis au niveau des questions suivantes.

AL : D'accord.

C : Donc là après l'aire maximale, c'est juste par lecture graphique. Donc là ils comprennent bien que le maximum de la fonction, déjà en ordonnée, cela correspond à l'aire, et ça, ça correspond à la valeur de x, quand l'aire est maximale. A mon avis ils vont tout de suite comprendre que le maximum c'est là où la fonction est le plus haut. Mais après interpréter que l'ordonnée c'est l'aire et x c'est la valeur de l'abscisse, ça je pense que cela va déjà poser plus de problèmes.

AL : Qu'est-ce que tu attends lorsque tu demandes de démontrer ce résultat géométriquement ?

C : Alors en fait, je ne savais pas trop comment écrire la question. En fait moi je veux repartir des préliminaires, dire que C se trouve sur un cercle et que l'aire d'un triangle cela peut s'écrire AB fois sa hauteur et voir que la hauteur la plus grande possible quand on a un triangle isocèle.

AL : Et donc tu retrouves le x que tu avais trouvé ici ?

C : Oui. Le calcul est déjà fait en fait. Il suffit d'interpréter géométriquement ce que cela veut dire.

AL : Qu'est-ce qu'on trouve pour x ?

C : Ce doit être $3\sqrt{2}$. Et après cette question est intéressante parce qu'ici ils vont trouver une valeur approchée. C'est ce que j'ai marqué ici : sur le graphique on ne trouve qu'une valeur approchée mais le calcul permet de trouver une valeur exacte. C'était pour voir que la courbe représentative c'est bien mais que cela a des limites.

AL : Et les problèmes d'optimisation tu pourras en faire d'autres où on peut trouver algébriquement la valeur de l'optimum de la fonction. Il y en a un sur la trajectoire d'un oiseau qui est pas mal dans le Déclic seconde.

C : Nous, après, avec C. sur le mémoire on va faire une application sur la racine carrée et $\frac{1}{x}$, où se sera au niveau musical en fait. Il y a la tension de la corde en fonction de la hauteur de la note et aussi la longueur de corde en fonction de la hauteur. Cela va être une application où, c'est pareil, on va faire pas mal de lectures graphiques et aussi de démonstrations algébriques pour trouver un maximum. On fera les deux à chaque fois.

AL : A quel moment dans ta progression, tu penses te servir de ces activités ?

C : A la fin de ce chapitre sur les notions de fonctions mais avant de faire le cours sur les fonctions usuelles. En quelque sorte en introduction des fonctions usuelles.

AL : Cela te permet de faire les études de $\sqrt{x}$ et de $\frac{1}{x}$ à une constante près.

C : Voilà on pensait faire ça en module et après je le remets dans le cours.

AL : Travailler sur des activités comme ça permet de donner du sens à ce qu'on fait. On ne travaille pas que sur du formel. Cette activité avec les triangles permet de démontrer géométriquement un résultat, c'est rare.

C : Je ne savais pas trop comment poser cette question-là ? Est-ce que tu penses ... ?

AL : Il faudra peut-être que tu les guides.

C : Là je ne savais pas vraiment comment la poser pour qu'ils comprennent vraiment. En fait, j'ai mis géométriquement. Mais en fait c'est exprimer l'aire d'une autre façon...

AL : Comment est-ce que tu pourrais les guider ?

C : Moi je pensais déjà leur dire : le but c'est de trouver quand l'aire est maximale. A priori avec la façon dont est exprimée l'aire, on aura du mal à le faire algébriquement, parce que la fonction est compliquée. Donc est-ce qu'on peut pas justement exprimer l'aire d'une autre façon ? Essayer de leur faire dire que c'est base fois hauteur. Et après essayer de leur faire penser que l'on a démontré des choses dans le préliminaire, qu'on sait quelque chose sur le point C. En fait base fois hauteur, qu'est-ce qui varie dans cette formule-là ?

AL : Tu pourrais aussi poser le problème dans l'autre sens : tu peux leur demander avant de faire le calcul de trouver celui qui a la plus grande aire. Et puis tu leur dis qu'on peut essayer de le calculer. Enfin... Est-ce que cela a un intérêt ?

C : Commencer par le calcul et après le revoir là ?... En fait moi je l'avais fait dans ce sens en disant que le but c'était de travailler sur le graphique et puis après on pouvait voir qu'on pouvait retrouver les résultats algébriquement, les valeurs approchées, d'une autre façon.

AL : Ouais peut-être que cela n'est pas utile... En plus s'ils l'ont trouvé avant, ils ne verront pas forcément l'intérêt de le refaire.

C : Voilà, là cela devient un objectif : on va bien leur dire qu'on n'a qu'une valeur approchée donc cela sert vraiment à quelque chose de le vérifier autrement.

AL : D'accord. Par contre dans la question où tu leur demandes de calculer l'aire, s'il y en a qui te disent AB fois la hauteur, tu peux laisser en suspens et dire qu'effectivement il y a plusieurs façons de le calculer.

C : Moi je suis quasiment persuadée qu'il y en a qui vont me montrer ça. Enfin je me trompe peut-être. Et moi je pensais mettre la formule au tableau, en mettant un point H ici et en l'écrivant de deux manières. Et puis en disant : pour l'instant c'est celle-ci la plus facile. Mais la laisser sur le tableau en fait.

AL : Pour la question tu peux leur dire : est-ce qu'on ne peut pas géométriquement retrouver le résultat ?

C : Et puis après en les guidant un petit peu...

AL : Pour ceux qui sont moins forts tu peux le laisser en suspens ça.

C : Voilà, en fonction d'où je serai dans l'heure, je m'étais dit que ça je ne le démontrerais pas forcément. Parce qu'après à la limite pour le cours c'est pas gênant, s'ils ne l'ont pas fait.

AL : Donc après c'est le tableau de variation que tu vas reprendre et puis cette fois montrer deux aspects. C'est aussi intéressant car dans un premier temps on en voit une qui est toujours décroissante...

C : Et puis après voir qu'il y en a certaines qui peuvent être croissantes sur un intervalle et après décroissantes sur un autre intervalle. Et la quatrième question, déjà je pense que je n'aurai pas le temps de la faire avec le groupe faible. Déjà j'espère qu'avec le groupe fort j'aurai le temps. Sinon je me disais que l'on reprendrait ça au moment où on y arriverait dans le cours. Pas samedi, car je n'en serai pas là. Mais à la limite reprendre ça quand j'arriverai là dans le cours.

AL : Là tu vas la poser comme ça ?

C : Oui je pensais la poser comme ça. Donc c'est une question difficile parce qu'on ne guide pas du tout au départ. Donc en fait, c'est ce que j'avais marqué là, c'est un exercice de recherche, parce qu'il n'y a aucune question intermédiaire. Donc la difficulté ça va être déjà de comprendre la question, de voir ce que veut dire la question. Voir comment graphiquement je peux résoudre ça.

AL : Moi je demanderais aussi, bon tu le demandes après, ce que ça veut dire par rapport à la figure.

C : Voilà. g(x) égale 7, leur faire dire que cela correspond à l'aire égale 7.

AL : Si tu ne veux pas qu'au début ils soient trop bloqués par cette formule, parce que c'est cette formulation qui risque de les bloquer...

C : Ah oui, carrément dire...

AL : Ou alors leur demander : déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle on a un glénatri d'aire 7. Et puis après tu introduis la notation.

C : Oui cela sera peut-être mieux.

AL : Ou bien tu laisses ça comme ça, tu les laisses bloquer et puis tu dis : cela veut dire quoi par rapport à la figure. Puis après tu pourras voir avec les notations : l'aire c'est g(x), donc on a résolu l'équation g(x)=7.

C : Pour eux, ce sera peut-être mieux.

AL : J'ai peur que la notation les bloque.

C : Oui c'est ce que je pensais aussi.

AL : Tu peux laisser ça comme ça aussi et ensuite leur demander ce que cela veut dire par rapport à la situation. Elle l'avait écrit comme ça la conseillère pédagogique de C. ?

C : Oui. Cela je ne l'ai pas changé.

AL : Tu peux dire : je le laisse comme ça, pour voir justement la réaction des élèves. Et puis si ça bloque, tu les aides. Cela peut être intéressant aussi de leur apprendre à décoder une écriture comme ça.

C : Ouais ça peut être bien. Après revenir toujours à la situation pour voir ce que cela veut dire en fait. On a dit que g(x) c'est l'aire. Donc il faut chercher la valeur de x pour laquelle la valeur est égale à 7 cm².

AL : D'accord. C'est intéressant. Je voulais aussi te demander quelles questions tu t'étais posées avant d'écrire ton activité.

C : Pour trouver l'activité ?

AL : Soit déjà pour trouver l'activité, et puis après quand tu as vu cette activité, quelles sont les questions que tu t'es posées ?

C : En fait au départ j'avais regardé le cours, ce qu'il y avait dedans. Je commence toujours par feuilleter tous les livres, je regarde toujours tout de suite comment je vais pouvoir introduire toutes les notions. Et je trouvais que, surtout dans le Pythagore, il y avait beaucoup d'activités mais je trouvais qu'elles étaient pas très intéressantes au niveau du sens, au niveau du travail mathématique. Et j'en ai parlé à C. qui m'a parlé de cette activité. Elle me l'a proposée. Je l'ai regardée, j'ai analysé quelles notions étaient abordées, quel travail il y avait derrière. Donc là j'ai enlevé des questions, j'en ai rajouté une. J'ai changé quelques choses pour que cela puisse tenir en une heure et demie et pour que cela introduise vraiment les notions. Et en fait c'est la première fois que je vais travailler avec une seule activité qui va aborder quasiment toutes les notions du cours. D'habitude je ne fais pas ça comme ça et je me suis dit que c'était peut-être intéressant de voir autrement.

AL : C'est peut-être aussi une des premières fois que tu introduis quelque chose de complètement nouveau.

C : Oui c'est vrai qu'à chaque fois il y a toujours une partie qu'ils connaissent dans le cours. Même si tout n'est pas nouveau. Bon je fais toujours des activités mais c'est vraiment juste sur une notion en fait. C'est jamais un gros chapitre, qu'ils ne connaissent pas. C'est toujours une notion qu'on introduit de nouveau mais qui part des connaissances qu'ils ont déjà.

AL : Donc tu t'es posé des questions au niveau du contenu.

C : Oui.

AL : Et après tu t'es posé des questions au niveau des difficultés des élèves et comment... ?

C : Comment je peux y remédier ?

AL : Ce sont des questions que tu te poses d'habitude ?

C : Je le fais à chaque fois. Mais je ne les mets pas forcément par écrit. Mais à chaque fois que je prévois une activité, je me dis : où vont-ils avoir des problèmes et comment je vais pouvoir les aider ? Parfois j'ai des surprises. Des fois je pense qu'ils vont avoir des problèmes, ils en ont pas. Et des fois c'est le contraire.

AL : D'accord.

C : C'est pareil j'ai souvent le problème du temps. J'en prévois toujours trop. Maintenant ça va mieux : je sais que j'en ai prévu de trop et que je ne ferai pas tout ça.
Là ça me paraît trop long.

AL : Hm. Ce matin je suis allée filmer Benjamin. Il a fait l'étude de la fonction x^2. Il a fait des choses plus techniques : parité, croissance, décroissance. Toi, tu ne le fais pas algébriquement. Cela peut-être te prendra moins de temps. Mais si tu veux expliquer des choses en même temps...

C : En fait sur la croissance et décroissance, je referai une activité pour bien formaliser : dire que croissant ça veut dire que x plus petit que y...

AL : Là tu vas juste le dire comme ça et après...

C : Après je referai une activité quand je ferai ça en cours. Avant d'écrire la définition de croisant, décroissant dans le cours on fera une petite activité, celle du Pythagore que j'ai repérée.

AL : Là par rapport au temps, il ne faut pas que tu te dises j'ai ça à faire et que tu te dépêches. Prends ton temps, même si tu n'as pas fini, tu me diras après comment cela s'est passé. Avance à ton rythme.

C : En plus vu mon cours ce n'est pas trop gênant, samedi je vais commencer. Mais la notion de maximum ça vient après à la fin du cours, donc même si je refais ça que le lundi d'après ce n'est pas gênant. Juste le samedi après t'avoir vu, je fais le cours. Je pensais juste introduire la notion d'image et d'antécédent. Et de faire un exemple et après faire une petite fiche avec des exercices à trous : l'image de..., etc. Et puis après faire représentation graphique d'une fonction. Bon là je pense qu'on ira quand même jusque là.

AL : Oui c'est sûr. C'est là que cela risque de prendre du temps.

C : Bon même si là on n'a pas fini, à la limite pour mon cours c'est pas gênant.

AL : Là ça ira. Il y aura peut-être des difficultés au début, pour l'ensemble de définition. Là il n'y aura pas de difficulté. Et tracer la courbe, cela prend du temps mais cela ne pose pas de difficulté.

C : Surtout que je leur ai donné que 12 points. Cela va vite quand même. L'unité n'est pas très compliquée. Je leur donne l'échelle.

AL : D'accord.

ANNEXE N° 27 : RETRANSCRIPTION DE LA SEANCE VIDEO AVEC CLAIRE, LE 20/03/2000

C : Vous prenez votre cahier de cours. On va faire une activité qu'on gardera dans le cours.

Le cours est commencé, j'aimerais bien à un peu d'attention. Christine, je parle. Amélie et Audrey, le cours est commencé, vous ferez votre discussion en dehors du cours.

E : Je regardais le cours que je dois recopier.

C : Un paragraphe... Eh oui, les filles vous êtes en retard... Vous vous mettez derrière Simon et Frédéric... Vous viendrez me voir à la fin de l'heure...

Alors, dans le cahier de cours... On écoute là. Samedi on fait la notion de fonction. Même si tu n'étais pas là, Audrey, ça ne dérange pas, tu peux faire l'activité complètement. Cette activité on va la mettre exceptionnellement dans le cours, parce qu'après dans le cours on va toujours se servir de cette activité comme exemple. Mais vous cherchez comme si c'était le cahier d'exercices. C'est-à-dire vous cherchez l'exercice, vous prenez la correction comme si c'était le cahier d'exercices. Simplement on la colle dans le cours. Donc voilà. Jérémie tu nous prends la lecture de l'énoncé, du départ.

J : *Il lit le début de l'énoncé.*

C : Donc voilà. On a un triangle rectangle ABC, rectangle en ? Il est rectangle en quoi ?

J : C.

C : C. Et l'hypoténuse, elle vaut toujours la même distance 6 cm. On regarde : sur le dessin on voit bien que AC vaut x cm, on ne connaît pas a priori, et BC y cm. Ça on peut le faire varier, on va voir après. Grand un, préliminaires, tu nous lis la première question.

J : *Il lit la première question.*

C : Bon je vous laisse faire, je vous laisse chercher. Et si vous avez du mal, vous pouvez en dessiner au moins un, un glénatri avec x égale 2.

E : C'est quoi un glénatri ?

C : Un glénatri c'est le triangle, on vient de le dire. Un glénatri c'est le triangle là. D'accord ? Donc à chaque fois qu'on parlera d'un glénatri ça sera du triangle rectangle d'hypoténuse 6cm.

Alors première chose vous allez dessiner un glénatri avec x égale 2.

E : Dans le cahier de cours ?

C : Oui on fait tout dans le cahier de cours, comme si c'était le cahier d'exercices mais on fait tout dans le cahier de cours.

Les élèves cherchent, le professeur circule dans les rangs et s'adresse personnellement aux élèves.

6 minutes.

S *à un élève* : Essaie de chercher la réponse.

S *à un autre élève* : C'est une bonne idée, ça. Maintenant il va falloir chercher pour en savoir un peu plus. Alors c'est pas de l'à peu près, cela doit être précis.

S *à un autre élève* : Alors qu'est-ce que tu m'as tracé ? [AB], ouais.

8 minutes, 40 secondes

C *à la classe* : Bon alors on va essayer de regarder ensemble comment on peut faire pour le tracer précisément. C'est vrai qu'il y en a qui l'ont tracé à peu près. Première chose : qu'est-ce que vous avez tracé en premier en général ?

Les élèves : [AB].

C : [AB]. C'est sûr qu'on peut déjà tracer [AB]. Il y avait différentes façons, on va commencer par tracer [AB]. Je trace [AB]. AB c'est 6 cm, on le sait. Qu'est-ce que j'ai dit aussi comme hypothèse ?

Les élèves : x égale 2.

C : x égale 2. Donc la plupart d'entre vous, qu'est-ce que vous avez fait ?

Brouhaha.

C : J'aimerais bien qu'on lève la main pour répondre. Si vous levez pas la main, cela va être difficile. Christine ?

C : J'ai fait Pythagore...

C : Alors au début on va le tracer sans calcul. Amélie ?

A : On va faire un arc de cercle.

C : Un arc de cercle ce quel centre ?

A : A.

C : Voilà, de centre A et de rayon ?

A : 2.

C : Voilà 2 cm. Pour savoir où se trouve le point C. Comme on sait que la distance AC fait 6 cm, on sait que le point C se trouve sur cet arc de cercle-là. Quelle est l'hypothèse que l'on n'a pas encore utilisée ?

E : *Inaudible.*

C : Voilà c'est que le triangle est rectangle. Donc il y a un angle droit, si tu préfères. Alors, il y en a certains, j'ai vu, qui ont essayé avec l'équerre, à peu près, pour essayer de trouver le point C.

E : Inaudible.

C : Alors comment tu fais ?

E : Moi, j'ai tracé l'angle droit. J'ai fait 2 cm, j'ai tracé un grand trait et *inaudible.*

C : Oui, mais comment tu as fait pour trouver ça ? C'est toujours pareil, c'est avec ta règle. Ce qu'on veut, c'est des points précis avec le compas.

E : Mais c'est précis.

C : Attends, on regarde cette méthode-là et après on reviendra sur comment tu as fait d'accord ? C'est une deuxième méthode. Amélie ?

A : J'ai utilisé la règle avec le cercle *inaudible.*

C : Alors explique un peu plus, voilà. Qu'est-ce que tu sais sur le cercle circonscrit ?

A : J'ai dit que [AB] est le diamètre. On divise par deux, on trouve le milieu. On trace le cercle qui passe par A et B. Et après on sait que tous les points... Que si [AB] est l'hypoténuse du triangle, ce triangle est rectangle en ce point...

C : Alors on va reprendre ce qu'a dit Amélie en essayant d'expliquer un peu plus aux autres. Les autres, est-ce que vous avez compris ce qu'Amélie a dit ?

Brouhaha.

C : Amélie a rappelé la règle : si dans un cercle de diamètre [AB]... Si on a un cercle de diamètre [AB], alors, si on prend un point du cercle, M par exemple, alors ce triangle-là sera rectangle en M. C'est ce qu'elle a dit. Donc elle dit : on prend le milieu de [AB], c'est ce qu'elle a dit, on divise par deux, on prend le milieu de [AB], on trace le cercle de ce centre-là, c'est-à-dire on trace le cercle de diamètre [AB]. Et je sais que partout... Si je prends un point M ici, ABM sera rectangle. Et nous en plus il faut que le point C appartienne à quel cercle ?

E : A l'autre.

C : A l'autre le premier. Si on l'appelle C_1, ici on peut l'appeler C_2. Donc le point C doit appartenir à C_1 parce qu'on sait que la distance AC vaut 2 et à C_2 puisqu'on sait que le triangle il est rectangle. Donc le point C il se trouve ici. D'accord ? Vous allez essayer de le tracer.

12 minutes.

C : Bon une fois que vous avez tracé celui-ci, vous essayez de répondre par une phrase claire à la première question.

Le professeur circule dans les rangs et répond aux questions des élèves.

E : Qu'est-ce que c'est la figure ?

C : La figure c'est un glénatri ?

E : Oui mais dans la question qu'est-ce que ça veut dire la figure ?

C : Alors qui peut rappeler ce que c'est qu'une figure géométrique, déjà ? Cela peut être quoi une figure. Donnez-moi des exemples de figures géométriques.

E : Un carré.

C : Un carré, un rectangle. Nathalie ?

N : Un triangle.

C : Un triangle. C'est quelque chose de ce type là que l'on cherche. Donc qu'est-ce qu'on a vu là ? On a donné un exemple de glénatri avec x égale 2 cm. On aurait pu en dessiner d'autres avec par exemple x égale 3 cm. Et nous, ce qu'on nous demande c'est : où va se trouver à chaque fois le point C ? Sur quelle figure ?

E : C_1 et C_2.

C : Si je vous dessine à chaque fois un glénatri avec x égale 3, x égale 4, à chaque fois le point C il va être sur un endroit et cela va décrire une figure géométrique. C'est ce qu'on nous demande.

Brouhaha.

C : On lève le doigt pour répondre. Audrey ?

A : Sur le cercle de diamètre [AB].

C : Alors maintenant tu essaies de m'expliquer pourquoi c'est sur le cercle de diamètre [AB].

A: Parce que quand un triangle a sa base qui est le diamètre d'un cercle, il est rectangle.

C : Alors, qu'est-ce qu'on a, nous, en hypothèse ? On sait qu'il est rectangle. Ça il faut l'utiliser. Qui essaie de me faire une phrase claire pour me dire que C va se trouver sur le cercle de diamètre [AB] ? Quelle propriété on utilise ? Fatima ?

F : Si un cercle a pour diamètre l'un des côtés du triangle, le triangle sera rectangle.

C : Est-ce que c'est dans ce sens-là qu'on l'utilise ?

E : C'est dans l'autre sens.

C : C'est dans l'autre sens. On sait qu'il est rectangle. Alors Amélie, tu essaies de nous formuler.

A : *Inaudible.*

17 minutes.

C : Alors. tu sais plus comment le formuler. Alors on reprend. Par hypothèse on a un triangle rectangle donc on va l'écrire : le cercle circonscrit, donc on rappelle déjà que le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse. Ça c'est la règle que vous connaissez. Donc à chaque fois qu'on aura pris ce cercle de diamètre [AB], le point C appartiendra forcément à ce cercle. Donc c'est ce qu'on écrit : donc C appartient... Qui c'est qui me termine la phrase ?

E : *Inaudible.*

C : Au cercle de diamètre [AB]. Alors on va revenir sur ce que Nasser nous a dit tout à l'heure. On va écouter ce qu'il nous disait. Vas-y, comment tu voulais faire ?

N : J'ai tracé déjà [AC].

C : Tu traces déjà [AC].

N : Je trace une droite (CB) perpendiculaire à (AC). Que ça fasse un angle droit à (AC).

C : Comme ça ?

N : Ouais. Puis 6 cm.

C : 6 cm, où ?

N : Jusque la droite.

C : Oui mais comment tu fais ?

N : Le compas.

C : Voilà, on prend le compas et on fait un arc de 6 cm. Voilà.

E : C'est plus rapide ?

C : Bien sûr c'est plus rapide mais l'autre nous a permis de faire la réponse à la première question. Mais c'est très bien aussi ce qu'il a fait. Alors maintenant vous répondez à la deuxième question.... Si vous voulez vous aider un dessin, vous pouvez.

20 minutes

Le professeur circule dans les rangs et répond aux questions des élèves.

S *à la classe* : On ne vous demande pas de le tracer. Vous n'êtes pas obligés de le tracer. On vous demande de trouver la valeur de x.

E : Si, c'est marqué.

C : A la fin, mais on ne vous demande pas en premier de faire une figure. Il y en a qui essaient de commencer par une figure. La première question c'est pas de faire une figure, c'est de déterminer la valeur de x.

22 minutes.

S *à une élève* : Quelle est la première hypothèse ?

La réponse de l'élève est inaudible.

C : Isocèle, ça veut dire quoi isocèle ? Il a deux côtés égaux. Et aussi qu'est-ce qu'on sait dans un triangle rectangle ? L'hypoténuse c'est quoi ? Le côté le plus petit, le plus grand, le moyen ? Donc cela veut dire quoi s'il est isocèle.

E : *Inaudible.*

C : x=y. Et l'hypoténuse fait 6 cm. Voilà tu as la première réponse à la question que tu te posais.

Là il y a une hypothèse que vous avez utilisée : isocèle. Il y a peut-être une hypothèse que vous n'avez pas utilisée.

E : Il est rectangle.

C : Il est rectangle. Quel est le théorème que vous connaissez depuis très longtemps dans un triangle rectangle ?

E : *Inaudible.*

C : Alors, allez-y.

E : Encore.

C : Et oui encore lui.

Le professeur circule de nouveau entre les rangs.

S *à un autre élève* : Il faut que tu me donnes une valeur. x égale y ne suffit pas. Je te demande une valeur.

E : x égale 2.

C : Non x égale 2 tout à l'heure c'était un exemple. x, il varie.

A la classe : Alors, on explique la question. Tout à l'heure on a pris un exemple pour x, on a choisi x égale 2 cm. Mais en fait x ça peut varier. On peut choisir 1 cm, 2 cm, 3 cm...

E : *Inaudible.*

C : Non. Au départ de l'exercice. Mais là on nous demande de trouver la valeur de x, donc c'est une valeur bien déterminée, pour que le glénatri soit isocèle. Comme ça c'est à toi de déterminer la valeur de x, tu ne choisis pas. Tu dois prendre les hypothèses : il est isocèle et rectangle, et avec ça tu dois trouver combien vaut x. Alors qui a une idée de comment on peut faire ? Fatima ?

F : D'abord c'est un triangle rectangle...

C : C'est un triangle rectangle.

F : Et il est isocèle...

C : Il est isocèle.

F : Les deux côtés du sommet sont égaux... AC égale CB.

C : AC égale CB. D'accord ? Explique un petit peu pourquoi.

F : Parce que c'est un triangle rectangle isocèle...

C : Donc isocèle, on répète, isocèle deux côtés égaux pour savoir lesquels on utilise le fait que ?

F : Ce sont les deux côtés au sommet...

A : Il est rectangle.

C : Voilà, Amélie, il est rectangle, donc dans un triangle rectangle qu'est-ce qu'on sait ? L'hypoténuse ?

E : C'est le plus grand côté.

C : Est le plus grand côté. D'accord ? Donc forcément les deux côtés égaux sont AC et... regardez votre figure... et CB. Déjà on va marquer ça. Donc première chose : ABC est un triangle isocèle donc il a deux côtés de même longueur. Après on utilise le fait qu'il est rectangle : ABC est rectangle en C, l'hypoténuse étant [AB], donc forcément on a AC égale BC. Voilà les deux côtés égaux. Il est isocèle : deux côtés égaux et comme il est rectangle en C, [AB] est le plus grand côté et forcément AB égale BC.

E : Après on utilise le théorème de Pythagore.

C : Après on utilise le théorème de Pythagore. Je vous laisse rédiger, je vais passer voir. Donc d'après le théorème de Pythagore... Je vous laisse rédiger sur votre feuille et trouver la valeur de x.

Le professeur circule dans les rangs.

27 minutes.

C *à une élève* : On fait comme ça pour résoudre une petite équation. Quand on a des carrés de chaque côté comme ça on les enlève ? Tu regarderas, on n'a pas le droit de faire ça. Comment on fait ?... Première chose on essaie d'isoler...

E : *Inaudible.*

C : Voilà, première chose. Maintenant tu essaies de voir après ce que cela donne.

A un autre élève : Tu continues ensuite, l'aire du triangle. La formule c'est quoi ?... Ça c'est un triangle quelconque.

32 minutes.

C : Bon, on va donner la correction de celui-ci. On a dit que AC égale BC, vous l'avez tous marqué sur vos feuilles, donc x égale y. Donc je ne finis pas la phrase, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C, on a. Cette phrase-là vous l'avez tous marquée. On écrit $AC^2 + BC^2 = AB^2$. On remplace par ce qu'on connaît, AC ça vaut ?... x. x^2. Donc ça c'est équivalent à x^2 + ... y, mais y on a dit que ça valait ... x aussi donc x^2 égal à AB^2 ? ... 36 ou 6^2. Voilà. Après on continue, cette équation-là est équivalente à : $x^2 + x^2$? $2x^2$ égal à 36. Qui me rappelle comment on résout une petite équation avec des carrés ?

Brouhaha.

C : Attendez, on lève la main. Jérémie qu'est-ce que tu veux dire ?

J : Le 2 on le passe de l'autre côté.

C : Alors, ça veut dire quoi : on passe de l'autre côté ?

J : On met 36 demi.

C : Alors en mathématique quand on passe le deux de l'autre côté cela s'appelle comment ?

E : On transpose.

C : Voilà, on transpose le 2 de l'autre côté. Ça donne $\frac{36}{2}$, ça fait 18. Et $x^2 = 18$?

E : Racine...

E : Moins racine...

C : Voilà, je vous rappelle, une équation comme ça, ça a deux solutions. Mais voilà... Mais une longueur n'est jamais négative. Donc normalement cela aurait donné x égale $\sqrt{18}$ ou

$-\sqrt{18}$. Or, une longueur n'est jamais négative donc $-\sqrt{18}$... Donc x n'est pas égal $-\sqrt{18}$. Donc x égale $\sqrt{18}$. Et $\sqrt{18}$ on peut l'écrire comment ? Voilà, c'est 9 fois 2. Donc $3\sqrt{2}$. Voilà la première chose. Après l'aire. L'aire d'un triangle rectangle ? Alors qui peut me rappeler la formule de l'aire ?

E : Base fois hauteur divisée par 2.

C : Alors la formule générale c'est base fois hauteur divisée par 2. Alors ici aire de ABC, on va la marquer avec des lettres. Qu'est-ce que vous prenez comme base ? Comme hauteur ?

E : *Inaudible.*

C : Pour l'instant juste avec le nom des côtés. Après on va remplacer par les valeurs. Alors Simon tu répètes plus fort à tout le monde.

Si : Pour base on prend AC ou BC.

C : Et comme hauteur ?

Si : Pareil.

C : Voilà, cela donne AC multiplié par CB divisé par 2. Est-ce qu'il y a quelqu'un qui avait envie d'écrire autre chose ? Tout le monde avait pris ça ? Bon alors c'est bien. Bon alors comme disait Bastien on remplace par les valeurs qu'on connaît. Cela donne x multiplié par x sur 2. x^2 sur 2. Bastien, tu laisses les autres le faire et tu continues l'exercice quand tu as trouvé.

37 minutes.

Le professeur circule dans les rangs.

40 minutes

C : Tout le monde écoute, dans le grand 2, on n'est plus dans le cas d'un triangle isocèle. On repart d'un glénatri général, on sait seulement que l'hypoténuse vaut 6 cm. x le côté AC et y le côté BC. Et on nous demande de calculer y en fonction de x.

Le professeur circule dans les rangs.

42 minutes.

C : Alors, là tout le monde a trouvé 9 cm^2 pour l'aire. Après, pour répondre à deuxième question. Normalement tout le monde a commencé, qu'est-ce qu'on utilise ? Emilie ?

E : *Inaudible.*

C : Voilà on va de nouveau utiliser le théorème de Pythagore parce que le triangle est rectangle. Alors je vous laisse faire le théorème de Pythagore.

Le professeur circule dans les rangs.

C : Tout le mode a pris le théorème de Pythagore. Vous avez tous trouvé : y égale racine carrée de AB^2, enfin AB, x, tout le monde a trouvé ça ? AB^2 moins 36. Vous avez tous trouvé ça au départ. Et après... Non c'est pas AB^2 moins 36, c'est 36 moins AC^2. Et là on peut mettre directement x^2. Et après il y en a certains qui me font ça : y égale 6 moins x. Est-ce que j'ai le droit de faire ça ? Audrey tu ne dis rien parce que toi je t'ai déjà expliqué.

E : Non.

C : Pourquoi non ?

E : Parce que dans Pythagore, on fait pas ça.

C : Pythagore on l'a appliqué, mais maintenant c'est un calcul. Karine ?

K : *Inaudible.*

C : Voilà, sous la racine on a une soustraction. Est-ce qu'il y a une formule de ce type qui existe : $\sqrt{a-b}$ égale $\sqrt{a}$ $-\sqrt{b}$?

E : *Inaudible.*

C : Il faut que l'on ait une multiplication ou... ?

E : Une division.

C : Ou une division. Donc là ce qu'on a fait, et bien on n'a pas le droit. Si ? Si tu crois que si on va regarder un exemple. Vous prenez par exemple $\sqrt{6^2 - 3^2}$, vous calculez. Tu calcules de l'autre côté 6 moins 3. Et tu regardes si cela fait la même chose. Prends un exemple si tu n'es pas convaincu. On l'avait déjà fait ça au début de l'année. Donc ça on n'a pas le droit. Donc en fait, on s'arrête à y égale $\sqrt{36 - x^2}$. D'accord ? Et on va pas plus loin.

47 minutes.

C : Bon, après qui est-ce qui nous lit la question ? Fatima ? Tout le monde écoute là parce que cette question-là n'est pas très facile.

F : *Inaudible.*

C : Alors, le réel x, a priori, il ne peut pas prendre toutes les valeurs, c'est ce qu'on nous dit. Jérémie je suis en train d'expliquer la question et on va la corriger alors tu écoutes. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre le réel x. Est-ce que le réel x, pour vous, peut prendre toutes les valeurs ?

E : Pas négatives.

C : Alors de quoi, pas négatives ? x ne peut pas prendre les valeurs négatives ? Alors pourquoi ?

E : C'est une longueur.

C : C'est une longueur, voilà. Première chose, c'est une longueur donc déjà x ne peut pas être négatif.

E : *Inaudible.*

C : Pourquoi il peut pas être nul ?

E : Il peut pas être égal à 0.

C : Bon nous on va considérer que s'il est nul, cela fera un triangle mais tout plat. Après, est-ce que l'on peut prendre toutes les valeurs de x ? Est-ce que l'on peut prendre tous les négatifs ?

E: *Inaudible.*

C : Alors, si ça sort du cercle. Alors on va redessiner un glénatri. Un segment [AB] et le cercle. Alors tu me dis que c'est quoi qui peut pas sortir du cercle ?

E : Ben le point C.

C : Voilà, le point C on a vu qu'il était tout le temps sur le cercle. Donc je peux le prendre là, on va marquer C_1, je peux le prendre là, C_2, je peux le prendre là, C_3, je peux le prendre là C_4. Donc à chaque fois on a une valeur de x différente. Ça c'est toutes les valeurs de x.

E : *Inaudible.*

C : Voilà, en fait au maximum le point C peut venir jusque-là donc là la distance x vaut combien ?

E : 6 cm.

C : 6. Et la plus petite qu'elle va pouvoir prendre ?

E : 0.

C : 0. Pourquoi ? Parce que ça commence au point A. Et on peut le continuer aussi de l'autre côté... On peut le prendre aussi... Et on trouve la même chose. On peut tomber seulement jusque là. Donc d'après la figure, qu'est-ce qu'on vient de voir ?... Que le nombre x appartient à quel intervalle ?

E : [0 ; 6].

C : [0 ; 6]. Et on va prendre l'intervalle fermé parce qu'on va considérer que si C est au point A ou au point B, c'est un triangle plat. Donc on va l'écrire ça maintenant. D'accord ? Donc on va écrire : géométriquement... Donc ça, c'est une première preuve géométrique. Géométriquement, le point C appartient au cercle de diamètre [AB] donc la distance AC est comprise entre 0 cm et 6 cm. Donc x appartient à... Comment je le note ?

E : *Inaudible.*

C : Voilà, crochets fermés, l'intervalle 0, 6... Est-ce que ça c'est une preuve ? Est-ce que ça c'est une démonstration, Karine ?

K : non.

C : Non. Alors en fait, on peut faire une vraie démonstration, comment on pourrait faire une vraie démonstration ? On va pas la faire aujourd'hui, mais on va regarder comment on pourrait faire. Est-ce qu'il y a quelqu'un qui a une idée de comment on pourrait faire la démonstration ?... Qu'est-ce qu'on fait quand on regarde cette expression-là ? Qu'est-ce qu'on sait sur une racine carrée ?

E : C'est tout le temps positif.

C : C'est quoi qui doit être tout le temps positif ?

E : y.

E : La racine carrée.

E : L'inconnue.

C : C'est quoi l'inconnue ? x doit être toujours positif ?

E : Non le résultat.

C : Donc ça ? $\sqrt{36-x^2}$, ça doit toujours être positif. Forcément c'est une racine. Une racine c'est toujours positif. Mais quelles vont être les valeurs interdites pour x ?

52 minutes.

E : Eh ben euh

E : 6.

C : Est-ce que j'ai le droit de marquer ça : $\sqrt{-2}$?

E : Ben non.

C : Ben non. Et pourquoi j'ai pas le droit de marquer ça ?

Brouhaha.

E : Il faut mettre moins racine de 2

C : Oui mais cela ne me donne pas la même chose. Moi je veux... Pourquoi j'ai pas le droit de marquer ça ? Bien sûr on a le droit d'écrire ça ($-\sqrt{2}$) ça c'est vrai qu'on a le droit de le marquer. Qu'est-ce qu'on a appris sur les racines ?

E : Sous une racine c'est jamais un nombre négatif.

C : Voilà, sous une racine c'est jamais un nombre négatif. Donc là c'est quoi qui est sous la racine ?

E : $36-x^2$.

C : Voilà ce qu'il faudrait démontrer... On le démontrera un autre jour... Il faudrait chercher les valeurs pour que $36 - x^2$ soit ?

E : Positif.

C : Positif. D'accord ? Bon ça on y reviendra un autre jour. Pour l'instant on va en rester là. On va passer à la suite. On a trouvé les valeurs, on le redémontrera un autre jour. Alors : donner la fonction f qui exprime comment y varie en fonction de x... Alors on avait vu déjà, samedi, comment on notait une fonction. Alors comment je vais la noter la fonction ?

E : f(x).

C : On l'appelle f(x) égale... Egale quoi ? Comment y varie en fonction de x. Donc f(x), il est égal à quoi ?

E : y égale $\sqrt{36-x^2}$.

C : Voilà : $\sqrt{36-x^2}$. Et f(x) est définie sur quoi ? On a dit que x était compris entre quoi et quoi ?

E : 0 et 6.

C : Voilà. f(x) égale racine de $\sqrt{36-x^2}$ définie sur [0 ; 6]. Voilà, on a une fonction : pour une valeur de x, on trouve la valeur de y. C'est ce qu'on appelle une fonction.

Bon pour voir tout de suite si vous avez compris : si je vous dis x égale 3 cm, trouvez-moi la valeur de y.

E : C'est pareil que remplir le tableau.

C : Voilà, exactement, on va voir que c'est pareil que remplir le tableau.

Comment je fais directement pour trouver la valeur de y si j'ai x égale 3 cm ? Si j'ai x égale 3 ?

E : *Inaudible.*

C : Comment on fait ? Non je ne vous demande pas le résultat, je vous demande comment on fait.

E : On remplace x.

C : Voilà, on remplace x par 3. Donc en fait, ça c'est ce qu'on nous demande à la question d'après : remplir le tableau.

Les élèves cherchent.

C : On prend la calculatrice pour calculer.

Les élèves cherchent.

C : N'essaie pas de deviner Sébastien, cherche question par question.

Oh Aurélie tu ne vas pas arriver au bon résultat. Parce que regarde sur ta calculatrice c'est tapé... Regarde...

A : $\sqrt{36}$ moins...

C : Bon voilà d'accord.

58 minutes.

C *à deux élèves :* Quand vous aurez fini, vous essaierez de démontrer ce qu'on n'a pas démontré.

E : Pourquoi nous ?

C : Parce que vous avez fini. De toute façon ce sera à faire pour plus tard, alors autant le faire maintenant.

Amandine, c'est pas les bons résultats. Vérifie-moi celui-ci...

Une heure.

Bon tout le monde écoute là. On va donner les résultats, ceux qui n'ont pas fini, vous vérifierez chez vous les résultats. On va donner ce qu'on avait trouvé dans le tableau. Tout le monde y est, là. Bon le premier. Tiens, Jérémie tu donnes les résultats à tout le monde. Tout le monde écoute. Alors pour x égale 0. f(x) ?

J : 6.

C : Après ? f(0,5) ? 6.

J : 5,9 ; 5,8 ; 5,6...

C : Attends Jérémie. Je crois que les autres ne peuvent pas suivre ! Alors tu reprends dans l'ordre. Tu vous dis la valeur de x et la valeur de f(x) dans l'ordre.

J : 1 / 5,9 ; 1,5 / 5,8 ; 2 / 5,6...

C : Stop. Bon je vais reprendre parce que Jérémie n'est pas capable de parler correctement.

J : Je vais le faire.

C : Alors montre-nous que tu es capable de le faire. 2,5 ?

J : Ça fait 5,4.

C : C'est arrondi au dixième près ?

J : Oui.

E : Non ça fait pas ça.

C : Ça fait 5,5. Après, 3 ça donne ?

J : 5,1.

C : 5,2. Bon allez je continue. Si x égale 3,5, f(x) égale 4,9. Tout le monde suit. Si x égale 4, f(x) égale 4,5. Si x égale 4,5, f(x) égale 4. Si x égale 5, f(x) égale 3,3. Si x égale 5,5, f(x) égale 2,4. Si x égale 6, f(x) égale 0. Vous êtes d'accord ?

J : Pour arrondir on choisit.

C : Non tu choisis pas. Quand tu as un 5 et que tu as un nombre après, tu arrondis. Montre-moi ta calculatrice, on va regarder.

Donc une fois que vous avez fait ça, vous prenez votre papier millimétré et vous placez les points.

63 minutes.

Les élèves cherchent.

C : Il faudrait pas mettre trois heures pour tracer la courbe. Il y en a qui n'ont pas encore commencé alors qu'il y en a qui ont déjà fini. On se dépêche.

Et vous, démontrez ce qu'on n'a pas démontré tout à l'heure.

E : Quoi ?

C : Ce qu'on a démontré géométriquement, vous le démontrez par le calcul.

Quand vous avez fini les autres, vous essayez de démontrer ce qu'on n'a pas démontré tout à l'heure.

Bon voilà, maintenant tu me traces la courbe.

E : Ça va pas faire une droite ? Ça fait une courbe ?

C : On te demande de tracer tous les points, tu verras bien après si ça fait une droite. Je ne sais pas moi. Tu verras bien.

Alors voilà ça se termine ici.

67 minutes.

C : Alors normalement une fois que vous avez tracé la courbe, vous devez arriver à cette courbe-là. Alors, on va réexpliquer et on va voir si on retrouve ce qu'on a vu sur le dessin, tout à l'heure. Alors quand x a une petite valeur, par exemple 0,5, y ça a une valeur comment ? La valeur de y ? Si je prends par exemple ici 1, elle est comment la valeur de y ? Quand x vaut 1, y vaut combien ?

E : 5,9.

C : Mais comment on le retrouve aussi sur le graphique ?

E : On monte jusqu'à...

C : Voilà. Donc je vais pouvoir faire, en fait, une droite et on va pouvoir relire la valeur qu'on avait trouvée. Voilà je trace ça. J'arrive à f(x) et f(x) ça vaut bien 5,9 si vous mesurez. Maintenant je vous demande si x égale 4,2 , vous me dites combien vaut f(x) ? On prend x égale 4,2 et vous regardez combien vous trouvez pour f(x).

Brouhaha.

C : Alors il y a différentes valeurs : 4,2 , 4,3 , 4,4... En fait, on arrive vraiment proche de... En fait, on arrive quasiment sur 4,2. Tout le monde est à peu près égal à... Et comment ça se fait ? Regardez tout à l'heure. Qu'est-ce qu'on a fait à la première question ? Le glénatri isocèle, son côté il valait combien ?

E : $4\sqrt{2}$.

C : $4\sqrt{2}$ et ça fait combien à la calculatrice ?

E : 4,2.

C : 4,2. On retrouve bien que si x égale 4,2, y vaut 4,2 , 4,3 parce que ce sont des valeurs approchées. On trouve le résultat qu'on avait fait par le calcul. x est égale à 4,2 donc y est aussi à peu près égal à 4,2 et on retrouve bien que sur le glénatri la valeur de x est égale à la valeur de y. C'est un glénatri isocèle. D'accord ? Donc on retrouve bien ce qu'on a fait tout à l'heure, ce qu'on avait sur la figure. Donc la courbe nous donne bien des informations. Le problème c'est que c'est que de l'à peu près. Après sur la courbe, quand on regarde, quand on a les valeurs de x et qu'on les augmente, elles font quoi les valeurs de f(x) ?

E : Elles descendent.

E : Elles diminuent.

C : Elles diminuent. Et bien ça en fait, on dira, on le verra la prochaine fois dans le cours, on dira qu'en fait la fonction est décroissante. Et ça on va le résumer dans un tableau. Quand on augmente les valeurs des abscisses, la valeur des ordonnées, f(x), diminuent. C'est ce qu'on appelle un tableau de variation. C'est ce qu'on va résumer dans un tableau. On fait un tableau où on met dans la première ligne les valeurs de x. Les valeurs de x elles sont comprises entre combien et combien ?

E : 0 et 6.

C : 0 et 6. Je place les deux valeurs. La deuxième ligne c'est les valeurs de f(x). On a dit que f(x) elle faisait quoi quand les valeurs de x augmentaient ?

E : Ça diminuait.

C : Les valeurs de f(x) diminuaient. Quand la valeur de f(x) augmente, la valeur de f(x) diminue. Si x égale 0, f(x) ça vaut combien ?

E : 6.

C : 6. On le retrouve bien sur le dessin, si x égale 0, la longueur y, c'est AB aussi, et ça vaut 6. C'est ce qu'on va mettre dans le tableau : on part de 6 et quand x vaut 6, f(x) ça vaut combien ? 0. Voilà, on résume : tout se marque dans un tableau, c'est ce qu'on appelle le tableau de variation. Donc vous mettrez au-dessus : tableau de variation de la fonction f.

72 minutes.

C : Alors après, on passe au grand trois. C'est bon, tout le monde a eu le temps de copier ? Grand trois. Dorothée, tu nous lis l'énoncé du grand trois ?

D : *lit l'énoncé.*

C : Cette fois c'est z, c'est l'aire du glénatri. On a déjà rappelé tout à l'heure la formule de l'aire donc il faut me calculer z en fonction de x.

Les élèves cherchent.

C : Alors qui nous répète une fois la formule de l'aire ? Quelqu'un peut me rappeler ce qu'on a vu tout à l'heure, la formule de l'aire ?

Brouhaha.

C : J'aimerais bien qu'on lève la main parce que là je ne comprends rien. Emilie ?

E : Base fois hauteur divisée par 2.

C : Et là quelle est la base ? Quelle est la hauteur ? Tu me précises avec le nom des côtés. Nathalie ?

N : AC multiplié par CB divisé par 2.

C : Après on remplace par ce qu'on connaît. AC ça vaut combien ?

E : C'est x.

C : C'est x. Multiplié par CB ?

E : y.

C : y. Divisé par 2. Mais ce qu'on nous demande, c'est z en fonction de x. Donc comment je peux faire ?

E : y, on remplace.

E : y c'est égal à x.

C : y c'est égal à x ? Audrey ?

A : y est égal à $\sqrt{36-x^2}$.

C : On l'a vu dans l'exercice juste avant, y est égal à racine de... Donc on remplace par 36 moins x^2, sur 2. Voilà, z est égal à ça. Après qu'est-ce qu'on nous dit ? Donner la fonction g qui exprime comment z varie en fonction de x. Qu'est-ce que je vais écrire ? Qu'est-ce que c'est la fonction g ? La fonction qui exprime comment z varie en fonction de x...

E : C'est la même chose.

C : Voilà alors tu me dis ce que j'écris.

E : *Inaudible.*

C : C'est f qu'on l'appelle ? On l'appelle comment ?

E : g(x).

C : Voilà, g(x) égale...

E : x fois $\sqrt{36-x^2}$ divisé par 2.

C : Définie sur, comme là on a le même problème, [0 ; 6], géométriquement c'est toujours la même chose. Le glénatri n'existe que si x appartient à [0 ; 6]. Voilà. Cette fonction-là je ne vous demande pas de la tracer, je vous la donne directement.

77 minutes.

C : Alors la première question, on la lit. Petit 2 : quelle est l'aire d'un glénatri qui a pour côté AC égale 2 cm ? Seulement à partir de la courbe, sans la calculer... Pour x égale, quelle est l'aire du glénatri ?

E : *Inaudible.*

C : Sans le calcul.

E : *Inaudible.*

C : Bon alors on va voir ce que tu trouves.

E : 5,7.

C : 5,7 ? Tout le monde trouve ça ? Bon Amélie tu m'expliques comment tu fais.

A : Je mesure au niveau du 2.

C : Tu mesures quoi au niveau du 2 ? Lequel de 2, celui des abscisses ou celui des ordonnées ?

A : Abscisses.

C : A partir de celui des abscisses, je trace quoi ?

A : Une droite jusqu'à temps que ça croise la courbe.

C : Une droite verticale.

A : I*naudible.*

C : Voilà. Bon on va expliquer. Je connais... L'axe des abscisses représente le côté x, l'axe des ordonnées c'est quoi ?

E : L'aire.

C : L'axe des ordonnées, c'est l'aire puisque c'est g(x). En fait pour une valeur x donnée, je regarde la valeur de g(x). Hop... Et après je fais verticalement et après vous lisez 5,6 , 5,7. Finalement on se rend compte qu'avec la courbe c'est bien, ça va vite mais le problème c'est que c'est pas très, très précis.

E : On peut calculer.

C : Oui là on peut la calculer mais on verra des fois qu'on peut pas la calculer, c'est pour ça qu'une courbe ça peut être bien. Mais là on est dans le cas où on connaît la fonction mais tu verras la prochaine fois des cas où on ne connaît pas la formule. Quand on prend x égale 2 et qu'on lit la valeur de g, on dit que l'image de 2 par la fonction g c'est 5,7. En fait, on transforme 2 par g et ça donne 5,7. On marquera ça dans le cours : l'image de 2 est 5,7. Après, vous tracez les deux droites et vous mettez pour conclure : l'aire du glénatri qui a pour côté 2 cm est égale à 5,7 cm².

Et après on va essayer de répondre à la troisième question : quelle est l'aire maximale ?

Les élèves cherchent.

C : Toujours avec le graphique.

Alors je vois que tout le monde a trouvé la bonne réponse.

E : *Inaudible.*

C : Ah, alors on verra après comment on peut le démontrer. Mais pour l'instant on exploite là. Alors comment je fais pour déterminer l'aire maximale ? J'aimerais bien entendre Dorothée, tiens.

D : ...

C : T'as trouvé la valeur ou pas ?

D : J'ai pas trouvé.

C : T'as pas trouvé. Alors, on va regarder ensemble. Où se trouve l'aire ? Où est-ce que je lis l'aire du glénatri ?

E : On regarde les ordonnées.

82 minutes.

C : On regarde sur les ordonnées. Alors à quel endroit est-ce que je vais trouver l'aire qui sera la plus grande possible ?

E : *Inaudible.*

C : Mais comment tu fais pour la trouver ?

E : *Inaudible.*

C : Voilà, on trace... On regarde le point le plus haut de la courbe, entre guillemets. On regarde : il est ici. On regarde à quelle aire ça correspond en traçant la droite horizontale. Bon c'est ce qu'on fait et on trouve : 9 cm^2. Et après on nous demandait pour quelle valeur de x cette aire est maximale.

E : 4,2.

C : Voilà, après on trace... On va regarder quelle valeur de x et on trouve à peu près 4,2. Donc ici on trouve 9 et ici 4,2. Après on va conclure. Donc finalement c'est quoi la phrase qu'on va écrire pour répondre à la question. Qui me rédige la réponse ? Amandine ? Vas-y.

A : L'aire maximale que peut avoir un glénatri est de 9 cm^2 et la valeur de x est alors de 4,2 cm.

J : $3\sqrt{2}$.

C : Pourquoi Jérémie tu as envie de mettre $3\sqrt{2}$?

J : Parce que le triangle est isocèle.

C : Voilà, tout à l'heure on a vu que quand le triangle est isocèle, en fait ça faisait 9 cm^2 et on trouvait $3\sqrt{2}$. $3\sqrt{2}$ ça fait à peu 4,2. Donc en fait, on pourrait démontrer ce résultat par le calcul. Pour voir si vraiment c'est $3\sqrt{2}$. C'est pas sûr. Bon ça, ça se démontre. On n'a pas le temps de le faire aujourd'hui mais la prochaine fois on le fera. Lundi prochain on le fera. On essaiera de démontrer si c'est vraiment un glénatri isocèle. Parce que la courbe elle ne donne pas les valeurs exactes. On lit 4,2. Il y a même Fatima qui lisait 4,4. Donc tout le monde trouve pas vraiment la même réponse. Donc en fait, on devrait le démontrer par le calcul. Pour terminer on va tracer le tableau de variations de g. Quand x augmente, f(x) il fait quoi ?

E : Il augmente jusqu'à 4,2 et après il baisse.

C : f(x) augmente jusqu'à 4,2 et après f(x) diminue. Et on résume ça dans un tableau. Alors : tableau de variation de g. Je vous laisse le faire.

87 minutes.

C : Attention la fonction là elle s'appelle comment ?

E : g.

C : Ici c'est g(x) que je mets et pas f(x). C'est le tableau de variation pour g.

Donc on a vu tout à l'heure, que quand les x augmentent, la fonction commence par ?

E : Augmenter.

C : Augmenter et après la valeur de g(x) va diminuer. Et on a dit que c'était à quel endroit que cela changeait ?

E : 4,2.

C : Voilà à peu près 4,2. Donc on démontrera par le calcul que ce n'est que de l'à peu près 4,2. Donc dans le tableau, on va pas mettre 4,2. On a dit qu'on va le démontrer... Jérémie avait déjà trouvé. C'était quoi en fait la vraie valeur ?

E : $3\sqrt{2}$.

C : Voilà, $3\sqrt{2}$. Donc dans le tableau on va marquer $3\sqrt{2}$. C'est la vraie valeur. Quand x vaut 0, g(x) ça vaut combien ? On regarde si on sait plus. Quand x égale 0, ça vaut 0. C'est toujours l'aire du triangle. Si x égale 0, on a dit que le triangle était comment ?

E : Plat.

C : Il était plat, voilà, il existait pas. Ça vaut bien 0. ça donne bien ce qu'on avait vu sur la courbe. Si x égale $3\sqrt{2}$, l'aire vaut combien ?

E : 9.

C : 9. On l'a déjà démontré ça par le calcul. Si x égale 6 ?

E : 0.

C : 0. parce que ça correspond à mon triangle à nouveau plat mais complètement de l'autre côté. On trouve 0. Voilà le tableau de variation de g.

ANNEXE N° 28 : ENTRETIEN APRES LA SEANCE VIDEO AVEC CLAIRE

AL : Est-ce que cela s'est passé comme tu le pensais ?

C : Euh, pas vraiment non. Et en fait je pense que j'aurais dû être beaucoup plus dirigiste, au moins sur les préliminaires pour pas rester trop longtemps dessus. C'est pour cela que j'ai accéléré un peu le deuxième groupe.

AL : Tu penses avoir passé trop de temps sur cette partie ?

C : En même temps cela leur a permis de chercher. Mais l'objectif c'est quand même de faire un travail sur les fonctions qui était vachement réduit à ce moment-là.

AL : Qu'est-ce que tu n'as pas fait ? C'est juste l'équation à la fin.

C : Ouais, j'ai pas fait l'équation. Et je suis peut-être passée un peu trop vite, enfin cela n'a pas trop mal marché sur les fonctions, mais je suis peut-être passée un peu vite sur les fonctions... Et puis je n'ai pas fait la démonstration que j'aurais aimé faire avec au moins le groupe fort. Le problème du groupe fort c'est qu'ils ne trouvent pas en général. Ils n'ont pas d'idées. Le premier groupe, c'est le groupe qui est très scolaire, qui sait appliquer une méthode, les règles. Mais quand je suis en cours, au niveau des activités, c'est jamais eux qui ont les idées. Et on l'a vu dans le deuxième groupe, ils avaient plus d'idées, plus d'intuitions. Et c'est pour cela que c'était plus dur de faire les préliminaires avec le groupe fort. Bon sinon dans l'ensemble cela a été à peu près. Mais j'aurais voulu faire un travail un peu plus approfondi au niveau des fonctions. Le problème c'est que j'ai voulu en même temps faire un exercice de recherche pour laisser vraiment chercher sur des choses qui étaient un peu inconnues et en même temps je voulais introduire des notions sur les fonctions que je n'ai pas pu approfondir.

AL : Ton préliminaire aidait à comprendre la situation.

C : Voilà. Après ils n'avaient plus de souci. Cela marchait bien.

AL : Oui c'est ça, cela aidait bien à comprendre le problème.

C : Ouais, c'est vrai : si j'étais passée trop vite sur ça, peut-être qu'après ils auraient eu des problèmes.

AL : Tu aurais pu donner le préliminaire à faire à la maison.

C : Ouais.

AL : Et faire une petite correction.

C : Et ils auraient cherché quand même. Même s'ils avaient pas trouvé, ils auraient tout de même cherché un petit peu. Cela aurait permis d'en faire plus après.

AL : Et tu n'as pas fait l'ensemble de définition.

C : Là, je me suis dit si on commence sur ça, je vais passer... C'est pour cela quand j'ai vu l'heure, j'ai dit : bon, je passe. Pour faire vraiment le travail sur les fonctions. Surtout qu'au niveau géométrique, ils l'ont bien compris. Je me suis dit : bon on va passer.

AL : Et sur les fonctions... ?

C : Sur les fonctions, ils ont bien compris comment on lisait graphiquement le maximum. Même le tableau de variation, c'est vite compris. Fonction croissante, fonction décroissante... Cela c'était plus ou moins attendu dans le sens où c'était... C'est quand même assez visuel.

AL : Oui.

C : J'ai été étonnée quand même que, là, sur le théorème de Pythagore, beaucoup, beaucoup de mal à faire les calculs. Enfin étonnée... Pas trop étonnée, mais...

AL : Beaucoup de mal avec les racines.

C : Ouais. J'ai fait du travail en aide individualisée... Mais combien de fois j'y suis revenue dans l'année... Plusieurs fois dans l'année. Toute l'année, on a fait un énorme travail. J'en ai fait encore au mois de février, j'ai refait trois séances d'aide individualisée sur les racines. Mais à chaque fois... J'ai l'impression qu'ils ne progressent pas du tout. J'ai l'impression qu'ils font systématiquement les mêmes erreurs. On avait fait tout un travail sur des exemples pour bien leur montrer pourquoi c'était faux, pour bien leur prouver... Et puis j'arrive pas...

AL : Oui dans les deux groupes le 6 moins x est sorti.

C : Oui. Et je ne sais pas quoi faire parce que j'ai repris des exercices de troisième. J'ai essayé de reprendre tout quoi. Alors au bout de trente secondes, quand ils voient la formule $\sqrt{a+b}$ égale $\sqrt{a} + \sqrt{b}$: ah, oui, c'est vrai qu'avec la multiplication. Mais même c'est pas direct. Donc là j'en ai profité pour montrer que c'est faux mais je ne peux pas rester l'heure sur ça.

AL : Sinon, le reste ? Sur les fonctions, est-ce qu'il y a des choses à dire ?

C : Eh ben les calculs là, par exemple sur les tableaux de valeurs. Le premier groupe : les calculs ont été vite mais le deuxième groupe... Ils savent pas utiliser la machine. Et pourtant ça on l'a déjà vu aussi. En ce moment même, j'ai fait des groupes pour revoir l'utilisation de la machine. Là ça veut dire qu'ils ne comprennent pas l'expression du tableau. Ils n'arrivent à la retransmettre sur la machine au sens où ils n'ont pas compris. Et c'est à ce moment-là que Michaël m'a refait la même erreur. Au lieu de prendre $\sqrt{36 - 0{,}5^2}$, il me prenait $\sqrt{36}$ et il mettait 6 moins 0,5. Il faisait $\sqrt{36}$ - $\sqrt{0{,}5^2}$. Il retransformait l'écriture. Il refaisait la même erreur que précédemment. Et sinon le nombre qui ne savait pas servir de sa machine. Là je pensais pas par contre parce que même en troisième ils utilisent pas mal la machine je crois. Enfin quand j'ai fait la puissance en quatrième on a vu comment on utilisait la machine pour faire les puissances.

Al : Cela dépend des profs. Au collège il y a des profs qui interdisent la machine.

C : Moi je ne leur interdis jamais la machine en exercice mais ils savent que pour certains devoirs je peux interdire la machine. Mais là j'ai été très étonnée. Sinon après sur la construction de la courbe ils ont tout de suite compris... Et ben, il y en a une qui m'a dit : madame, on va trouver une droite. J'ai dit : trace, après on verra si on trouve une droite.

AL : Qu'est-ce qui a le mieux marché sur cette activité ?

C : Tout ce qui est au niveau fonction, je pense que les notions pour samedi cela devrait aller mieux. Là comme ils ont compris le fonctionnement d'une courbe, de la fonction. Encore que la fonction je suis moins sûre. Mais tout ce qui est représentation graphique, lecture d'un maximum, tout ça, ils l'ont bien compris. Donc je pense que toutes ces notions qui vont être introduites, cela va permettre d'avoir un cours beaucoup plus simple pour eux.

AL : Tu me rappelles ce que tu fais samedi ?

C : Images et antécédents. Puis représentation graphique.

AL : Là tu as plus vu image qu'antécédent.

C : Oui on l'a quasiment pas vu et je ne leur ai pas introduit la notion tout de suite parce que je me suis dit qu'ils allaient se mélanger. Mais j'ai juste parlé d'images parce que samedi on verra qu'on peut parler d'image et aussi d'antécédent. Et puis après je pense que samedi je n'aurai pas le temps, lundi je ferai tableau de variation et maximum. En fait je vais faire un cours lundi comme je les prends deux heures classe entière.

AL : Ce qui a moins bien marché ? Ce sont les racines et l'écriture de la formule au départ ?

C : Ouais. Je pensais pas que Pythagore allait leur poser problème à ce point-là.

AL : Est-ce que cela posait problème même dans le numérique ? Ils avaient déjà utilisé une mauvaise formule. Il n'y pas eu que dans le littéral.

C : Ouais, pas que dans le littéral. Déjà dès le départ. Pourtant on l'a déjà revu... A chaque fois je mets des racines quand il y a l'occasion... La dernière fois juste pour le calcul d'un déterminant, j'en avais mis un simple et le deuxième exemple j'avais fait exprès de mettre quelque chose avec des racines. Et puis eux tout de suite les racines ils ont peur. Mais je leur dis : c'est un nombre comme un autre. Ils arrivent déjà pas à se mettre dans la tête que $\sqrt{2}$ c'est un nombre. Pour eux tout de suite c'est une grosse bête qui fait peur. Je leur dis : $\sqrt{2}$ c'est un nombre, écrivez déjà la formule. Et en fait quand ils écrivent, des fois, ils y arrivent.

AL : Et qu'est-ce que tu as changé quelque chose par rapport au scénario qui était prévu ?

C : Déjà au niveau de la gestion du temps, j'ai sauté des choses pour avoir le temps au moins d'introduire les notions qui me permettront de faire mon cours de samedi. Après j'ai changé un peu la façon de présenter le préliminaire dans le premier et le deuxième groupe. J'ai été beaucoup plus dirigiste et je n'ai pas introduit le dessin finalement pour le deuxième groupe. En fait, comme Cécile a trouvé tout de suite et comme j'avais l'impression que cela ne les avait pas vraiment aidés dans le premier groupe.

AL : On n'avait pas pensé à l'autre solution.

C : Oui. Je leur ai dit après. Je me suis dit : on va pas leur cacher. C'est pour ça que je me suis dit dans le deuxième groupe : cela les aidera peut-être un peu mais si je commence à faire... Donc je me suis dit : je l'enlève. On va directement parler de... Donc j'ai changé ça. Après, la deuxième question on a à peu près laissé ce qui était prévu. Bon ben j'ai enlevé la démonstration de l'ensemble de définition en fait. Au sens où je n'avais pas le temps. Mais je pense qu'ils ont bien compris que là on l'a vu géométriquement mais que cela se démontrait.

AL : Ils n'ont peut-être pas vu l'intérêt de le faire de deux manières.

C : Oui c'est vrai. Mais là cela se voyait tellement bien au niveau géométrique que pour eux...

AL : Tu aurais pu aussi leur demander pourquoi on ne peut pas calculer pour 7 par exemple. Ce n'était pas ton but de compliquer la tâche ici. Ce n'est pas ce que tu cherchais à faire passer aujourd'hui. C'était déjà assez avec les racines.

C : C'est pour ça : quand j'ai vu que c'était très compliqué ici, je me suis dit "vue l'heure qu'il est"... On va pas compliquer, sinon on reste là et c'est la fin de l'heure.

AL : Tu pourras le revoir sur des choses plus simples. Est-ce que tu as ressenti des difficultés pendant la séance ?

C : ... Euh, c'est sûr que j'ai ressenti qu'ils avaient des difficultés dès que c'était un travail de recherche. Mais je me suis demandé s'ils avaient bien compris la notion de fonction : f(x) égale $\sqrt{36 - x^2}$, qu'en fait cela exprimait y en fonction de x. Une fois qu'une courbe a été faite, je pense qu'ils l'avaient bien assimilée. Mais en fait au départ quand on a marqué f(x), c'était assez difficile à venir pour marquer que c'était $\sqrt{36 - x^2}$. Et là je me suis dit : est-ce qu'ils ont vraiment compris ce qu'était une fonction ?

AL : Mais tu n'as fait qu'un exemple samedi, donc c'est sûr... C'est normal qu'ils n'aient pas compris puisque vous ne l'avez vu que samedi.

C : Il m'a semblé qu'ils n'avaient pas compris que x variait, que tout bougeait. C'est pour cela que je leur ai dit plusieurs fois : x peut valoir 1, 2, 3...

AL : C'est ça surtout qu'il fallait faire passer. Après le f(x) n'était qu'une notation. Au lieu d'écrire y, on écrit f(x). C'est peut-être cela qu'ils n'ont pas compris non plus : pourquoi l'appelle-t-on f(x) ?

C : C'est pour cela que dans le deuxième groupe j'ai tout de suite dessiné le cercle avec plusieurs valeurs. Alors que dans le premier, je ne l'ai fait que plus tard. Et dans le deuxième groupe, j'ai dessiné pour plusieurs valeurs pour leur montrer qu'en fait x c'est un nombre qui peut varier. Mais, je ne sais pas… Mais est-ce que pour vous il y avait beaucoup de changements entre les deux séances ?

AL : Le début. Je ne me rappelle plus si tu avais fait tracer le triangle isocèle dans le premier groupe.

C : Si, mais je ne l'ai pas fait au tableau parce qu'ils l'avaient tous fait correctement sur leur cahier.

AL : Là on a senti que tu allais plus vite. Bon dans le deuxième groupe, il y a eu les problèmes de calculatrice.

C : C'est pour ça que je me suis dit que je n'allais pas rester une demi-heure sur ça et que j'ai donné les résultats.

AL : On sent qu'à la fin tu étais plus prise par le temps.

C : Oui dans l'autre groupe ils ont plus cherché.

AL : Mais tu avais dix minutes en moins à peu près.

C : C'est parce que j'ai voulu en faire plus pour le premier et du coup je les ai pris en retard.

AL : Et si tu devais changer des choses dans cette activité, qu'est-ce que tu changerais ?

C : Je pense que c'est pas possible en une heure et demie. Donc faire ça en travail à la maison. Ils cherchent eux-mêmes et même s'ils n'ont pas trouvé cela permet après de faire juste une correction. Je pense que là en dix minutes, c'est fait. Et après ce qui peut permettre de faire un travail plus approfondi sur les notions et ce qui permet après d'aller jusqu'à la fin. Mais peut-être que la démonstration pour l'ensemble de définition serait carrément enlevée. Parce qu'à mon avis cela complique vraiment l'activité. Et puis eux ils ne doivent vraiment pas voir l'intérêt de la chose.

AL : Par contre peut-être que je n'aurais pas fait calculer toutes les valeurs. J'aurais dit : dans cette rangée vous calculez telles valeurs, etc. Cela ferait gagner du temps et chacun aurait été impliqué dans les calculs. C'est juste au niveau du temps.

AL : Là le coup de la racine on l'a bien vu sortir.

C : C'est pour ça, moi j'aime bien qu'ils cherchent seuls et qu'on corrige. Parce qu'une fois qu'ils se sont trompés, peut-être qu'ils retiennent plus, je me dis. Alors que quand tu corriges au tableau : ben ouais c'est ça... Parce que Michaël, par exemple, il comprenait bien que c'était bon au tableau mais il comprenait pas pourquoi lui il avait faux.

AL : Oui, enfin oui tu aurais pu gagner du temps. Et puis c'est normal aussi qu'ils aient du mal au début. y en fonction de x ce n'est pas ce qu'ils ont l'habitude de faire trop non plus. Elle était intéressante cette activité. Et c'est pareil pour le problème de l'aire maximale il y en a un qui a tout de suite vu que c'était pour le triangle isocèle.

C : Mais Jérémie il est mauvais à l'écrit. Il a 9 sur 20 de moyenne. En fait d'après sa moyenne il devrait être dans le groupe faible mais vu les idées qu'il a... Tu vois en même temps je me demande s'il ne s'ennuie pas trop en cours. Donc j'ai essayé de le mettre dans le groupe fort. Là tu vois, il travaille vite mais il fait plein d'erreurs. Déjà il rédige pas du tout. Dès qu'il croit avoir trouvé la réponse, c'est fini pas besoin d'aller plus loin.
Et sinon c'était bruyant ou pas ? J'avais l'impression que oui.

AL : Peut-être plus dans le deuxième groupe que dans le premier.

C : Moi j'arrive pas à savoir, comme la salle là résonne.

AL : Pour le premier groupe ce n'était pas du tout bruyant.

C : Le samedi j'autorise moins à parler.

AL : Moi j'ai trouvé qu'ils travaillaient bien. Bon on sent bien que dans le deuxième groupe il y en a qui sont plus cools que dans le premier.

ANNEXE N° 29 : VISIONNAGE INDIVIDUEL DE LA BANDE VIDEO AVEC CLAIRE, LE 19/06/2000

Premier épisode :

C : Je me rends compte que je parle vraiment vite. Je ne pensais pas à ce point. Il faudrait que je parle plus doucement, quitte en dire moins. Là j'en dis tellement que les élèves ne peuvent pas tout capter, c'est peut-être pour cela que je dois répéter plusieurs fois des fois.

AL : Par rapport au lancement de l'activité, est-ce que tu as des choses à dire ?

C : C'est ce que j'avais prévu de faire. Alors après est-ce que c'est le plus judicieux ? En général quand je lance une activité, j'en fais lire un oralement pour être sûre que tout le monde lise, après je leur laisse reprendre le temps de relire s'ils veulent. Pour que tout le monde démarre en même temps, j'en fais lire un oralement. Je ne sais pas si c'est le plus judicieux. Cela marque le début de l'activité, là ils comprennent bien que c'est parti.

Deuxième épisode :

C : En fait le tracé était assez compliqué pour eux. Je me demande s'ils ont vraiment tous compris en revoyant. Déjà entre théorème et réciproque, ils confondaient ce qu'on utilisait ou pas. Si on utilisait le fait qu'on avait déjà un cercle et qu'à ce moment-là on traçait le triangle... Ça il y a en a c'était confus et je ne pense pas qu'ils aient tous compris. Je pense qu'une bonne partie a compris mais pas tous. C'est peut-être assez difficile quand même pour le début de l'activité. Enfin ils ont quand même tous réussi à construire finalement. Après j'avais décidé de ne pas trop en marquer dans le cahier parce que je m'étais dit : dans le cahier on ne marque qu'une seule phrase en fait. Je pense qu'en écrivant plus ils auraient pas forcément mieux compris.

AL : Qu'est-ce que tu aurais voulu faire écrire d'autre ?

C : En fait, j'ai juste réécrit rapidement la petite phrase qu'on utilise et j'ai utilisé directement la conclusion. J'ai pas répété les hypothèses qu'on avait, pourquoi on pouvait appliquer la règle. A ce moment-là de l'activité ils l'avaient bien en tête. Mais s'ils y reviennent après, est-ce qu'ils comprendront bien ?

AL : Qu'est-ce qui t'a amené à faire ce choix ?

C : Là ils étaient bien dans l'activité et en général quand on écrit beaucoup ils sont perdus. En plus comme l'activité durait très longtemps sur ce point et que ce n'était pas l'objectif de l'activité, je ne voulais pas rester sur ce point-là trop longtemps. En fait même s'il y en a certains qui ne comprenaient pas cette question-là, cela ne les empêchait pas de faire la suite.

Troisième épisode :

C : Déjà, quand je parle, je dis toujours "d'accord", je n'avais jamais remarqué. Bon je parle toujours vite. Et quand il y a une élève qui commence à parler, peut-être que je ne la laisse pas assez continuer vers son idée. J'ai tendance à vouloir l'aider trop rapidement sur l'oral... Sur leur cahier, je pense que je leur laisse bien le temps de chercher, mais je pense quand ils expliquent, je devrais plus leur laisser le temps d'expliquer, parce que des fois ils commencent une phrase et je la termine à leur place. Je savais que j'avais tendance à le faire parce que des fois pour aller plus vite on a envie de... Surtout que là on commence seulement à y entrer, on est à peine entrer dans l'histoire de la fonction, j'avais envie d'avancer.

AL : Et par rapport à l'algèbre, est-ce que tu as quelque chose à dire ?

C : Déjà il y en avait qui n'avaient pas compris le but de la question, qu'il fallait déterminer x. Ils avaient pas compris que c'était un calcul qui était demandé, je pense. Ils avaient pas compris la question. Ils cherchaient une valeur mais sans chercher à la calculer. C'est aussi une question du rapport à la lettre. Ils n'avaient pas compris que x était une valeur, que cela représentait un nombre, et comme on ne le connaissait pas on l'a appelé x. Je pense que vu l'élève qui parle, ça c'est son problème, il a tendance à ne pas comprendre que x c'est une lettre mais que cela correspond à un nombre ou à autre chose. Là il a été un peu gêné par ça.

AL : Il y a aussi le problème que dans la question d'avant x vaut 2.

C : Oui c'était un exemple où x vaut 2 et il restait sur le cas où x valait 2.

Quatrième épisode :

C : Là il y a déjà quand je dis une équation comme ça, c'est peut-être pas très rigoureux comme ça. J'aurais dû dire de la forme $x^2 = a$. Eux ils ont tendance à dire justement "comme ça" et là je rentre dans leur jeu en parlant un peu comme eux. Après il y a l'histoire des deux racines et savoir pourquoi il y en a une qui n'est pas solution, en fait dans notre cas, c'est dans le cas concret. En fait là j'ai tout écrit en français parce que je voulais rester concrètement. Mais là je ne sais pas si j'aurais fait comme ça plus tard. Là ça me fait bizarre d'écrire tout. En fait on aurait pu écrire x représente une longueur donc, en mathématiques, x doit être positif mais avec le symbole mathématique plutôt qu'écrire une phrase en français. Et puis pareil mathématiquement écrire x différent de... Alors que là j'ai tout écrit en français et... Je ne m'en souvenais pas déjà... Eux ils comprennent aussi bien en écrivant "x représente une longueur" et après l'écrire en symbole mathématique, je pense qu'ils comprennent aussi bien. Alors que là j'ai fait une phrase assez longue et pas forcément très claire. C'est vrai que pour eux cela leur permettait de plus coller au concret. Je ne sais pas trop.

AL : Pourquoi as-tu fait ce choix ?

C : Je ne me souviens plus... Je sais que je voulais bien préciser que c'était sur la partie concrète, c'est pour cela que je voulais préciser que c'est positif, mais pourquoi je ne l'ai pas écrit en symbole mathématique.
Là j'ai été surprise que dans ce groupe ils prennent tout de suite la bonne formule pour l'aire. Je sais que dans le deuxième groupe ce n'est pas ce qu'ils avaient fait.

Cinquième épisode :

C : Il y a quelque chose qui me gêne dans ce que je dis : c'est quand même une démonstration qu'on a faite. En plus je leur dis c'est une démonstration géométrique et après je leur dis que c'est pas une démonstration. C'est un peu gênant. C'est pas vrai ce que je leur dis. Je voulais leur dire qu'on pouvait faire une démonstration algébrique sans s'appuyer sur la figure. Et après au niveau de la démonstration géométrique, là je me souviens que j'avais fait exprès d'écrire tout en français pour m'appuyer sur... C'est vrai qu'on était bien sur du concret, on avait fait des dessins... Entre 0 et 6 cm... Et après on était revenu aux symboles mathématiques, x appartient à l'intervalle. Sinon au niveau de la démonstration algébrique, ça c'est un problème, et je n'ai pas voulu trop m'attarder donc c'était un peu confus sur le fait qu'ils confondent, ce qui correspond un peu aux fonctions, l'ensemble de définition et l'ensemble des valeurs que la fonction peut prendre. Il y en a certains qui ont retrouvé ce problème après avec les fonctions : quand on leur demandait l'ensemble de définition, ils donnaient l'ensemble des valeurs que la fonction peut prendre, l'ensemble d'arrivée. Je n'avais pas trop envie de m'attarder parce que c'était pas l'objectif de la séance, on avait déjà pas beaucoup avancé. Et c'est pareil qu'on écrive pas $\sqrt{-2}$, je pense que j'aurais pas dû l'expliquer comme ça, j'aurais dû revenir que écrire $\sqrt{-2}$, c'est chercher en fait $x^2=-2$. Donc c'est pour ça comme un carré est toujours positif... Réexpliquer pourquoi en fait c'était incohérent d'écrire $\sqrt{-2}$.

AL : En fait tu voulais le faire mais vite ?

C : Oui. Mais ça je l'ai refait en module avec certains de ces élèves. On est revenu dessus et on l'a expliqué doucement. On l'a fait dans le cahier d'exercices.

Sixième épisode :

C : Sur l'interprétation graphique, je trouve que je n'ai pas assez insisté sur pourquoi c'était une valeur approchée. J'aurais dû exploiter leurs réponses pour bien leur prouver : vous avez vu que vous avez trouvé différentes valeurs, donc en fait on est pas sûr parce qu'en fonction de la construction de chaque courbe on arrive pas à une valeur... En fait je le dis, je ne leur fais pas trouver. J'aurais dû leur faire sentir que l'utilisation d'un graphique pour un calcul de valeurs et beaucoup plus approximatif qu'un vrai calcul algébrique.

AL : Comment est-ce que tu te verrais faire ça ?

C : En fait je leur dis tel quel. Mais vraiment exploiter... Il y en a qui m'ont 4,2 , 4,3... Leur dire : vous voyez, vous n'êtes pas d'accord. Et après ça je l'ai refait plus tard mais là c'était l'activité donc... J'ai été trop vite sur cette partie. J'aurais dû leur montrer qu'ils n'étaient pas d'accord alors que par le calcul tout le monde était d'accord. Et de toute façon 4,2 c'est pas une valeur exacte, c'est qu'une valeur approchée du calcul qui a été fait avant. C'est sûr que c'était la fin de l'heure donc j'ai été vite mais c'était un peu rapide.

AL : Comment est-ce que tu l'as fait après ?

C : Je l'ai déjà fait sur le travail avec la guitare. En fait on leur faisait faire au départ beaucoup de travail graphique et après on leur faisait démontrer par le calcul. On leur montrait bien que c'était vraiment qu'une approximation.
Sinon là je pense que sur la notion de croissance, décroissance c'est bien passé.
C'est sûr la lecture graphique je suis passée assez vite, parce que même sur la première lecture je suis passée assez vite. Déjà ils comprenaient pas trop la question parce que je m'étais pas très bien exprimée. C'était la toute première fois donc j'essayais de leur faire sentir comment on lisait graphiquement. J'aurais peut-être dû les laisser un peu chercher tout seuls. En fait là je leur donne quasiment la réponse aussitôt. Il y a un élève qui a trouvé donc après j'ai expliqué pour tout le monde mais je ne les ai pas laissés chercher eux-mêmes sur la courbe.

AL : Là tu enchaînes quand un élève a trouvé, est-ce que c'est quelque chose que tu fais souvent ?

C : Je sais que cela m'arrive de le faire en fin d'heure quand je pense que je n'ai pas le temps de finir. Je pense qu'en début d'heure je le fais beaucoup moins.
Sinon sur le f(x) après sur les autres cours j'ai plus attention... J'avais écrit tout à l'heure f(x) égale la fonction. Après je faisais bien attention d'écrire : f qui à x fait correspondre la valeur... Pour bien leur faire sentir que c'est une fonction.

<u>Septième épisode :</u>

C : A un moment donné il y a une élève qui ne comprend pas pourquoi on utilise la courbe pour lire puisqu'on l'a déjà fait par le calcul. Et après ils ont bien compris que la courbe c'était plus intéressant que le calcul. Par la suite quand on leur demandait de faire un calcul ils avaient tendance à vouloir lire sur la courbe plutôt que faire le calcul. Je me souvenais pas de ça mais là je me dis que je devrais leur rappeler qu'au départ ils voulaient pas utiliser la courbe. Sinon on voit un peu plus que la courbe ça n'est qu'une approximation. Il y en a un qui a l'instinct de penser qu'en fait c'est un glénatri isocèle, comme il avait à peu près une valeur approchée.
C'est le début de l'activité qui a posé le plus de difficultés alors que l'objectif de la séance était de travailler sur les fonctions et en fait ce travail sur les fonctions n'a pas posé de réelles difficultés. C'est plus la partie géométrique qui a posé des difficultés. Peut-être que d'avoir posé des difficultés au départ cela a permis qu'ils soient bien après dans la situation et peut-être que cela a permis que cela passe mieux au niveau des fonctions.

Peut-être que j'aurais dû aussi pour repasser bien au concret sur les axes : bien marquer que l'axe des abscisses correspondait à la valeur de x et j'aurais pu marquer sur l'axe des ordonnées : aire du glénatri en cm² et l'autre : valeur de x en cm, pour bien refaire le lien avec le concret. Là je l'ai dit oralement mais on aurait pu le marquer sur les axes, parce qu'en physique ils le marquent sur les axes.

AL : Dans cette activité, il restait l'équation g(x)=7 à résoudre.

C : En fait ça je l'ai fait et après j'ai fait d'autres exercices du même style. Ça c'est le premier exercice qu'on a fait sur la résolution d'équation. On a repris la courbe et je leur ai demandé de... Cela s'est fait rapidement car il y en a un qui a dit tout de suite : cela revient à rechercher l'aire égale 7. Bon il y en a certains qui ont essayé de le faire par le calcul. Mais on l'a fait quand on avait beaucoup travaillé sur les courbes donc à ce moment-là ils avaient vraiment l'instinct de travailler sur les courbes.

AL : Globalement maintenant quel regard portes-tu sur cette séance ?

C : C'est une séance qui est trop longue pour une heure et demie. Il faudrait de leur faire faire le début à la maison ou commencer à la séance d'avant pour qu'ils se mettent en tête la situation, pour pouvoir faire la partie sur les fonctions vraiment à fond pendant le module d'après. Mais je ne regrette pas d'avoir pris une situation vraiment concrète pour démarrer. Par contre il y a une question qu'on a parlé à plusieurs : savoir si on part de l'expression algébrique de la fonction ou si on part de la courbe représentative. Moi je pars avec l'expression algébrique et après on voit qu'on peut construire sa courbe. Et ça on était pas trop d'accord entre nous. Moi j'ai longuement hésité.

AL : Tu n'as pratiquement pas fait de travail avec cette expression.

C : Oui mais au départ j'ai défini la fonction comme une expression algébrique. Alors qu'il y en avait qui définissaient la fonction comme une courbe.
J'ai fait deux devoirs : un où il y avait beaucoup de travail graphique, il n'y a pas eu trop de problèmes. Et le deuxième devoir qui était plus un travail de démonstration, et là cela a posé beaucoup plus de problèmes.

AL : Qu'est-ce que tu voudrais changer par rapport à cette activité ?

C : Je pensais commencer une séance avant, parce que tout seuls à la maison ils ne feraient rien. Commencer sur les préliminaires. Leur donner une question pour que chez eux ils réfléchissent à nouveau, pour après essayer d'aller jusqu'au bout. Je pense que la dernière question ils auraient eu beaucoup de mal à la faire si on l'avait fait tout de suite. Le fait de l'avoir fait après ils n'ont pas eu de difficultés.

ANNEXE 30 : DISPOSITIF VIDEO COMPLEMENTAIRE , LE 22/06/2000

Première séance : Nicolas

AL : Quels sont les problèmes que vous prévoyez par rapport à l'activité choisie par Nicolas ?

C : Déjà des problèmes d'énoncé : son double, son triple. Analyser ce que ça veut dire même avec un exemple. Déjà comprendre le programme. Il y a déjà des problèmes de français, savoir à quelle opération cela correspond.

N : Sachant que cela fait partie du programme de sixième.

C : Ah ! Tu l'avais déjà vu avant.

B : Quand je vois « écris le plus simplement possible à l'aide de n le résultat obtenu », je me demande ce que comprennent les élèves vraiment et je me demande ce qu'ils vont produire. Quand ils voient 2n+3n divisé par 5, je ne sais pas ce qu'ils vont faire.

C : Déjà mettre sous forme de formule cela va déjà être un obstacle aussi. 2n + 3n divisé par 5. Moi, ce que je trouve surtout très difficile, c'est la troisième question. Au sens où c'est quand même le début de l'utilisation des lettres. Je trouve que c'est piégeant, déjà n+2 = 2×n, en fait c'est montrer les erreurs que les élèves ont tendance à faire en général. Moi, j'aurais plus vu une écriture juste et essayer de la simplifier. Pour un premier exercice, en fait je le trouve très difficile. Et puis comment l'expliquer ? Moi j'ai peur que les élèves fassent un peu au hasard. Certains non, bon n+n celui-ci, ils vont dire que c'est 2×n forcément. Mais dès que ce sera faux, ils vont être à mon avis perdus.

B : Moi, ce que je trouve difficile, c'est que montrer une égalité c'est quelque chose que je trouve difficile pour les élèves. Parce qu'en seconde ils ont du mal. Pour montrer une égalité vectorielle, ils partent de l'égalité et trouvent 0=0. Pour n'importe quoi ils font ça, donc là je me demande vraiment comment les sixièmes s'y prennent. Et puis pour démontrer qu'une égalité est fausse, il faut avoir recours à un contre-exemple. Pour la première, tu prends 3 par exemple, cela ne marche pas. Ben ils vont prendre n = 3 pour la deuxième : regardez ça marche, donc la propriété est bonne.

C : J'ai l'impression que cela cumule différents problèmes. Il y a la difficulté de la lettre mais, par-dessus ça, il y a énormément d'autres difficultés. Est-ce ça va pas perdre de l'intérêt au niveau de la lettre ?

N : Je veux répondre à Benjamin. J'ai l'impression que tu es dans l'esprit de la seconde. Là c'est pas montrer les égalités, c'est dire celles qui sont justes.

B : Oui mais il faut bien les justifier.

N : Attends, on est en sixième.

B : Enfin... Comment tu... Pour la première tu as fait quoi ?

N : Pour toutes, le but c'était surtout de faire le lien avec les expressions littérales... Le but était de leur faire remplacer et voir... Ils n'ont pas absolument pas à justifier. Cet exercice se ramène à essayer sur des exemples.

B : D'accord, d'accord.

N : Enfin il y a quand même des difficultés, on verra ça tout à l'heure.

R : Moi ce que je trouve compliqué c'est à la fin de la question 2b : ce que l'on a remarqué au 1, est-il vrai pour tous les nombres ? C'est en s'appuyant sur l'écriture littérale, je pense.

C : Oui simplification.

R : Ouais... Bon de là est-ce qu'ils comprennent que vu que cela marche pour n, cela va être vrai pour tous les nombres ? ... Cela va être dur.

AL : Vous parlez de simplification. Comment est-ce que vous la voyez ?

B : 5×n divisé par 5, c'est ça ?

C : Je me suis dit que cela allait être difficile parce que c'est tout de suite un calcul avec la lettre. Parce qu'en fait le but c'est quand même ça : on a vu sur des exemples que cela donnait le même nombre, mais après si on leur demande d'écrire le double, machin, c'est quand même écrire 2n+3n divisé par 5. Je me demande justement pour un premier exercice comment ils vont faire. 2n+3n, bon ils peuvent le sentir. n cela représente un nombre, je le prends 2 fois puis après 3 fois, cela fait 5 fois.

B : Cela est peut-être plus simple s'ils prennent des objets : 2 bonbons, 3 bonbons j'en ai 5.

C : Oui. Mais après dire 5n divisé par 5. Moi je pense qu'il faut dire que n c'est comme un nombre donc on écrit 5 fois n divisé par 5 et puis après c'est...

B : Ou s'ils ne voient pas, tu prends un exemple numérique : n = 3, 5×3 divisé par 5, cela fait 15 divisé par 5 donc ça fait 3.

C : Oui mais c'est un exemple.

B : Donc on pouvait simplifier par 5. Ouais c'est un exemple bien sûr. Moi, quand j'ai vu ça le premier coup, je trouvais vraiment ça ambitieux. Mais je ne savais pas où en étaient les élèves.

AL : Nicolas, tu veux dire ce que tu as fait avant avec les lettres ?

N : Bon il y avait tout ce qui est vocabulaire, comme disait Claire. Et en début d'année c'était des exercices où...

AL : La première approche avec les lettres c'était : trouver un entier n compris entre 2 et 5. cela avait posé problème au début. Et puis après c'était : trouver un nombre x tel que x+3=5. C'était des équations.

B : Oui sans le dire.

AL : Voilà ce qui a été fait sur les lettres avant.

B : Moi je trouve ça assez brutal.

AL : Comment est-ce qu'on peut faire ça avec des sixièmes ?

A : Moi j'ai vu la séance, donc c'est différent. Mais si j'avais vu ça, sans voir la séance de Nicolas, je me serais dit : oh c'est de la folie. Déjà quand j'ai fait les programmes de calcul en quatrième, ils ont déjà du mal à les écrire sur une ligne. Donc moi je raisonnais sur une ligne. Alors que ce n'est pas du tout ce qui s'est passé. Ils appréhendent chaque étape, c'est quand même plus simple. Alors que nous, on a tendance à voir tout écrit sur la même ligne.

AL : Et après on simplifie ?

B : Voilà, oui.

AL : Toi aussi, Claire ?

C : Quoi ?

AL : Tu imagines que c'est écrit : 2n+3n entre parenthèses divisé par 5 ?

C : Oui. Le double 2n, le triple 3n, après ils les additionnent. La ligne d'après, ils écrivent 5n...

AL : Ah oui quand même...

C : Ah oui à chaque ligne, tu traduis.

Visionnement de la bande

AL : quelles sont vos remarques sur ce que vous avez vu ?

C : Au début "écris les formules" cela n'a pas posé trop de problèmes : 2n, 3n.

B : Je me demande s'ils comprennent vraiment que n+n et 2n c'est vraiment la même chose. J'ai l'impression que cela passe très vite. Et je me demande si avant ça tu n'aurais pas pu leur rappeler comment on leur introduit la multiplication, enfin je pense qu'on leur a introduit comme ça. Peut-être que cela aurait été pas mal de faire un rappel là-dessus. Mais je ne sais pas ce que cela a donné après, peut-être que tu as constaté qu'il n'y avait aucun problème.

N : Je n'ai pas eu le sentiment.

B : Mais moi j'ai l'impression que cela passe vite et après comme je ne vois pas les élèves, je ne vois pas ce que cela donne.

C : Moi j'ai eu l'impression que cela passait bien ça.

B : Ça passe bien parce que les élèves ne réagissent pas.

N : De toute façon, cela vient des élèves, c'est eux qui ont trouvé. Mais après est-ce qu'ils ont tous bien compris ça ? Ça je ne peux pas te dire. Vu que cela n'était pas demandé dans la question... On leur demandait le double de n, ils ont tous mis 2×n.

B : Oui c'est vrai. Mais le n+n, il y a fallu que tu leur poses la question.

C : Non c'est un élève qui l'a sorti.

AL : Oui, on entend pas bien sur la bande.

B : Ah, à ce moment-là, d'accord.

C : Non finalement le 5n divisé par 5, il y a un élève qui arrive à le trouver. En fait c'est pas là qu'est le plus gros problème.

R : C'est l'inconvénient de la cassette : on ne sait pas si les élèves ont trouvé.

A : Il y a des élèves qui mènent.

B : C'est toujours les même prénoms qui reviennent de toute façon.

N : On ne voit pas sur la cassette, mais nous, on s'est rendu compte qu'il y en a quand même beaucoup qui ont décroché au fur et à mesure.

B : A la fin quand tu veux leur faire dire que 5xn divisé par 5, moi je crois que j'aurais craqué beaucoup plus tôt. Je leur aurais dit : n désigne n'importe quel nombre, prenez en un, multipliez par 5, divisez par 5, qu'est-ce que vous obtenez ?

N : Je n'ai pas eu le besoin...

R : Pareil la division souvent ils l'ont appris comme défaire la multiplication.

A : Voilà c'est pour ça que c'est naturel.

B : Cela vient mais je trouve qu'il a fallu... Bon je ne sais pas...

N : Moi au vu de l'impression j'ai justement l'impression que c'est quelque chose qui est bien passé puisque dès qu'on leur pose une question, après ils reviennent là-dessus.

B : C'est vrai.

C : Pour moi, cela allait être le point sensible et, finalement, c'est pas le point sensible. Le point sensible, c'est comprendre, en fait, ce qu'on vient de faire. Ils ont bien compris étape par étape ce qu'ils ont fait. Finalement, la troisième étape, je pense qu'ils l'ont comprise. Mais après quand il s'agit de comprendre globalement ce qu'on vient de faire, c'est là qu'est la panique.

B : Oui à la fin on ne sait pas s'ils ont bien compris.

R : Ça va encore, la lettre, ils ont su calculer avec. Mais ils n'ont pas compris, je pense, pourquoi on a pris la lettre.

N : Ce n'est pas quelque chose que tu peux faire comprendre à des sixièmes en une séance.

C : Ah oui, ce n'est pas une critique que je te fais.

N : Moi, au vu de la séance, je pense que c'est bien de faire quelque chose pour leur faire sentir un peu l'utilité, leur faire manier. Mais à la fin tu ne peux pas dire : ils vont savoir comment ça marche. L'objectif c'est qu'ils comprennent plus tard parce que ce n'est la première fois qu'ils feront ce genre de choses.

S : Quand même là dans l'exercice, tout paraît bien se passer dans le 2, sauf comprendre la démarche.

A : Moi j'ai un truc à dire, c'était pour passer de 2n+3n à 5n. En fait, il n'est pas passé directement à ça, il est passé par n+n+n+n+n. Même s'ils n'ont pas compris directement que 2n c'est n+n, et ben ils admettent ça et après ils arrivent à faire la suite. Comme c'est par étape, ils arrivent à suivre et à faire l'étape suivante.

N : Ça, c'est une difficulté le passage de 2n+3n à 5n, c'est plus du programme de cinquième... Enfin nous, cela nous fait penser à : on utilise la distributivité, et ça fait (2+3) fois n. C'est quelque chose qu'on savait bien qu'on ne pourrait pas faire passer de la même façon en sixième. Par contre ce qu'on ne voit pas dans la cassette c'est une difficulté que je n'avais pas prévue, c'était le programme de calcul qui est mis au début et les sixièmes voient ça et ils le font. Au début il y a toute une période de flottement parce qu'ils ne comprennent pas ce qu'on leur demande.

A : Pour comprendre le programme ils ont besoin de l'appliquer à un nombre de toute manière. Donc ils ont déjà fait la première question en fait.

B : Il y a quelque chose qui m'a frappé : quand tu écris 2xn+3xn, tu mets des parenthèses. Tu demandes pourquoi et il y a des élèves qui répondent bien. Mais après tu leur dis : quand on a une somme comme là on n'en met pas parce qu'on le droit d'additionner comme on veut.

N : Mais, elles y sont au tableau.

B : C'est la justification que j'ai entendue alors.

N : Là je passe vite parce que c'est pas mon objectif. Je réponds à l'élève. Donc je passe vite, je donne l'explication, elle la comprend parce qu'elle a un bon niveau.

B : Est-ce que tu le fais en sixième ça ? Je sais, Claire vient de le dire, les priorités se font en cinquième. Mais est-ce qu'on fait déjà des exercices où on leur fait calculer des choses comme (5+2)x3 ou 5+2x3 ?

N : Dans les expressions numériques.

B : Tu l'avais fait là ?

N : Non.

AL : Il y a quand même quelque chose quand tu leur dis que si on écrit 2xn+3xn sans parenthèses, on peut d'abord calculer n+3.

A : Ouais, cela m'a choqué ça.

AL : C'est pas correct. Quand on va leur dire de supprimer les parenthèses l'année prochaine, ils ne vont pas savoir.

N : Ça c'était spontané, je n'y avais pas trop réfléchi.

A : On risque de confondre quoi.

C : On verra l'année prochaine qu'il y a des règles...

R : Moi j'ai eu le même problème en cours, et moi je leur ai parlé tout de suite des priorités. C'est pas dur de leur dire : quand il y a une multiplication et une division on les fait toujours avant l'addition ou la soustraction. Moi cela m'embêtait de leur mettre des parenthèses à chaque fois qu'il y a une multiplication.

AL : Moi ce n'est pas le fait qu'il mette des parenthèses qui me gêne. Ce qui me gêne c'est qu'il dit que cela serait faux s'il n'en mettait pas.

N : Dans ma tête, c'était : si on ne se fixe pas de règles, on le ferait dans l'ordre qu'on voudrait. Mais c'est vrai que oui...

AL : Tout à l'heure, Benjamin disait que pour expliquer que 2n+3n=5n , on pourrait utiliser des bonbons. Qu'est-ce que vous en pensez ?

R : Moi je l'ai fait avec des vaches.

A : Moi, j'ai eu des problèmes. C'est multiplier x et y... Multiplier des choux et des carottes, on n'a pas le droit mais par contre les additionner, on n'a pas le droit.

B : Là c'est les limites de l'exemple.

N : Cela n'explique aucunement la règle, c'est juste pour que les élèves sachent l'appliquer. C'est un peu dangereux, ouais.

A : Voilà. J'ai fait comme parce que je me suis dit : au moins comme ça, ils comprennent. Mais après ils m'ont dit : Madame on peut multiplier les choux et les carottes ? Donc ils comprennent la règle par une mauvaise méthode...

R : Moi je voudrais savoir ce que tu as répondu.

C : J'ai dû esquiver, quoi.

N : Si on utilise ça, il faut bien faire sentir aux élèves, surtout dès qu'on arrive en quatrième ils commencent à être plus mûrs, que c'est un moyen mnémotechnique, que c'est un truc.

A : Mais pourquoi ce moyen ne marche pas pour la multiplication ?

N : Un moyen mnémotechnique, c'est toujours pour quelque chose de précis.

C : Et puis dans la vie courante tu ne multiplies pas les objets. Tu peux les additionner mais pas les multiplier. cela ne signifie rien.

A : Si, tu as des aires.

C : Oui mais c'est des nombres que tu multiplies.

AL : Là aussi c'est des nombres. Quand on dit c'est des bonbons, on assimile la lettre à un objet.

B : Moi je m'en suis servi en seconde cette année avec les vecteurs. J'avais beaucoup d'élèves qui avaient du mal à réduire $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}$. Donc je leur disais... Bon là ça marche parce qu'on ne multiplie pas les vecteurs. Deux objets plus trois objets cela nous en fait cinq. Mais il y a beaucoup d'élèves qui répondent : on factorise par $\overrightarrow{AB}$.

N : C'est des élèves qui ont bien compris le programme de cinquième.

B : Mais au début quand ils voient $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}$, il leur faut le temps de réfléchir, cela ne vient pas naturellement. Et avec les lettres au début de l'année ils avaient un peu de mal, mais c'est venu assez vite. Mais j'ai de nouveau rencontrer des difficultés quand j'ai fait les vecteurs. Tu as eu ça aussi ?

C : Pareil.

N : Je pense qu'il faut que ce soit clair pour les élèves. Je pense qu'on peut se permettre de ne pas être rigoureux par moment, pour leur donner des petits trucs...

A : Moi je ne pense pas finalement. Moi cela les a perturbés après.

AL : Parfois en quatrième il y a des élèves qui ne savent pas réduire $2x^2+3x^2$, alors que là en sixième on voit qu'il ne faut pas longtemps pour leur faire dire que 2n+3n ça fait 5n. Nicolas est passé par n+n+n+n+n, mais il y en avait déjà qui avaient dit que c'était 5n. Pour eux cela semble assez naturel et cela a un sens, plus qu'en quatrième.

R : Parce qu'en quatrième, au début des équations, j'en ai refait un peu et c'est pas évident.

B : Ils ont perdu de vue...

C : Ils essaient d'appliquer des règles dont ils ne se souviennent plus, sans chercher le sens.

A : Ou à mon avis ils ne mettent plus derrière n le mot nombre. On considère le même nombre et deux nombres plus trois nombres cela fait cinq nombres. En fait ils généralisent dans leur tête je pense.

R : Cela me fait penser aux vecteurs de Benjamin quand il disait qu'ils mettaient $\overrightarrow{AB}$ en facteur. Pourquoi ? Parce que le vecteur c'est une drôle d'écriture : c'est deux lettres avec une flèche dessus. Ils ne le voient pas vraiment en tant qu'objet. C'est pareil que le n, si on demande de diviser n par 10, il y en a bien un quart qui va mettre 0,n. A mon avis les lettres représentent une écriture et pas un objet.

AL : C'est pareil, pour le 5n divisé par 5, intuitivement les élèves de sixième ont bien vu comment on faisait. On ne va pas le voir dans la cassette de Romain. Mais à un moment, tu as fait résoudre l'équation : $2 \times x + 15 = 36$, on divise par 2, cela fait $x+15=18$, et il y a une élève qui demande pourquoi on n'a pas divisé 15 par 2. En sixième, ils donnent du sens aux écritures qu'ils ont, et en quatrième on ne donne plus de sens à ce qu'on fait.

C : Même en seconde, en aide individualisée, même sur d'autres choses, je leur disais : essayez de comprendre le sens, plutôt que des règles par cœur que vous allez confondre parce que vous ne les avez pas comprises. Et, en sixième, je sens qu'ils ont la notion de comprendre le sens. Plus ça va, plus certains élèves essaient d'apprendre des règles, les appliquer sans en comprendre le sens.

N : Je reprends ce que tu disais, est-ce qu'un des moyens de palier le problème des bonbons n'est pas de prendre des paquets de bonbons ? Dire que deux paquets de 15 bonbons plus trois paquets de 15 bonbons cela fait 5 paquets de 15 bonbons.

AL : Remplacer n par un nombre ?

N : Et par un ensemble de tant d'éléments.

B : Pourquoi ne pas le faire physiquement. Prendre 5 boites, une boite, je la multiplie par 3. Cela fait trois boites.

N : Là, c'est pas le problème de le faire passer au moment de l'apprentissage. C'est quand elle est utilisée tout le temps, qu'il faut que tu... L'histoire des bonbons c'est quelque chose qu'on utilise tout le temps, donc tu ne peux pas sortir tes boites. Au moment où tu dois l'apprendre, tu dois assez facilement faire quelque chose de clair, mais...

AL : Ce qui change là en parlant de paquets, c'est que le nombre n tu ne le remplaces pas par un objet mais par un nombre.

N : On est plus cohérent.

C : Tu crois que pour les élèves c'est plus cohérent ?

N : Je ne sais pas, moi cela passait bien en cinquième.

C : Oui que tu prennes un paquet ou un objet c'est la même chose.

N : Justement, donc c'est clair pour lui et on n'a plus le problème de changer la lettre en objet.

AL : Quand tu le changes en paquets, il faut bien dire : si je remplace le nombre par 15, cela fait 2x15+3x15, et comment est-ce que je peux écrire ça autrement ? C'est ce qu'il y a derrière. C'est pas le fait qu'on remplace les bonbons par les paquets de bonbons. Il ne faut pas que dans la tête de l'élève ce soit pareil.

C : Voilà c'est ce que je craignais, pour que les élèves ce soit pareil.

AL : Bon c'est un moyen qui permet de faciliter la tâche de remplacer n par des bonbons, mais il y a des limites comme le dit Alice. Si on leur dit qu'on n'a pas le droit d'additionner x et x^2, mais qu'ensuite on les multiplie, cela ne va plus. D'ailleurs quand on dit : on n'a pas le droit de, on est en train de parler en terme de règles mais pas en termes de sens.

C : C'est ce que dit JC Fénice. Il ne dit jamais : tu n'as pas le droit. Il dit : cela n'a pas de sens.

B : Oui, on n'a pas le droit de diviser par 0...

AL : Mais quand on demande pourquoi, ils ne savent pas. On n'a pas le droit.

R : Moi je sais pourquoi on peut pas diviser par 0, mais comment on pourrait l'expliquer aux élèves.

A : Ben si, en raisonnant par l'absurde.

R : Le raisonnement par l'absurde déjà...

B : En sixième, je leur fais poser la division.

R : Oui, mais... Tu n'arrives pas à la faire donc...

C : Moi en seconde je l'ai fait avec la multiplication. 3 divisé par 0, je ne sais pas ce qu'ils me trouvaient, cela veut dire que ce nombre multiplié par 0, ça fait 3. Cela fait 0 donc ce n'est pas possible.

B : Tu peux aussi parler de parts : si tu divises par 2, tu peux couper la feuille en 2. Mais on ne peut pas couper en 0. Comme on en a déjà une, on ne peut pas en avoir 0. Ça veut rien dire.

R : Oui mais $\sqrt{-1}$ cela ne veut rien dire au départ. Moi je vois ça comme ça, donner le vrai sens.

B : Oui...

C : Moi je suis repassée par la multiplication.

B : Oui, mais tu ne peux pas faire ça en sixième.

AL : En sixième, tu vois la division euclidienne. Tu dis que 7=3x2+1.

C : C'est comme ça qu'ils apprennent la division.

N : Tu l'as enseigné en sixième la division euclidienne ?

AL : Oui.

N : Moi, c'est pas passé du tout.

AL : Cela dépend ce qu'on fait faire avec.

N : Même sur des exemples, des exercices. Et ma conseillère pédagogique m'a dit pareil.

C : L'écriture ?

N : Le sens. En divisant un certain nombre de paquets, il reste quelque chose. C'est passé pour très peu d'élèves

AL : A travers le sens, tu veux dire qu'ils ne savent pas s'il faut faire une division dans un problème ?

N : Ouais. Et puis l'intérêt et puis tout ça, quoi.

AL : C'est le sens des opérations. La technique, ça va toujours ?

N : J'ai l'impression d'avoir réussi à faire des choses sur les autres opérations, mais pas sur la division...

AL : C'est parce que c'est plus récent pour eux. L'addition ils le font depuis le cours préparatoire.

B : Ce sont des opérations plus naturelles que la division.

AL : Bon on va s'arrêter là.

A : Je voulais dire quelque chose : au début ils avaient du mal à comprendre que n représentait n'importe quel nombre, donc la généralisation. Et moi je me disais que peut-être sur un truc géométrique, on comprend mieux ce que c'est n. Ils ont l'habitude quand même d'utiliser des formules : lxL, l'aire du rectangle, des trucs comme ça. Donc en fait je me disais qu'utiliser une lettre sur un truc comme ça, peut-être qu'ils s'imprégneraient mieux de la lettre.

AL : C'est vrai que la situation de Nicolas était très riche. On a vu aussi la difficulté qu'il a eu pour justifier l'utilisation de la lettre. C'est vrai qu'il y a des exercices de géométrie du genre de ce qu'on a vu au début de l'année qui permettent l'introduction de la lettre.

Deuxième séance : Romain

B : Il était dur ton problème. J'ai trouvé la mise en équation difficile. 5 élèves par banc, tu as 12 places libres, après c'est 4 mais là ils ne pourront pas s'asseoir. Je sais pas... A côté de ça, quand j'ai lu celui d'Alice après où l'objectif est exactement le même, je trouve qu'il est beaucoup plus clair. Moi, il a fallu que je lise l'énoncé deux ou trois fois avant que je voie comment j'allais m'y prendre. Alors qu'avec celui d'Alice, c'est venu tout de suite... Et puis j'ai hésité à un moment : on ne connaît pas le nombre d'élèves, le nombre de bancs... J'ai été un peu paumé... Bon j'ai su le faire quand même, je vous rassure. L'avantage c'est que je n'ai pas trouvé de méthode arithmétique, je ne sais pas si les élèves en ont trouvé.

C : Moi j'ai une méthode tout de suite qui m'est venue. J'ai raisonné comme sur les bancs, pas en terme d'équation. Pour l'expliquer, ça va tout seul. En fait, tu places les cinq élèves par banc, il y a douze places libres. Tu peux les visualiser. Et après tu sais que tu vas les mettre par quatre, tu remets des élèves sur les douze places libres. Et tu vas les répartir autrement, mais cela ne change rien. Ça y est tous les élèves sont assis, sauf trois. Cela fait quinze bancs.

B : C'est un peu compliqué quand même.

C : Visuellement... Je suis sûre que tu écris au tableau, les élèves comprennent tout de suite. Moi quand je l'ai lu, j'ai dit c'est plus simple que faire une équation.

N : A la limite, tu prends le risque qu'elle sorte. Mais si elle ne sort pas, les élèves pourront être convaincus que l'algèbre...

R : De toute façon elle n'est pas sortie. Mais je ne pense pas que les élèves s'amuseraient à modéliser comme ça. Parce que ce n'est pas aussi simple que ça.

C : Mais après il suffisait de leur dire : on va prendre... Il suffisait de compliquer après...

N : Je ne sais pas. Un élève à qui on a bien appris : un problème il faut bien se le mettre en tête, schématiser... Je ne sais pas s'il y a pas des élèves qui pourraient trouver ça.

AL : Qu'est-ce qui vous semblait difficile ? C'est qu'au début il en reste et après il y en a en trop. C'est ça ?

A : Ouais.

C : C'est pas écrit explicitement comme dans le problème d'Alice.

B : Là ils peuvent se mettre à la place des personnages.

AL : C'est plus dans un contexte de la vie courante ?

B : Ouais aussi.

R : Là il y a quand même un nombre d'élèves par banc et on n'a pas le nombre de bancs, ça...

AL : En dessous, il y a un prix par place et on ne connaît pas le prix d'une place.

R : Moi je ne sais pas. Quand tu m'as passé ça, je me suis dit : tiens, Alice, c'est exactement la même chose et cela leur aurait posé moins de problèmes.

A : Le mien est plus guidé en fait. On sait qu'on a la somme d'Audrey, la somme de Jérôme. Alors que là c'est plus flou.

C : Là c'est écrit explicitement : ils ont la même somme. Donc l'égalité est donnée. Alors que là l'égalité n'est pas écrite, il faut la comprendre dans l'énoncé.

B : Moi je me demande vraiment comment Romain va s'en sortir pour obtenir la mise en équation.

Visionnement de la bande

C : Les difficultés, c'est qu'ils sont passés par deux inconnues.

B : Je ne sais pas si c'est vraiment une difficulté en fait.

R : Ma difficulté à moi cela a été ça.

B : Tu ne t'y attendais pas.

R : Disons qu'il y a une élève très moyenne qui a trouvé directement la bonne inconnue, la bonne équation, la résolution. Et sinon deux très bons élèves qui sont passés par deux inconnues.

B : Même sans passer par deux inconnues, moi en seconde, je faisais toujours comme ça : j'écrivais le nombre d'élèves, deux points, la première expression qu'on obtenait en fonction de x, en dessous le nombre d'élèves, deux points, une deuxième expression. Bon tu passes par une deuxième inconnue sans le dire, tu ne la formalises pas. Bon et regardez : on a deux expressions pour la même chose donc ces deux expressions sont égales.

C : C'est vrai que même après. Je suis sûre que je donne le même problème en seconde, il font un système de deux équations à deux inconnues. C'est intuitif chez eux.

N : Pour utiliser ta méthode, il faut quand même savoir...

A : Quelle inconnue on choisit.

N : Ouais mais à la limite la réponse est dans la question.

B : Voilà, tu dis : regardez on veut connaître le nombre de bancs.

N : Le fait qu'il y ait deux choses qu'ils ne connaissent pas, moi je trouve très naturel d'introduire deux lettres.

R : Oui mais je vois, on avait prévu d'introduire qu'une lettre, ils m'en ont introduit deux. J'ai pris les deux et, puis à la fin, le y, je voulais m'en débarrasser.

C : Eux avec les deux équations, ils sont coincés.

B : C'est vrai que eux ne comprennent pas pourquoi le y, tu le dégages. Alors que si tu écris : nombre d'élèves, tu ne vas laisser le nombre d'élèves dans une équation. Mais c'est vrai que si les élèves te proposent y, il faut laisser faire.

R : Oui mais je ne m'en sors pas. Après je dis : le y, je l'ai introduit mais il ne me sert à rien.

A : Moi je dis : qu'est-ce qu'on nous demande de chercher ? Le nombre de bancs. Donc on va prendre cette lettre et essayer de tout exprimer en fonction de cette lettre. J'ai tendance à vouloir que les élèves aient le raisonnement de Benjamin.

C : Oui mais les élèves ne l'ont pas.

A : Oui, justement. mais dans mon premier exemple, je voulais à tout prix que cela apparaisse. Alors que là, cela ne ressort pas trop. Ils expriment tout avec des lettres comme ça, un peu brouillon. Mais il n'y a pas de méthode.

R : Justement ça, c'était présenté en problème de recherche. Je ne leur ai rien donné au départ, ils n'avaient jamais fait ce type de problème.

C : Moi j'ai été étonnée qu'ils aient l'instinct d'introduire tout de suite les lettres.

R : Mais on avait déjà vu ce qu'était une équation.

B : Oui, mais une mise en équation, c'est autre chose.

N : Après tu leur as donné une méthode rigoureuse pour résoudre ?

R : Oui.

N : A la limite, vu que c'est un problème de recherche, si tu leur claques tout de suite la méthode, cela va être une recette de cuisine, ils ne vont pas comprendre.

A : Non le but, ce n'est pas de claquer la méthode. Mais ce qui ressort au tableau là, c'est un truc un peu brouillon.

C : Là ce qui à remettre en cause, c'est juste l'énoncé.

R : J'espérais leur faire sentir qu'à part résoudre avec une équation, on ne pouvait pas résoudre ce type de problème. Mais le problème, je trouve, de donner la méthode de résolution, c'est de leur dire : voilà tous les problèmes se résolvent comme ça.

C : Non, il ne faut pas faire la méthode.

A : Ce n'est pas ce que je dis.

N : Je suis d'accord, c'est brouillon au tableau. Mais, sur une séance comme ça, ce n'est pas ce qui va sortir au brouillon qui va être important, cela va être le travail de recherche individuel des élèves.

R : Après ils ont eu le corrigé de l'exercice que j'ai photocopié. Et l'exposé général...

C : Je pense que la difficulté de la séance cela a vraiment été l'énoncé. Peut-être que c'est ça qu'il faut changer.

B : Moi je trouve qu'ils s'en sortent pas si mal.

R : A le refaire, je ne referais pas en recherche. C'est pareil là, on entend que les gens qui trouvent...

C : Tu ferais comment ?

R : Plus guidé.

C : Ah ouais, tu ferais le même problème. Mais tu poserais les questions, tu...

R : Ouais, genre polycopié avec première question : qu'est-ce qu'on cherche comme valeur ? Appelez x cette valeur. Ce qu'on vient de faire, ça s'appelle la mise en équation.

C : Sans temps de recherche, même cinq minutes, tous seuls pour voir qu'ils n'y arrivent pas.

R : Ou cinq minutes, alors.

A : Ou faire cet exercice quand ils ont déjà fait les équations. C'est intéressant, c'est un problème plus difficile à mettre en équation.

AL : Là il y a deux choses : l'énoncé du problème et sa mise en place dans la classe.

R : C'est vrai que je pourrais faire la même chose avec l'énoncé d'Alice.

AL : Effectivement il y a peut-être un travail à faire autour de l'énoncé. Après par rapport à la mise en place dans la classe ?

R : Moi je ne mettrais pas en recherche, il y a trop de gens qui...

C : Peut-être en recherche moins longue. Mais, moi je trouve ça intéressant.

R : C'était pas super long. On avait dit, je crois, 25 minutes pour la correction d'exercices, donc là maximum...

AL : Là cela a duré 20 minutes.

N : Ou en groupe éventuellement.

A : Oui, mais après quand on a...

AL : Ce qui a gêné Romain, c'est qu'il y a tout un groupe d'élèves qui n'a pas cherché.

R : Ouais. Ils cherchent pas d'abord, parce qu'ils ne savent pas du tout comment faire.

B : Oui bien sûr. Mais d'un autre côté je trouve ça intéressant de les faire venir par eux-mêmes à la mise en équation de façon plus naturelle comme tu l'as fait, plutôt que de les guider.

A : Moi je pense aussi qu'il faut passer par une étape de recherche.

C : Tu as fait pareil, toi, Alice ?

A : Oui. Au début je voulais faire guidé. Et puis avec la discussion avec Agnès, on a décidé de ne pas faire guidé. J'ai été convaincue et je suis toujours convaincue.

AL : Si on guide, on leur dit : voilà on va faire comme ça... Tout à l'heure, on parlait de méthode rigoureuse pour mettre en équation. Qu'est-ce que c'est ? Il n'y a pas de méthode. Quand on dit que l'on commence par choisir une inconnue, si je vous donne un problème difficile, vous ne commencerez pas forcément pas choisir l'inconnue. Et si on les guide, il y a une difficulté : il y en a qui ne voient pas l'intérêt de mettre en équation. Il va falloir trouver un problème intéressant. Premièrement, d'après ce que vous m'avez dit, il faut regarder si on ne peut pas le résoudre trop facilement autrement. Je pense qu'il faut les laisser se débrouiller tous seuls.

B : Le fait qu'ils s'y cassent les dents va peut-être leur faire dire : on arrive pas, on va prendre la méthode que le prof nous propose.

R : Moi ce qui me gêne c'est le temps perdu par les élèves de pas trop bonne volonté.

B : Je comprends bien.

AL : On en avait discuté. C'est une histoire de gestion de la classe. Quand on te voit bouger, on voit que tu vas toujours voir les mêmes.

B : Oui mais c'est pas pratique d'avoir 4 élèves de front.

N : En petits groupes alors. Sur les problèmes ouverts, c'est épatant ça.

B : Là tu aurais une mise en commun à faire.

C : Ça, c'est un autre travail.

AL : Rien que si tu prends ta classe complète comme ça, il y avait déjà moyen de mieux gérer ton groupe du milieu. Elles n'ont pas démarré parce qu'elles ne comprenaient pas. A un moment, il y en a qui vont démarrer et atteindre tes objectifs. Ceux qui n'y arrivent pas, pourquoi ne pas les diriger un peu.

R : C'est ce qui m'embête. Les diriger là-dessus c'est vraiment tout leur donner.

A : Oui, mais s'ils cherchent pas.

R : Ouais mais leur donner la méthode... Je leur file un poly en fin de l'heure. Ils ont compris autant.

AL : Là la lettre est sortie au bout de 6 minutes. Entre temps, tu aurais pu leur faire expliciter : qu'est-ce qu'on ne connaît pas ? Comment peut-on les aider à comprendre l'énoncé ?

A : Moi j'aurais eu tendance à leur faire un dessin.

C : Là ils vont le résoudre comme je l'ai fait.

A : Oui mais pour comprendre s'il faut les enlever ou les ajouter.

B : Prendre un cas précis. Dire : on suppose qu'il y a six bancs, regardez ce qui se passe. Un support physique pour qu'ils se représentent. Et tu l'effaces aussitôt pour pas provoquer ce que disait Claire.

AL : Romain l'a dit à un moment : supposons qu'il y ait six bancs.

B : Oui mais ça tu n'en parles plus après.

R : Non c'est tombé aux oubliettes.

C : Cela aurait permis de comprendre l'énoncé avec un exemple. Cela leur aurait peut-être permis de prendre qu'une inconnue.

B : D'une part cela te permet de calculer de deux façons différentes le nombre d'élèves et ils vont constater qu'il y a un problème. Et après cela introduit la mise en équation parce que les deux équations doivent être égales.

N : A mon avis le risque aussi c'est qu'ils essaient sur plusieurs exemples.

B : Et qu'ils y arrivent par tâtonnement.

AL : Oui mais tu peux jouer sur ça.

A : Ouais tu peux montrer que c'est plus efficace.

N : Ouais.

AL : Là c'était 15, tu peux te dire qu'il faut qu'ils arrivent jusqu'à 15. Mais après suivant les situations, tu peux jouer sur la nature des solutions. Tu peux par exemple prendre 0,625. S'ils le font par tâtonnement, ils ne sont pas près d'arriver à 0,625.

C : Moi je pensais qu'ils feraient par tâtonnement.

N : Si on fait travailler sur des exemples, on le provoque.

AL : Peut-être mais tu les aides à comprendre l'énoncé.

N : Oui et c'est moins embêtant que s'ils trouvent une solution comme celle dégagée par Claire.

AL : ça on va le voir en classe avec Alice, donc en rediscutera. Je voulais intervenir sur votre discussion de tout à l'heure : soit utilise deux inconnues, soit on écrit en toutes lettres ce que l'on cherche.

R : Moi je referais plutôt ce que Benjamin a dit.

AL : Toi, tu as été gêné parce que tu ne savais plus comment dire que l'on supprimait ce y. Et dans notre tête, il y a des règles. quand on voit y égale tant, y égale tant, c'est clair y égale y donc les deux membres sont égaux. Même si tu te laisses embarquer avec les y, puisque c'est leur premier choix, après tu peux leur demander ce que veut dire le y.

C : Oui repasser au concret.

AL : Oui.

C : En repassant au concret, ils le comprennent.

AL : Le fait de prendre deux inconnues est un réflexe assez fréquent en quatrième.

<u>*Troisième séance : Alice*</u>

Visionnemment de la cassette

R : La première méthode du gamin là, elle n'est pas évidente à justifier.

C : Elle est nickel aussi. Je trouve qu'il l'écrit bien. Bon il ne sait pas l'expliquer.

R : Il sent bien les choses.

B : En plus, c'est de l'argent en trop...

C : En fait il y a une différence de places, donc à l'arrivée une différence de prix. Donc la différence de places correspond à la différence de prix. C'est la difficulté à exprimer.

R : Le raisonnement est plus compliqué que faire une résolution toute bête, avec une équation.

C : Oui là, pour le coup. Alors que l'histoire des bancs si tu fais un dessin c'est simple.

R : Je n'en suis pas persuadé. Il n'y a aucun élève qui est parti comme ça.

C : Et ben non, il faut y penser. Ce qui est bien dans la situation d'Alice, c'est que les autres élèves n'ont rien compris à ce qu'a fait le gamin. Donc ils sont convaincus quand même qu'il faut une équation.

A : Il y en avait plusieurs qui avaient résolu arithmétiquement.

N : Ils ont vraiment pas compris ? Parce que même si elle est dure à expliciter...

A : A mon avis ils ont senti quand même.

R : Oui mais est-ce que c'est ? Moi avec une méthode comme ça, j'aurais peur que mes élèves aient l'impression de comprendre mais en prenant la somme qui reste pour la somme payée.

A : En fait moi je n'avais pas du tout anticipé. Comme il y avait un gamin qui a trouvé 55... Mon premier but était de convaincre qu'il fallait passer par les équations. Je ne l'ai pas vraiment atteint... Donc c'est pour cela que je l'avais envoyé au tableau mais je n'avais pas du tout anticipé.

C : Quand tu m'en avais parlé, j'avais eu l'impression que tous les élèves avaient compris. Et en fait cela n'a pas été d'une simplicité... Je ne trouve pas ça si gênant.

N : A côté de ça, cela a permis de dégager la bonne réponse. Et avec l'autre méthode on arrive à la même chose, je pense que cela donne plus de poids à la résolution avec équation.

B : Après dans les exercices que tu as donnés, est-ce qu'ils étaient toujours réfractaires ?

A : Il y en a toujours qui sont réfractaires. Parce qu'ils ont eu l'habitude de résoudre des problèmes sans équation avant, donc ils ne savent pas s'il y a besoin ou pas d'équation.

B : Oui, ils sont dans le flou.

AL : En fait ce n'est pas forcément gênant de résoudre un tel problème de manière arithmétique s'il sait expliquer ce qu'il fait. Si un élève donne la résolution de Claire pour le problème de tout à l'heure, c'est un élève qui a bien compris ce qui se passe.

R : Mais là l'élève d'Alice, est-ce qu'il a bien compris les choses ?

A : Il a obtenu un truc qui marchait. Mais il n'en est pas sûr, de son résultat.

R : Même moi pour expliquer, pour être clair... Pourtant j'ai compris ce qui se passait.

B : C'est pas évident.

C : Moi pour expliquer je dirais : il y en a qui a acheté 6 places, l'autre 3 places. Cela veut dire qu'il y en a qui a acheté 3 places de plus. L'autre a dépensé tant de plus. Voilà. Les trois places c'est le plus.

A : Moi la différence des places, je n'arrivais pas à voir que c'était des places de plus.

Quatrième séance : Benjamin

C : Moi j'avais fait quelque chose du même type dans ma classe. J'avais demandé aux élèves ce qu'on pouvait faire pour étudier une fonction. Là, j'avais différentes réponses qui étaient sorties, pas forcément dans le bon ordre. Je notais au tableau toutes leurs réponses. Et après on a essayé de voir dans quel ordre on allait le faire. Et après je leur ai distribué la feuille pour la fonction carrée où il y avait l'ordre dégagé. Et là ils ont fait la feuille seuls.

R : Moi je l'ai fait aussi ce cours quand j'ai fait le stage en lycée. Et en fait moi j'avais dit : on a une fonction, il va falloir donner le maximum de choses dessus. Ce qui est important c'est de justifier l'ordre dans lequel on le fait.

AL : Comment est-ce que tu l'as justifié ?

R : L'ensemble de définition c'est pour savoir si cette fonction existait. Le tableau de valeurs, le tracé de courbe, cela venait naturellement à la fin. Parité c'était pour s'éviter du travail inutile.

AL : Tu avais le même plan que celui de Benjamin. Comment est-ce que tu l'as introduit ?

R : Avant on avait vu toutes les définitions dans le cours. Après je leur ai dit : on va réinvestir ce qu'on a vu dans le cours pour étudier la fonction.

AL : C'est toi qui leur as donné le plan ?

R : Non je leur ai demandé ce qu'on allait faire.

C : Donc tu as fait comme moi.

R : Pas tout à fait, mais c'est dans le même esprit.

AL : Quelles difficultés prévoyez-vous sur cette étude ?

N : L'utilité de la parité. Je crois que c'est une notion qui ne passe pas forcément très bien. Les variations non plus c'est pas évident.

A : Moi ce qui me paraît le plus difficile, c'est la parité : $(-x)^2=x^2$.

N : On le démontre de manière algébrique et cela a des conséquences géométriques.

AL : Là il y a deux choses : démontrer que c'est pair et le passage de l'algébrique au graphique.

N : Je trouve justement que c'est très riche.

A : Les variations c'est pareil, c'est le côté algébrique. C'est pas simple.

C : Moi, je n'ai eu aucun problème dans ce truc-là. Parce que tout a déjà travaillé.

B : Moi, j'avais fait une séance de module avant sur la parité et les variations.

C : Alors que moi c'était la fin des fonctions.

B : Le fait qu'elle avait déjà bien travaillé avant lui a permis de passer plus de temps à élaborer la suite logique.

Visionnement de la bande

R : Ça a l'air de bien marcher.

C : Moi je trouve que c'est une séance qui marche vraiment bien pour leur faire dégager le plan. C'est pareil chez moi l'ensemble de définition, c'est ce qui est sorti en dernier, cela ne doit pas être naturel pour eux.

N : Moi j'ai trouvé qu'au début tu n'as pas trop rappelé pour la parité le fait qu'il faut vérifier pour tout x du domaine au moment où tu leur fais dire ce qu'il faut faire pour étudier la fonction.

B : C'est pas le but. Le but c'est de leur faire dire tout ce qui leur passe dans la tête pour faire une étude de fonction. Après on dégage le plan.

N : Non c'est pas là. C'est quand tu leur reparles de la parité. Tu dis : on regarde si f(-x)=f(x). A la fin tu es embêté parce que tu as tout un tas d'élèves qui n'a pas compris.

B : Quand je leur ai dit ça, c'était pour leur rappeler que la parité c'est ce machin-là. Après c'est à chacun de se rappeler.

N : Comme c'est une difficulté un peu prévisible. Ils ne comprennent pas trop le f(-x)=f(x). Ils vont faire ce calcul, mais est-ce qu'ils savent bien qu'il faut regarder pour tout x du domaine ?

C : Si tu l'as travaillé avant...

N : La preuve que non, finalement il y a une difficulté qui ressort. Ils prennent un exemple.

B : Je vais te raconter ce qu'on avait fait le lundi. On a fait des exercices très simples de parité. On appliquait scrupuleusement la définition. Et on avait un exemple dans le bouquin d'une fonction qui n'était ni paire, ni impaire. Dans le livre, la solution était : on calcule f(-1), on constate que ce n'est ni f(1), ni -f(1), donc elle n'est ni paire, ni impaire. Moi j'ai dit : je ne veux pas qu'on fasse ça. On calcule f(-x), on constate que ce n'est ni f(x), ni -f(x). Parce que j'avais peur qu'ils ne saisissent pas la notion de contre-exemple. Et là à cette séance, il y a eu le coup du f(-4).

N : Je me suis fait la remarque au tout début. Alors on regarde si f(-x)=f(x)...

B : Peut-être... Mais moi je leur donnais dans le sens : bon souvenez-vous... Peut-être qu'il aurait fallu que j'enfonce encore le clou : on regarde pour tout x...

C : Moi c'était : pour tout x, on calcule f(-x), après on va regarder si on trouve f(x), -f(x) et après si a priori on n'arrive pas à trouver ni l'un, ni l'autre, parce que des fois ils n'arrivent pas à voir que c'est égal, donc là à ce moment-là je leur faisais regarder sur un contre-exemple.

B : Imagine qu'ils tombent par hasard sur un où ça marche.

C : Oui mais dans ce cas il faut qu'ils arrivent à montrer que c'est vrai.

N : Tu leur fais directement calculer f(-x) ?

C : Oui, ils ne partent pas tout de suite sur des nombres. Toi tu les ferais partir avec des nombres ?

N : Pas forcément. Mais essayer d'apprendre à voir si...

C : Ça c'est autre chose. Ah oui savoir d'après la courbe.

N : Non même sans tracer la courbe. Quand tu étudies la parité, tu commences déjà à te demander, sans montrer, si elle est paire ou impaire.

A : Oui mais ça, c'est quand tu as une idée de quelles fonctions sont paires ou impaires.

C : Je ne vois pas comment tu vas faire.

B : Je ne suis pas d'accord.

N : Je trouve que c'est dommage de leur faire calculer directement f(-x), je verrais plus facilement d'abord chercher sur des exemples, avant. Et s'ils tombent sur un contre-exemple, ils ont démontré.

C : C'est les inciter à essayer et à ne pas comprendre que cela doit être vrai pour tous les x.

N : Ce n'est pas parce qu'ils auront cherché sur quelques exemples...

C : Je ne vois pas l'intérêt de chercher sur quelques exemples.

AL : Qu'est-ce que tu vois, Nicolas, après tes exemples ?

N : Cela leur permet au moins d'avoir une idée si c'est pair ou impair.

B : Moi je leur avais dit le point de départ c'est f(-x). On se lance dans les calculs et on regarde à la fin ce qu'on obtient : soit on obtient f(x), -f(x) ou rien du tout.

N : Oui mais le rien du tout...

C : C'est pour ça que, dans ce cas, ils prennent un exemple.

N : Si tu as une fonction du type x^3-x+7x+1, il faut qu'ils fassent toute une série de calculs...

C : Oui, mais toi tu connais les fonctions, tu as fait 10 ans de maths !

N : Oui justement c'est dans ce but-là que je trouve qu'il faut leur faire prendre un petit peu de recul. Pas appliquer des méthodes trop rigoureuses à ce niveau.

A : Oui mais, au début, il faut bien appliquer des méthodes pour voir quelque chose.

R : Dans le cas où c'est ni paire, ni impaire, cela va beaucoup plus vite de prendre un exemple. Et leur dire on a vu sur un exemple que cela a des chances d'être ça, maintenant on va le vérifier.

B : C'est le « ça a des chances d'être ça »... C'est la différence entre le contre-exemple et l'exemple qu'on généralise.

N : En maths, en général, on teste pour essayer de voir quel est le résultat et après on démontre. C'est ce qui me gêne.

B : Nous on a l'expérience mais un élève voit une fonction compliquée, il part dans le vague. Il a un point de départ qui est f(-x) et il y va.

A : Je pense que ton truc c'est au lieu de se laisser aller bourrin dans les calculs regarder un petit peu. Mais avant ça il faut qu'ils aient des repères.

B : Je pense que c'est pas mal de dire ça à des élèves de première ou de terminale. En seconde, c'est tout nouveau.

C : Cela me semble dangereux. Là si on présente comme ça, je ne m'étonnerais pas de l'erreur que l'élève a fait.

AL : Ce que tu dis Nicolas a un intérêt. Ce n'est pas de l'automatisme.

C : Moi à n'importe quel niveau j'ai réussi à avoir du recul qu'avec une certaine pratique. Je pense qu'avec les élèves c'est pareil.

AL : Si on fait comme ça, il faudra être très vigilant au risque de généralisation par l'exemple.

N : Moi je pense que cela peut permettre de travailler sur le sens de la démonstration.

A : Moi j'ai un argument aussi pour ça : quand on fait de la démonstration en géométrie on leur montre qu'avec des exemples cela ne suffit pas. Pourquoi est-ce qu'on ne ferait pas ça en algèbre ?

AL : Où est-ce qu'on pourrait travailler la démonstration en algèbre ?

A : Avec les équations par exemples. Cela fait des démonstrations. La résolution du problème si on veut, c'est une forme de démonstration.

AL : Là tu n'as pas le problème des exemples, contre-exemples.

A : Non. Moi je parlais de démonstration en algèbre.

AL : Oui, mais en quoi est-ce que tu y vois une démonstration ?

A : Ouais les élèves ne sentent pas qu'il y a une démonstration. Parce qu'on ne fait pas des équivalences et tout ça.

AL : C'est parce que derrière, il y a une logique ?

A : Ouais.

N : Non c'est plutôt quand on veut démontrer un résultat pour tous les nombres et qu'on utilise les lettres.

AL : Vous en avez fait cette année ?

A : Moi je vois dans le bouquin Triangle en quatrième, il y a vachement de trucs là-dessus. Mais moi, je n'ai pas tellement travaillé dans ce sens.

AL : Romain, tu l'as fait ?

R : Dans les inéquations j'en ai un peu parlé : b >a, ça veut dire a-b<0, ou des choses comme ça. Où vraiment les deux lettres représentent n'importe quel nombre. Mais sinon...

AL : Ce n'est pas en terme de « j'utilise un exemple ou un contre-exemple pour montrer quelque chose » ?

R : Ah non.

AL : Et toi Nicolas ?

N : Je ne me rappelle pas... A part ce qu'on a vu toute à l'heure. Si en cinquième, la démonstration géométrique de la distributivité.

R : Dans le contrôle sur les inéquations, il y avait des justifications de vrai ou faux.

AL : Tu as aussi travaillé ça quand tu as travaillé sur l'égalité. La démonstration en algèbre est quelque chose qui est peu travaillé. On commence à être confronté à ce problème en seconde avec les fonctions. Et c'est quelque chose dont on ne leur parle jamais.

B : C'est vrai que j'ai eu peur de leur parler de contre-exemple, de les embrouiller.

C : Moi je l'ai vu oralement.

B : Mais cela ne m'a pas empêché d'en utiliser. Mais sans le dire. Les élèves ne réagissent pas.

R : Ils réagissent bien aux contre-exemples.

P : Oui mais cela m'étonne qu'il n'y a pas un élève qui me dit : vous avez dit qu'il ne faut pas prendre d'exemple pour montrer, et là vous en prenez un.

C : Moi il y a un élève qui me l'a dit. Moi je suis revenue sur le fait : que s'il y en a un pour lequel c'est pas vrai, c'est pas vrai pour tous les réels.

AL : Cela veut dire qu'à un moment donné il faut prendre soin d'expliquer quand on peut prendre un contre-exemple ou pas.

C : C'est pour cela que je leur ai donné le mot contre-exemple.

Cinquième séance : Claire

Visionnement de la bande

C : On regarde vraiment la chose qui n'a pas marché.

AL : C'est là aussi où il y avait le plus d'algèbre. Qu'est-ce que vous pensez de ce qui s'est passé ?

B : Je ne m'attendais pas à un support géométrique pour l'ensemble de définition. C'est bien mais je pense que j'aurais dit : cela a l'air de varier entre 0 et 6 et je passe à la démonstration avec l'inégalité. Moi j'ai peur que quand ils voient ça, ils se disent : c'est bon on voit sur le dessin...

C : Mais tu penses que c'est pas une démonstration. Pour moi, c'est quand même une démonstration. Justement, pour moi, mon erreur c'est d'avoir dit : on n'a pas fait une vraie démonstration.

A : C'est dans un triangle rectangle l'hypoténuse c'est le plus grand côté...

C : Ça on l'a vu au début de la séance que le triangle est inscrit dans un cercle et que le point variait sur le cercle.

B : A partir du moment où tu n'écris pas tout ça, il n'y a pas...

C : Mais si, on l'a écrit avant.

B : Mais ce que vient d'expliquer Alice, c'est pas explicité. On ne dit pas que les deux autres côtés ont une longueur inférieure à celle de l'hypoténuse, donc cela sera inférieur à 6. Pour moi, c'est ça la démonstration géométrique.

C : C'est sûr que je n'ai pas tout écrit. Mais sinon tu es d'accord que c'est quand même une démonstration ?

B : Ah oui d'accord mais il n'en reste pas assez d'écrit pour eux.

A : Dans le programme de seconde, il n'y a pas de détermination de l'ensemble de définition.

B : C'est vrai. Ce genre d'exo est quand même un bon prétexte pour manipuler une inégalité.

C : C'est le premier exo sur les fonctions, donc c'est difficile. Donc c'est pour ça que je me suis dit qu'en s'appuyant sur la géométrie ils sentent bien pourquoi on ne peut pas prendre x n'importe comment.

A : En fait vouloir faire la recherche d l'ensemble de définition de manière algébrique, cela noie un peu l'objectif que l'on a et qui est de voir tout ce qu'on peut découvrir sur les fonctions.

C : C'est pour ça qu'on est passé vite sur le problème avec la racine carrée.

R : Mais algébriquement cela aurait été aussi vite que géométriquement.

C : Non, je l'ai refait après algébriquement et qu'avec les bons.

R : Oui mais regarde là tu leur as tout fait. Eux ils n'ont rien fait.

C : Oui mais tous les élèves ont bien compris.

A : Le but là c'est sentir la notion de fonction.

R : Là tu sens le produit remarquable, tu as fini : il y en a qui est toujours positif...

C : Là justement ils ont du mal. Faire un produit de facteurs et tout. C'est des choses où ils ont énormément de mal.

R : Vu qu'il y en a qu'un qui change de signe.

B : Comme démonstration, ça, ça peut t'induire le genre d'erreur : si tu as le produit (x-4)(x-5), avec x appartenant à $\mathbb{R}$, cela va les induire dans l'erreur pour que le produit soit positif il faut que les deux soient positifs.

C : Moi j'ai fait le tableau de signes.

B : Le cas du x+6>0, c'est quelque chose que tu peux dire quand ils ont déjà pas mal d'expérience.

AL : D'autres remarques ?

C : Il y a le coup du « on a le droit » qui apparaît.

N : Je me pose la question, en français ils ont l'habitude de ne jamais écrire de mots avec des fautes d'orthographe et moi je me pose la question, parce que je le fais de temps en temps et parce que je vois que Claire écrivait racine de 36 - x^2 égale 6-x, est-ce que c'est gênant ?

AL : Non. Je trouve qu'il faut au contraire s'appuyer sur les erreurs des élèves. Et alors il faut être bien clair sur le tableau.

C : Moi d'habitude je prends une craie rouge et je mets différent.

AL : Il faut travailler en reprenant les erreurs. Mais tu ne peux pas le faire indéfiniment. Par exemple ici avec la racine carrée, Claire n'a pas justifié pourquoi on ne peut pas écrire $\sqrt{-2}$ mais elle l'avait déjà fait avant.

N : Oui je me suis demandé pour le 6-x, tu continues le cours...

C : Mais c'est une bonne élève.

N : J'imagine mal l'élève se détacher du cours, essayer son exemple.

C : Si après je repasse dans les rangs pour savoir si c'est compris ou non.

N : Ah oui.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

RESUME

Des problèmes posés par la formation initiale des enseignants de mathématiques à l'IUFM nous ont conduite à nous intéresser à la constitution de pratiques professionnelles chez les professeurs débutants afin de déterminer quelles entrées, au niveau de la formation, seraient les mieux à même d'être efficaces. Pour ce faire, nous avons choisi d'étudier comment se construit, chez des enseignants stagiaires de mathématiques, un rapport professionnel à un domaine précis : l'algèbre élémentaire.

En nous appuyant sur différents travaux relatifs à l'enseignant issus de divers champs de recherche, nous avons décidé d'organiser notre recherche autour des questions suivantes : comment se construit et évolue la vision des enjeux de cet enseignement chez des professeurs stagiaires de mathématiques ? Comment se construit et évolue leur vision des élèves, de leurs difficultés ? Comment élaborent-ils des stratégies d,enseignement et quelles sont leurs priorités dans cette élaboration ?

A partir de l'analyse de diverses données recueillies lors du suivi individuel de quatre professeurs stagiaires durant leur année de stage, nous avons construit pour chacun d'entre eux un profil permettant de rendre visible les cohérences repérées dans ces pratiques tout au long de l'année, les évolutions observées et les raisons de ces évolutions.

Le travail a mis en évidence l'existence de régularités dans la constitution et l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre des quatre stagiaires (relativement à la vision des enjeux de l'enseignement de ce domaine, à celle des élèves et de leurs difficultés et à la constitution de stratégies d'enseignement). Il a aussi fait apparaître une grande diversité des profils et des évolutions que plusieurs facteurs expliquent : les conditions de travail des stagiaires, leur niveau de réflexivité, leurs représentations relativement aux mathématiques et à leur enseignement, certains incidents critiques intervenus dans les classes.

MOTS CLES

Didactique - Mathématiques - Algèbre élémentaire - Professeurs stagiaires de mathématiques
Formation initiale - Pratiques professionnelles.

Editeur : IREM Université PARIS 7 Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr
www.irem-paris7.fr.st
Dépôt légal : 2003
ISBN : 2-86612-234-8